Theorem on Friends and Strangers

Muhammad Rizki Duwinanto (13515006)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13515006@std.stei.itb.ac.id

***Abstrak*—Graf dapat digunakan dalam banyak hal, contohnya dalam pemetaan dalam lokasi, kimia-organik, perangkat lunak, otomata, rangkaian listrik dan tentunya dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan sosial yang salah satunya adalah Theorem of Friends and Strangers. Theorem on Friends and Strangers yang berbunyi enam orang dalam satu perkumpulan mempunyai paling sedikit tiga orang yang saling mengenal atau paling sedikit tiga orang tidak mengenal, dapat digunakan untuk memetakan Hubungan beberapa orang dalam hubungan sosial dalam media sosial dan pertemuan dan digunakan untuk meneliti disorder.**

***Kata Kunci*—Graf, Hubungan, Simpul, Sisi, Teori**

I. Pendahuluan

Hubungan manusia adalah sesuatu yang rumit dalam konteks apakah saling mencintai ataupun saling membantu dalam banyak hal, termasuk mungkin jika membahas seseorang sudah mengenal satu sama lain atau tidak. Tentu kita sudah mengenal banyak orang dan tentunya kita belum mengenal banyak orang asing.

Banyak dari orang yang telah kita kenal dan mengenal kita balik, seperti teman di Kampus, Orang Tua kita, Dosen, dan bahkan Penjual Bakso yang sering kita kunjungi. Semua adalah kumpulan orang yang telah mengenal diri kita dan kita kenal. Walaupun hanya sebatas nama, tentunya seberapa dalam orang lain yang kita kenal mengenal kita tidak akan dibahas disini namun relasi antar-manusia sudah dibangun dengan perkenalan tersebut.

Begitu pula banyak dari kita yang tidak mengenal banyak orang asing. Populasi manusia yang masih hidup di bumi ini adalah 7 milyar orang, dan tentunya banyak dari orang tersebut tidak mengenal diri kita dan kita tidak kenal semua hingga kita meninggal sekalipun. Jika bertemu dan berkenalan untuk pertama kalinya, mungkin kita akan mengenal diri mereka dan mereka kenal kita.

Hal tersebut untuk mengetahui hubungan orang lain sudah mengenal dengan orang lain, sangat menarik untuk dibahas tentunya dalam memiliki kegunaan di media sosial hingga kegunaan investigasi kriminal untuk membantu penyelidikan untuk mencari motif kriminal.

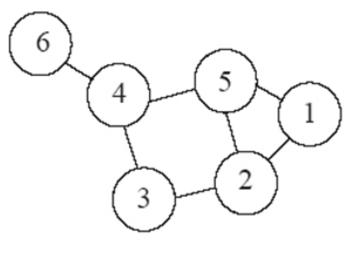
Hubungan manusia sangat bermanfaat untuk kehidupan sosial untuk dipelajari. Hubungan manusia tentu dapat direpresentasikan dengan Graf, dengan relasi sebagai sisinya dan simpul menyatakan orang. Salah satu Teori yang menggunakan graf dan membahas Hubungan sesama manusia adalah Theorem of Friends and Strangers yang merupakan turunan dari teori Ramsey.

Theorem of Friends and Strangers mengemukakan bahwa, jika ada suatu pesta dan enam orang secara acak berkumpul, akan ada paling sedikit tiga dari mereka saling tidak mengenal dan bertemu pertama kali atau paling sedikit tiga dari mereka saling mengenal dari lama dan mempunyai relasi masing-masing. Tentunya teori matematika ini sangat menarik untuk dibuktikan dalam makalah ini dan teori ini juga mempunyai kelemahan.

II. Teori Dasar

A. Definisi Graf

Graf merupakan struktur diskrit yang menggambarkan relasi antar objek dan adalah suatu himpunan dari *vertices* (simpul) dan *edges* (sisi). Graf ditemukan oleh Leonhard Euler pada 1736 untuk menggambarkan masalah yang ditemukan di jembatan Konigsberg yang berada di Kota Konigsberg dan sungai Pregal. Graf dapat didefinisikan sebagai G= (V,E), yaitu V merepresentasikan himpunan tidak kosong dari simpul-simpul {v 1 , v2 ,…, v n } dan E merepresentasikan himpunan sisi {e 1 , e2 ,…, en }.



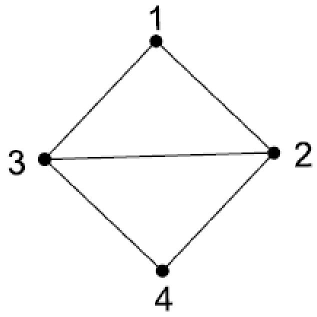
$V = \{1,2,3,4,5,6\}$
$E = \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\}\}$

Gambar 2.1 Contoh Graf dan Himpunan *Vertices* dan *edges.*

B. Jenis-Jenis Graf

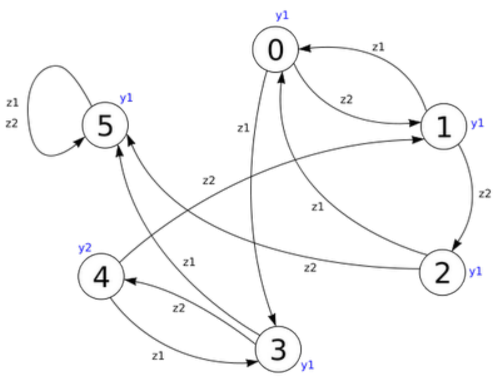
Graf dapat dikelompokan berdasarkan ciri-ciri yang dimiliki graf tersebut. Graf dapat dikelompokkan berdasarkan ada tidaknya sisi yang tidak paralel atau dengan adanya kalang. Berikut ini adalah jenis graf berdasarkan ada tidaknya sisi yang paralel atau Kalang.

1. Graf Sederhana
   Graf yang tidak mengandung kalang maupun sisi yang paralel dinamakan graf sederhana. Berikut adalah contoh dari gambar graf sederhana.



Gambar 2.2 Contoh Graf Sederhana[9]

2. Graf Tak-sederhana
   Graf yang mengandung kalang maupun sisi yang paralel dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*). Graph Tak-Sederhana juga mempunyai dua jenis yaitu Graf Ganda (*Multigraph*) yaitu graph yang mengandung sisi paralel dan Graf Semua (*Pseudograf*) yaitu graf yang mengandung kalang dan termasuk yang mempunyai kalang dan sisi paralel, karena lebih umum daripada Graf Ganda, sehingga Graf Semu sisinya dapat terhubung dengan dirinya sendiri. Berikut adalah contoh dari gambar graf sederhana.



Gambar 2.3 Contoh Graf Tidak Sederhana[10]

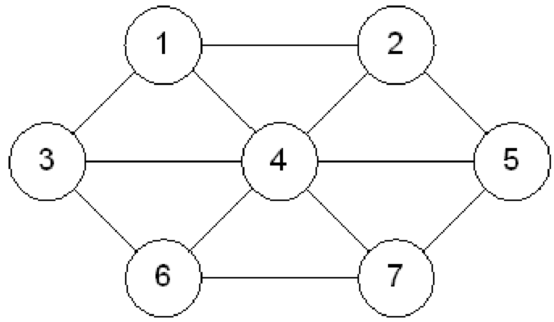
Graf dapat pula dikelompokan berdasarkan jumlah simpul yang ada pada suatu graf. Berikut adalah pengelompokan graf berdasarkan jumlah simpul.

1. Graf Berhingga (*Limited Graph)*
   Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya, n, dan berhingga.

2. Graf Tak-berhingga (*Unlimited Graph*)
   Graf yang jumlah simpulnya tidak berhingga banyaknya sehingga disebut graf tak-berhingga.

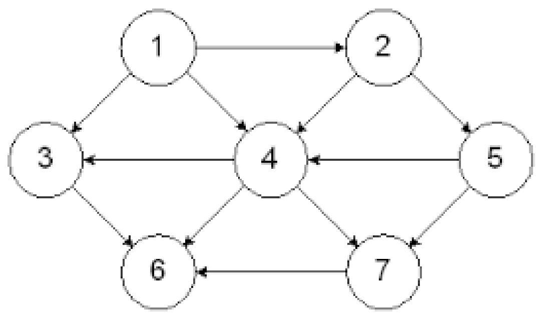
Graf juga dapat dikelompokan berdasarkan orientasi arah atau panah. Berikut adalah pengelompokan berdasarkan orientasi arah dan panah.

1. Graf Tak-berarah (*Undirected Graph*)
   Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah atau panah. Pada graf dibawah urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan.



Gambar 2.4 Contoh Graf Tak Berarah[6]

2. Graf Berarah (*Directed Graph*)
   Graf berarah adalah graf yang sisinya mempunyai orientasi arah atau panah. Dibawah adalah contoh Digraph atau Directed Graph.

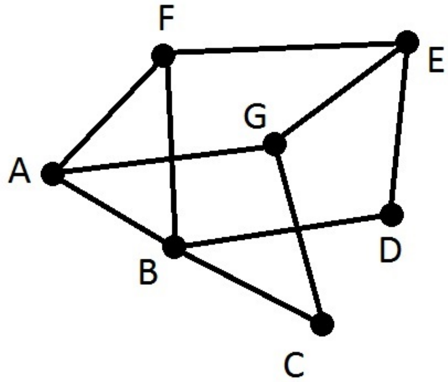


Gambar 2.5 Contoh Graf Berarah[6]

C. Terminologi Dasar Graf

Dibawah ini adalah beberapa terminologi (istilah) dasar yang berkaitan dengan graf

1. Bertetangga (*Adjacent*)
   Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung.



Gambar 2.6 Contoh Graf[11]

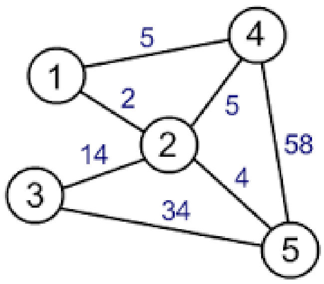
Dapat diliat di graf tersebut bahwa simpul A dan F bertetatangga tetapi simpul C dan simpul D.

2. Bersisian (*Incident*)
   Untuk sembarang sisi e=(v*j*,v*k*) dikatakan e bersisian dengan v*j* atau v*k*.

3. Derajat (*Degree*)
   Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Dapat diliat di graf tersebut bahwa simpul B memiliki derajat 4, simpul A derajat 2.

4. Lintasan (*Path*)
   Lintasan yang panjangnya n dari sisi awal ke simpul tujuan Vn di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul yang V0, e1, V1, e2, V2,..., Vn-1, en, Vn sedimikian sehingga e1 = (V0, V1), e2 = (V1, V2), ..., en = (Vn-1, Vn) adalah sisi-sisi dari graf G. Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana (*Simple Path*) jika semua simpulnya berbeda atau setiap sisi yang dilalui hanya satu kali. Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*) sedangkan lintasan yang memiliki simpul awal dan simpul akhir yang berbeda disebut lintasan terbuka (*Open Path*).

5. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)
   Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberikan sebuah harga (bobot). Bobot pada setiap sisi dapat menyatakan jarak antara dua buah kota, biaya perjalanan, waktu tempuh, ongkos produksi, dan sebagainya.Dibawah ini adalah contoh Graf Berbobot



Gambar 2.7 Contoh Graf Berbobot[12]

6. Sirkuit (*Circuit*) atau *Cycle*
   Dalam satu graf terdapat suatu sirkuit apabila terdapat lintasan (path) yang mempunyai simpul awal dan simpul akhir sama . Sebuah sirkuit dikatakan sirkuit sederhana (simple circuit) jika sirkuit tersebut tidak memuat/melewati sisi yang sama dua kali (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Sebuah sirkuit dikatakan sirkuit dasar (elementary circuit) jika sirkuit tersebut tidak memuat/melewati simpul yang sama dua kali (setiap simpul yang dilalui hanya satu kali, simpul awal dan akhir boleh sama).

D. Representasi Graf

1. Matriks Ketetangaan (*Adjacency Matrix*)
   Misalkan G = (V, E) merupakan suatu graf dengan n simpul, n > 1. Maka, matriks ketetanggaan A dari G adalah matriks n x n dimana A = a_{ij},untuk hal ini berlaku a_{ij} menjadi 1 bila simpul i dan j bertetangga dan a_{ij} menjadi 0 bila simpul i dan j tidak bertetangga. Jika dengan bobot bisa menggunakan ukuran bobot sisi tersebut, dengan tidak bertetangga bisa menggunakan notasi tak hingga. Dibawah ini adalah contoh matriks berketatangaan

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	1
4	1	0	0	1

Gambar 2.8 Contoh Matriks Ketetangaan disajikan di Tabel

2. Matriks Bersisian (*Incidency Matrix*)
   Matriks bersisian menyatakan kebersisian simpul dengan sisi . MisalkanG = (V, E) adalah graf dengan n simpul dan m sisi , maka matriks kebersisian A dari G adalah matriks berukuran m x n dimana A = a_{ij}, a_{ij} menjadi 1 bila simpul i dan sisi j bersisian dan a_{ij} menjadi 0 bila simpul i dan sisi j tidak bersisian. Dibawah ini adalah contoh matriks bersisian.

	e1	e2	e3	e4
1	1	1	1	1
2	0	0	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	1	0

Gambar 2.9 Contoh Matriks Bersisian disajikan di Tabel

3. Senarai Ketetangaan (*Adjacency List*)

Senarai ketetangaan menyatakan ketetatngaan simpul dengan simpul lainnya . MisalkanG = (V, E) adalah graf dengan n simpul dan m simpul , maka senarai kebersisian dari n simpul akan menghasilkan disenarai simpul yang berketetetangaan, misal m, di dalam senarai. Dibawah ini adalah contoh senarai ketetangaan.

A	B,C
B	A,D,C
C	B,D,A
D	C,B,E
E	D

Gambar 2.10 Contoh Senarai Ketetangaan disajikan di Tabel

III. PEMBAHASAN

A. Teori Ramsey

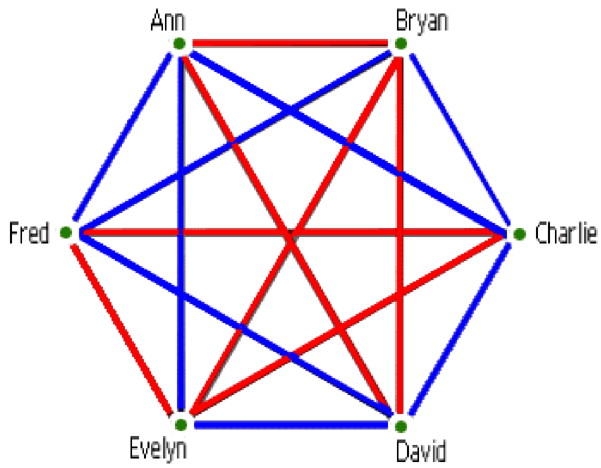
Untuk membantu mempelajari Theories Friends and Strangers maka dibutuhkan teori yang menurunkan teori friends and strangers tersebut yang disebut Teori Ramsey. Teori tersebut ditemukan pada tahun 1930 oleh Frank Ramsey dalam papernya yang berjudul ”*On a problem of formal logic.*”. Teori tersebut berbunyi “Untuk setiap bilangan bulat positif n, r, dan k terdapat bilangan bulat M0 sedemikian sehingga, jika m >= M_0 dan $[m]^k$ diwarnai dengan r-warna, maka terdapat suatu $[n]^k$ yang monokromatik”.

Teori tersebut digabungkan pada 1935 dengan mengambil r=2 dan k=2 dengan Graf maka teori tersebut berubah menjadi “ Untuk setiap bilangan bulat n, terdapat bilangan bulat M_0 sedemikian sehingga jika m>= M_0, maka setiap pewarnaan sisi-sisi pada Km dengan r warna pada sisi-sisi graf lengkap Km akan memuat subgraf lengkap Kn yang semua sisinya berwarna sama”. Khususnya untuk pengambilan r=2 maka akan menghasilkan bilangan ramsey dua warna M0 untuk nilai n dan dinotasikan R(n)=R(n,n) atau R(Kn, Kn). Selanjutnya n dapat diganti menjadi bilangan bulat x dan y menjadi R(x,y).

Selanjutnya Teori Ramsey Tersebut dapat digunakan untuk membuktikan bahwa Theories of Friends and Strangers. Teori ini juga sangat berhubungan dengan Kombinatorial sehingga teori ini sangat penting.

B. Teorema Friends and Strangers

Bayangkan jika anda ingin membuat suatu pesta dengan enam orang yang ada di pesta itu maka untuk membuktikan bahwa ada paling sedikit tiga orang yang saling mengenal atau paling sedikit tiga orang yang asing. Untuk membuktikan hal tersebut dibutuhkan Graf dua Warna, dengan Graf Lengkap dan dipillih enam simpul yaitu K6. Dengan dua warna (Merah atau Biru) untuk memodelkan hubungan antar-manusia, dengan Warna Merah untuk menggambarkan hubungan tidak kenal dan Warna biru untuk memodelkan hubungan kenal, masalahnya setara karena jika diwarnai bagaimanapun akan ada segitiga berwarna biru atau merah, bahkan sudah ditunjukan bahwa minimal paling sedikit segitiga berwarna adalah dua. Sehingga dengan Teori Ramsey menjadi R(3,3)=6.



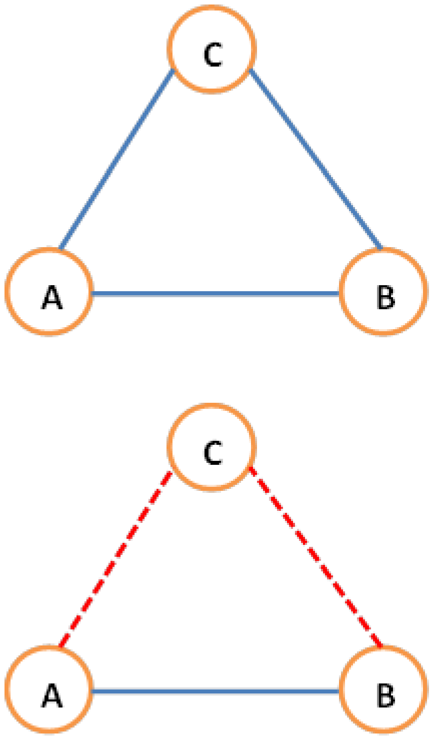
Gambar 3.1 Contoh Graf Ramsey yang menggambar Teori Friends and Strangers. [4]

Dipilihnya Graf dengan enam simpul di teori ini dapat dibuktikan dengan Kasus-kasus dimulai dari dua simpul.

Jika ada dua orang dalam pesta teresbut kemungkinannya adalah sudah teman dari lama dan tidak mengenal. Tidak upagraf karena hanya satu sisi yang ada.

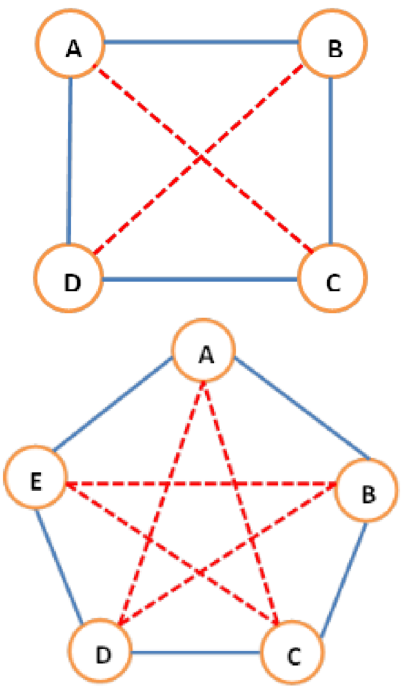
Gambar 3.2 Contoh Graf dua Simpul yang menggambarkan hubungan manusia. [4]

Jika ada tiga orang , walaupun jika mengundang tiga orang yang sudah mengenal satu sama lain dan tidak kenal satu sama lain sudah bisa membuat kumpulan tiga orang namun tentu saja tidak cukup untuk kasus-kasus jika ada yang satu orang yang tidak mengenal keduanya ataupun kasus satu orang kenal keduanya.



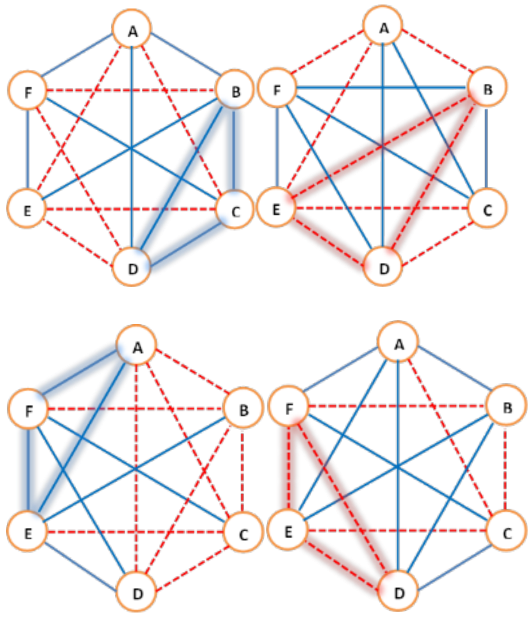
Gambar 3.3 Contoh Graf Tiga Simpul yang menggambarkan hubungan manusia, bisa terlihat gambar diatas memenuhi segitiga monokromatik tetapi yang bawah tidak sehingga tidak valid. . [4]

Jika empat orang dan lima orang tentu masih belum cukup untuk membuat teorema ini bekerja karena segitiga monokromatik belum bisa dibuat di kasus apapun itu. Terlihat di graf dibawah bahwa tidak ada upagraf segitiga monokromatik yang ada hanyalah bikromatik.



Gambar 3.4 Contoh Graf Empat Simpul dan Lima Simpul yang menggambarkan hubungan manusia. . [4]

Baru jika ada enam orang, teorema ini dapat bekerja, dengan kasus apapun akan selalu ada tiga orang yang mengenal dan tiga orang yang saling tidak mengenal. Enam simpul yang ada bisa membuat banyak segitiga monokromatik sehingga batasan untuk teori ini adalah enam simpul sehingga R(3,3) = 6 adalah batasannya.



Gambar 3.5 Contoh Graf Enam Simpul yang valid dalam Teori Tersebut bisa dilihat bahwa empat graf tersebut memenuhi teori Friends and Strangers. Dengan kombinatorial apapun selalu ada Segitiga Monokromatik yang mengambarkan hubungan kenal atau tidak kenal atau sama dan beda warna. [4]

Teori ini juga bisa dibahas dalam ranah Kombinatorial. Namun dengan Kombinasi apapun pasti selalu ada segitiga monokromatik dengan hubungan yang sama. Maka teori ini terbukti benar dengan simpul sama dengan diatas enam.

Mengapa ini menarik untuk dibahas dalam teori graf dan matematika diskrit karena Teori ini menunjukan Total Disorder dalam graph sangat tidak mungkin. Ambil Graf tak-berhingga apapun itu dengan warna yang berhingga yang menggambar upagraf monokromatik Bagaimanapun ukuran dari graph tersebut.

IV. KESIMPULAN

Teori Friends and Strangers Terbukti dalam Matematika dan dapat dibuktikan dalam Graf Lengkap dengan minimal 6 simpul dengan K_6 dengan bilangan ramsay R(3,3)=6. Theories of Friends and Strangers ini menggunakan Teori Graf dan bisa memakai kombinatorial. ini membuktikan Teori Ramsay dan dapat digunakan untuk meneliti Disorder dari hubungan manusia dalam Graf Tak Berhingga.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji Syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT karena-Nya Makalah ini dapat diselesaikan dengan baik. Terima Kasih saya Ucapkan kepada Pak Rinaldi Munir yang telah mengajar Matematika Diskrit dengan sabar, dan kepada teman teman saya di Teknik Informatika yang sudah memberikan ide terhadap makalah ini. Terima Kasih juga kepada Orang Tua saya yang sudah mendukung saya untuk berkuliah di ITB.

REFERENSI

[1] https://plus.maths.org/content/friends-and-strangers Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[2] http://repository.unhas.ac.id/bitstream/handle/123456789/4437/aplikasiteoriramseydalamteorigraf.pdf?sequence=1 Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[3] http://danysatriokintoko.blogspot.co.id/2013/02/teori-dasar-graf.html Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[4] http://mathforum.org/mathimages/index.php/The_Party_Problem_(Ramsey's_Theorem) Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[5] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/ThreeOrThree.shtml Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[6] http://faculty.cs.niu.edu/~freedman/340/340notes/340graph.htm Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[7] https://en.wikibooks.org/wiki/Combinatorics/Ramsey's_Theorem Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[8] http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/22616/3/Chapter%20II.pdf Diakses 7 Desember 2016 Pukul 12:00

[9] http://3.bp.blogspot.com/-Qzwwx-qhjkw/TuRe3kJX89I/AAAAAAAAAD4/IVxYLylOWq4/s1600/9.png

[10] http://1.bp.blogspot.com/-nIKvDaaNYtw/TuTIfNG1UoI/AAAAAAAAACY/rt7cmdU7q_0/s1600/6.png

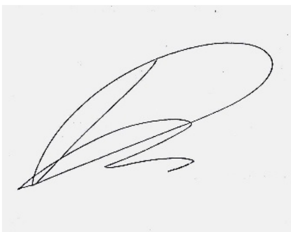
[11] http://3.bp.blogspot.com/-GjYb1FbBRHs/Tu0nZ_Tz0PI/AAAAAAAAAIk/OjVl1XLHhFU/s1600/graf+G.jpg

[12] data:image/png;base64,iVBORw0KG....

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016



Muhammad Rizki Duwinanto
13515006