

# Analisis Proses Pembentukan *Snowflake* dengan Metode Rekurens

Ega Rifqi Saputra (13515015)  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13515015@itb.ac.id

**Abstrak**—Keindahan di alam bermacam macam bentuknya. Mulai dari keindahan yang dapat dipandang langsung atau keindahan yang perlu usaha untuk melihatnya. Salah satunya adalah keindahan bentuk dan ornamen yang dimiliki oleh *snowflake*. Walaupun ukuran dari *snowflake* sangat kecil bahkan tidak bisa dilihat jika tidak menggunakan bantuan alat apapun, tetapi bisa membentuk suatu bentuk yang indah, detil, dan bahkan terlihat simetris atau seimbang. Selain akan keindahannya yang menakjubkan, proses pembentukan *snowflake* juga tidak kalah menakjubkan. *Snowflake* dibentuk dari satu molekul uap air yang memberku, lalu menyatu dan membentuk suatu bentuk *snowflake* yang indah. Dan ternyata proses pembentukannya pun dapat kita analisa dengan metode rekurens dan metode fraktal khususnya metode koch *snowflake*.

**Kata kunci**—*snowflake*, rekurens, fraktal, koch *snowflake*, heksagonal

## I. PENDAHULUAN

Seperti yang kita ketahui, alam memiliki keindahan yang luar biasa. Barisan gunung, hamparan laut, hutan rindang dan keindahan alam lain yang merupakan anugerah yang dapat kita nikmati dengan mata kepala kita.. Akan tetapi, tidak hanya keindahan makroskopis saja yang bisa dinikmati dari alam yang telah tercipta. Banyak keindahan mikroskopis yang membuat manusia takjub dan bahkan tidak menyangka akan keberadaan keindahan itu disuatu ukuran yang sangat kecil. Keindahan mikroskopis yang tidak kalah indah dan tidak kalah menakjubkan dengan keindahan makroskopis. Keindahan mikroskopis tersebut salah satunya adalah *snowflake* atau *snow crystals*.

*Snowflake* atau dalam bahasa Indonesia disebut sebagai kristal es/kristal salju adalah suatu molekul air yang membeku yang membentuk suatu hexagonal yang unik. *Snowflake* dikenal dengan salah satu karakteristiknya yaitu bentuk 6 sisi yang simetri. Berikut adalah contoh dari gambar *snowflake*.



(sumber : [www.snowcrystals.com](http://www.snowcrystals.com))

Keindahan *snowflake* yang terbentuk ini menyimpan segenap rahasia yang tidak kalah menakjubkan dibanding dengan keindahannya. Salah satunya adalah dalam proses pembentukannya. Dibalik keindahan dalam ukuran yang sangat kecil dan memiliki detil yang indah, prosesnya pun tidak kalah menakjubkan. Proses pembentukan *snowflake* ini menggunakan teknik rekurens atau lebih detilnya teknik fraktal.

Dimulai dengan suatu bentuk hexagon, dan diperdetil dengan bentuk hexagon lain, merupakan salah satu penggunaan rekurens dalam pembentukan *snowflake*. Dan dalam prosesnya juga, *snowflake* akan membentuk bentuk yang berbeda beda dan unik, tergantung dari beberapa faktor, yang diantaranya adalah kelembapan dan temperatur. Tidak hanya berbentuk hexagon dan memiliki 6 sisi yang serupa, *snowflake* juga memiliki berbagai macam bentuk lain yang diantaranya juga mengikuti teknik rekurens atau fraktal.

## II. DASAR – DASAR TEORI

### II.I. DEFINISI REKURSIF

Rekursif adalah suatu proses yang memanggil dirinya sendiri. Menurut definisi dalam Microsoft Bookshelf, rekursif adalah kemampuan suatu rutin untuk memanggil dirinya sendiri.

Dalam ilmu komputer, rekursif sering digunakan di dalam konsep pengulangan. Pada saat tertentu, rekursif digunakan untuk memecahkan permasalahan atau algoritma yang konsisten dan sederhana. Tetapi, rekursi juga dapat membantu untuk mengekspresikan algoritma dalam sebuah rumusan tertentu yang

menbuat algoritma tersebut terlihat mudah untuk dianalisa.

## II.II. FUNGSI REKURSIF

Fungsi rekursif didefinisikan oleh dua bagian yaitu basis dan rekurens. Basis adalah bagian yang berisi nilai fungsi yang terdefinisi secara eksplisit dan sekaligus juga bagian yang berfungsi untuk menghentikan rekursif atau pengulangan. Bagian basis ini juga yang akan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif. Rekurens adalah bagian yang digunakan untuk memanggil fungsi rekursif itu sendiri, bagian yang mendefinisikan fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Bagian rekurens ini yang nantinya berulang dan akan berperan penting dalam menentukan seperti apa fungsi rekursif yang diinginkan. Fungsi rekurens ini akan memiliki nilai, yang nilainya akan selalu menuju ke basis. Jika basis adalah suatu nilai yang besar, maka nilai atau pemanggilan di bagian rekurens akan semakin menaik. Sebaliknya, jika basis adalah suatu nilai yang kecil, maka nilai atau pemanggilan bagian rekurens akan semakin mengecil. Akan tetapi, kebanyakan, fungsi rekursif menggunakan basis yang kecil.

Dibawah ini adalah salah satu contoh dari fungsi rekursif. Misalkan  $f$  didefinisikan secara rekursif sbb

$$f(n) = \begin{cases} 4 & , n = 0(\text{basis}) \\ 3f(n-1) + 1 & , n > 0(\text{rekurens}) \end{cases}$$

Tentukan nilai  $f(4)$ !

$$\begin{aligned} \text{Solusi: } f(4) &= 3f(3) + 1 \\ &= 3(3f(2) + 1) + 1 \\ &= 3(3(3f(1) + 1) + 1) + 1 \\ &= 3(3(3(3f(0) + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= 3(3(3(3 \cdot 4 + 1) + 1) + 1) + 1 \\ &= 3(3(3(13) + 1) + 1) + 1 \\ &= 3(3(40) + 1) + 1 \\ &= 3(121) + 1 \\ &= 364 \end{aligned}$$

## II.III. KELEBIHAN DAN KELEMAHAN REKURSIF

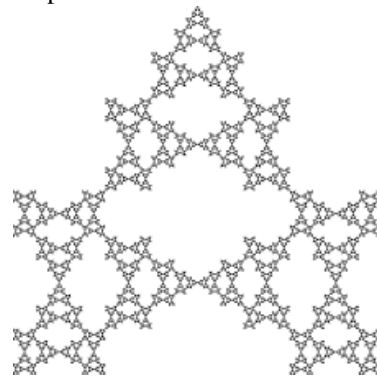
Walaupun rekursif sudah sangat sering digunakan dan aplikasi dari rekursif pun bisa dilihat dimana mana, fungsi ini masih punya beberapa kelemahan, pun beberapa kelebihan. Beberapa diantaranya adalah rekursif sangat mudah untuk melakukan perulangan dengan batasan fungsi dalam skala yang besar. Fungsi rekursi ini selalu dibatasi dengan basis yang akan menghentikan pengulangan, dan untuk mengatur

kapan akan berhentinya kita hanya perlu mengubah basisnya saja.

Akan tetapi, fungsi rekursif kadang bisa membingungkan, dikarenakan proses yang agak berbelit-belit. Fungsi rekursif akan memanggil dirinya sendiri dan berulang-ulang, oleh karena itu kadang fungsi rekursif membuat proses agak berbelit-belit dan mengakibatkan pemanggilan data yang bertumpuk. Karena permasalahan tadi, untuk menggunakan fungsi rekurens dibutuhkan stack yang sangat besar. Jika digunakan di dalam program, tiap pemanggilan fungsi rekursif, variabel lokal dan parameter formal dari fungsi rekursif akan membutuhkan memory, dan jika pemanggilannya tidak berhenti atau infinite loop maka stack akan penuh atau mengakibatkan *stack overflow*.

## II.IV. PENGERTIAN FRAKTAL

Fraktal adalah suatu matematika yang memiliki dimensi fraktal yang biasanya melebihi dimensi topologi. Adapun maksud dari dimensi fraktal adalah sebuah pola yang bersifat rekursif, yang di suatu bagian kecilnya, mirip dengan bagian keseluruhan pada suatu objek. Menurut kamus Webster, fraktal didefinisikan sebagai potongan yang tidak rata, salah satu variasi kurva yang tidak beraturan dan mengulangi dirinya sendiri pada skala tertentu.



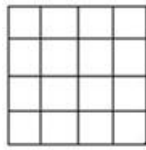
(sumber : pl.wikipedia.org)

## II.V. MENGHITUNG DIMENSI FRAKTAL

Kata fraktal berasal dari bahasa latin *fractus* yang artinya "patah", "rusak" atau "tidak teratur". Kata kerja yang berhubungan dengan *fractus* adalah *frangere*, yaitu memecah-mecah, membuat menjadi bagian-bagian yang tidak beraturan. Akan tetapi, di balik bentuknya yang tak beraturan fraktal ini adalah keteraturan dalam bentuk *self-similarity*, yaitu bentuk fraktal sebenarnya berasal dari suatu bentuk dasar yang teratur.

Untuk memahami *self-similarity* dari suatu fraktal, kita perlu tahu cara menghitung dimensi fraktal. Namun sebelum menghitung dimensi fraktal, kita perhatikan cara menghitung dimensi

sebuah objek. Misal, kotak di bawah ini bisa dipecah pecah menjadi kotak yang lebih kecil. Masing masing kotak kecil berukuran  $\frac{1}{4}$  dari ukuran semula sehingga dibutuhkan 16 kotak kecil untuk membangun kotak besar.



(sumber : majalah1000guru.net)

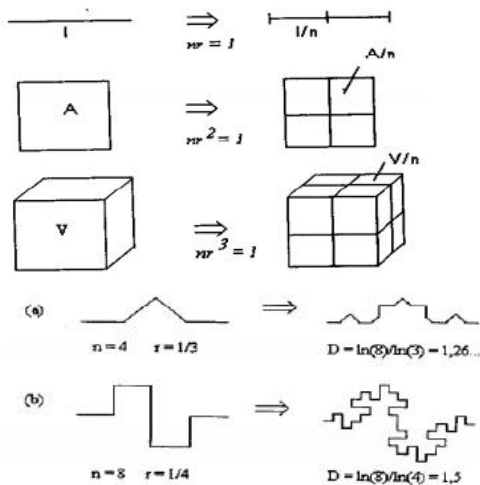
Dengan memperhatikan contoh tadi didapatkan persamaan :

$$N = S^D$$

Dengan N adalah jumlah pecahan kecil yang diperlukan untuk membuat bangun yang besar, S adalah skala perbandingan antara bangun besar dibandingkan pecahan kecil, dan D adalah dimensi. Sehingga untuk menghitung nilai D atau nilai dimensi, dapat dihitung dengan menggunakan :

$$D = \log N / \log S$$

Berikut adalah beberapa contoh lain penghitungan dimensi fraktal



(sumber : batan.co.id)

### III. PROSES PEMBENTUKAN SNOWFLAKE DENGAN METODE REKURENS

#### I. DESKRIPSI SNOWFLAKE

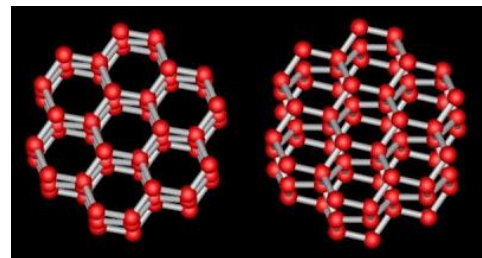
*Snowflake* (kepingan salju) atau *snow crystal* (kristal salju) adalah suatu kristal dari es yang tunggal yang terdiridari air, molekul air ini kemudian berkumpul dan membentuk suatu hexagon. Kristal salju ini sering kali di deskripsikan dengan suatu benda yang

memiliki ciri ciri atau karakteristik yaitu memiliki 6 sisi yang simetri. Gambar di bawah ini adalah salah satu contoh bentuk dari *snowflake* yang memiliki 6 sisi simetri.



(sumber : snowcrystals.com)

*Snowflake* kebanyakan berbentuk heksagonal, hal tersebut dikarenakan molekul molekul air yang membentuknya. Molekul molekul air dalam kristal es akan membentuk kisi heksagonal, yang ada di dalam gambar di bawah ini. Setiap bola berwarna merah mewakili atom oksigen, sedangkan tongkat abu-abu mewakili atom hidrogen. Ada dua hidrogen untuk setiap satu atom oksigen, sehingga rumus kimianya adalah H<sub>2</sub>O atau air. Simetri enam lipat krisat salju pada akhirnya berasal dari simetri enam lipatdari kisi heksagonal yang dibentuk oleh molekul air dalam kristal es.



(sumber : verseofuniverse.blogspot.co.id)

#### II. PROSES PEMBENTUKAN SNOWFLAKE

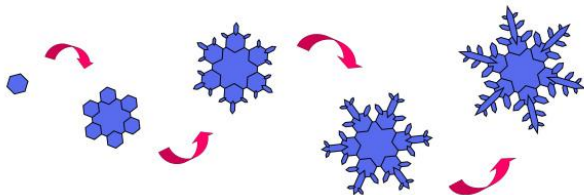
Mungkin sebagian orang mengira bahwa salju berasal dari hujan yang membeku. Tetapi hal tersebut tidak benar. Jika air hujan yang membeku maka tidak akan membentuk *snowflakes* dan bukan salju yang akan turun, melainkan es atau mungkin biasa terjadi adalah fenomena hujan es. Perbedaannya adalah hujan es tidak memiliki pola yang rumit dan simetris yang dimiliki oleh kristal salju.

*Snowflake* atau kristal salju, terbentuk dari uap air yang membeku. *Snowflake* atau kristal salju, muncul ketika uap air di udara terkonversi langsung menjadi es tanpa melewati proses menjadi air. Semakin banyak uap air yang terkondensasi dan berubah menjadi kristal salju, krisat tersbut terus

tumbuh dan berkembang yang akan membentuk suatu pola atau ornamen tertentu.

Sebuah *snowflake* terbentuk diawali dengan sebuah molekul uap air yang membeku dan membentuk suatu heksagon yang kecil. Heksagon tersebut nantinya akan tumbuh membesar, dan heksagon heksagon kecil yang lain pun mulai tumbuh dan bersatu dengan heksagon inti tadi. Karena perbedaan temperatur dan kelembapan, beberapa heksagon berubah bentuk dan membentuk tangan, akan tetapi akan selalu berbentuk heksagonal. Kepastian bentuk dari *snowflake* tergantung dari perjalanan *snowflake* ini melewati variasi kelembapan dan temperatur. Akan tetapi, enam tangan yang terbentuk, dibentuk pada saat yang sama, sehingga tumbuh dengan sinkron dan bersamaan, kompleks tetapi tetap simetri. Itulah sebabnya tidak ada dua *snowflake* yang berbentuk tepat sama.

Pembentukan ini akan terus berulang dan membentuk sebuah *snowflake* segi enam dengan sisi enam yang di tiap tiap sisinya terdapat detail detail yang sangat kecil yang juga merupakan berbentuk segi enam. Hal ini merupakan salah satu metode rekursif, dari sebuah molekul uap air yang membeku yang membentuk segi enam, dan di akhiri pula dengan molekul uap air yang berbentuk segi enam dan sangat kecil di tiap ditiap sisinya. Berikut adalah gambaran proses pembentukan *snowflake* dengan metode rekursi.

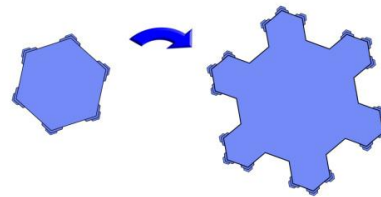


(sumber : snowcrystals.com)

Dari penjelasan singkat mengenai proses pembentukan *snowflake* mulai dari sebuah molekul uap air kecil berbentuk heksagonal sampai menjadi bentuk yang kompleks dan simetri, pembentukan tersebut dapat dikelompokkan menjadi 3 fase yaitu, *faceting*, *branching* dan *sharpening*. Fase awal yang dilakukan adalah *faceting*. *Faceting* adalah proses pembentukan awal yang dimulai dari bentuk heksagonal. *Snowflake* sering digambarkan berbentuk *flat* atau tipis, yang sebenarnya adalah berbentuk prisma heksagonal. Prisma heksagonal terdiri dari dua basal faset dan 6 prisma faset. Maka dari itu, ketika cahaya menyinari *snowflake* maka akan

menampilkan refleksi dari *snowflake* tersebut. Karena bentuk ini akan membuat *snowflake* menjadi seperti cemin. Pada fase awal ini, kita sudah bisa menyebutnya sebagai salah satu jenis dari *snowflake*, jenis *snowflake* yang paling sederhana yaitu prisma heksagonal.

Proses pembentukan selanjutnya adalah *branching*. Pada proses inilah 6 tangan dari *snowflake* mulai terbentuk. Sebelum memasuki fase ini, *snowflake* telah berbentuk heksagonal, lalu setelah memasuki fase ini, tiap tiap sudut heksagonal akan menempel heksagon heksagon yang lebih kecil. Yang lama kelamaan akan membentuk tangan dan membentuk bagian bagian kompleks dari *snowflake*. Berikut adalah skema singkat dari *faceting* ke *branching*.



(sumber : snowcrystals.com)

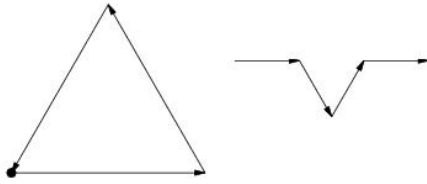
Fase terakhir adalah fase *sharpening*. Seperti yang telah diketahui banyak orang, bentuk dari *snowflakes* sangat tipis dan datar. Oleh karena itu disebut sebagai *flakes* atau kepingan. Akan tetapi tidak semua *snowflakes* berbentuk kepingan, semua tergantung dari temperatur dan kelembapan, maka dari itu *snowflake* disebut juga *snow crystals*.

### III. KOCH SNOWFLAKE

Koch Snowflake merupakan sebuah fractal atau dikenal juga dengan *the Koch Island*, pertama kali di deskripsikan oleh Helge von Koch pada tahun 1904. Koch snowflake ini juga kadang dikaitkan dalam salah satu proses pembentukan snowflake yaitu *branching*. Yang dimaksud dengan *snowflake* yang fraktal adalah ketika *snowflake* terbentuk dari bentuknya sendiri atau disebut dengan *self-similar structure*. Yaitu dimana ketika sebuah cabang yang mempunyai sub cabang, yang tiap sub cabangnya merupakan cabang yang diperkecil dan akan terus berlanjut sampai bentuk yang sangat kecil. Pembentukan *snowflake* dengan *self-similar construction* disebut dengan Koch Snowflake.

Koch Snowflake terbentuk diawali dengan sebuah segitiga sama sisi, membuang sisi tengahnya dan membentuk segitiga kecil yang lain di tempat sisi tengah yang telah terbangun dan terus berulang sampai tidak teringga atau sangat kecil. Koch Snowflake

dapat digambarkan dengan sistem Lindenmayer, dengan inisial string “F—F—F”, dan menulis ulang string dengan fungsi “F” -> “F+F—F+F” dengan sudut 60°. Iterasi dari penjelasan sistem Lindenmayer dapat dilihat dibawah ini



(sumber : mathworld.wolfram.com)

Iterasi ke n dari Koch Snowflake dapat di implementasikan menjadi KochMesh[n], penjelasannya adalah sebagai berikut. Dimisalkan  $N_n$  adalah banyaknya sisi,  $L_n$  adalah panjang dari satu sisi,  $l_n$  adalah panjang keliling, dan  $A_n$  adalah luas dari snowflake setelah n kali iterasi. Jika,  $n=0$  merupakan bentuk segitiga, dan panjang sisi ketika  $n=0$  adalah 1. Maka

$$\begin{aligned}
 N_n &= 3 \cdot 4^n \\
 L_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
 l_n &\equiv N_n L_n \\
 &= 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n \\
 A_n &= A_{n-1} + \frac{1}{4} N_n L_n^2 \Delta \\
 &= A_{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \Delta.
 \end{aligned}$$

Rekurens dimulai dengan  $A_0 = \Delta$  maka

$$A_n = \frac{1}{5} \left[ 8 - 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] \Delta,$$

Maka ketika  $n \rightarrow \infty$

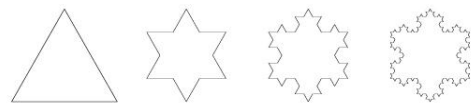
$$A_\infty = \frac{8}{5} \Delta.$$

maka kapasitas dimensi dari Koch Snowflake adalah

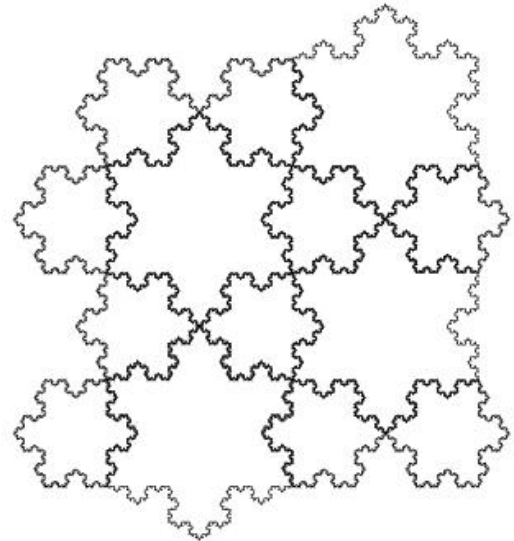
$$\begin{aligned}
 d_{cap} &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln L_n} \\
 &= \log_3 4 \\
 &= \frac{2 \ln 2}{\ln 3} \\
 &= 1.261859507 \dots
 \end{aligned}$$

(OEIS [A100831](https://oeis.org/A100831); Mandelbrot 1983, p. 43).

Berikut adalah contoh contoh hasil dari Koch Snowflake



(sumber : mathworld.wolfram.com)



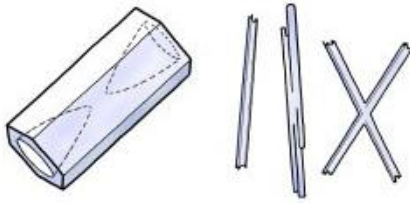
(sumber : mathworld.wolfram.com)

#### IV. MACAM MACAM BENTUK SNOWFLAKE

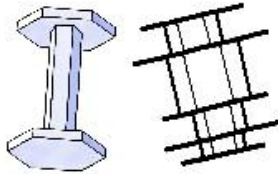
Jika dilihat dari beberapa pembahasan tadi, bentuk snowflake dasar bisa dibentuk dengan metode rekurens dengan 3 fase, yaitu *faceting*, *branching* dan *sharpening*. Lalu ada juga pembentukan *snowflake* dengan menggunakan metode fraktal. Akan tetapi pada kenyataannya, banyak sekali jenis jenis *snowflake* berdasarkan bentuknya yang tidak bisa dijelaskan dengan metode rekurens atau fraktal. Beberapa bentuk dari *snowflake* antara lain *stellar dendrites*, *columns and needles*, *capped columns*, *fernlike stellar dendrites*, *diamond dust crystals*, *triangular crystals*, *twelve-branched snowflakes*, *rimed snowflakes* and *graupel*.



Snowflake Stellar Dendrite  
(sumber : snowcrystals.com)



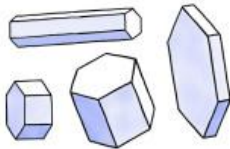
Snowflake Columns and needles  
(sumber : snowcrystals.com)



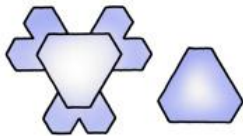
Snowflake Capped Column  
(sumber : snowcrystals.com)



Snowflake Fernlike Stella Dendrite  
(sumber : snowcrystals.com)



Snowflake Diamond Dust  
(sumber : snowcrystals.com)



Snowflake Triangular  
(sumber : snowcrystals.com)



twelve-branched snowflakes  
(sumber : snowcrystals.com)

#### IV. KESIMPULAN

Banyak keindahan alam yang mengandung misteri dan kenyataan yang menakjubkan. Misalnya dari *snowflake*, sebutir kecil uap air yang membeku namun mempunyai detil bentuk yang indah nan menakjubkan. Bahkan prosesnya pun tidak kalah menakjubkan dan dapat dijelaskan secara ilmiah. Proses pembentukan Snowflake Fernlike Dendrite yang menggunakan metode koch *snowflake*, yaitu *self-similarity construction*, atau *snowflake* sederhana yang menggunakan metode rekursi sederhana yang dimulai dari sebuah bentuk heksagon. Akan tetapi beberapa bentuk masih tidak sepenuhnya menggunakan metode rekurens. Masih ada faktor  $x$  yang ikut campur dalam pembentukan *snowflake*, yaitu temperatur dan kelembapan.

#### V. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat-Nya sehingga makalah ini dapat selesai. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Rinaldi Munir, selaku dosen pengajar mata kuliah Matematika Diskrit atas segala ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Selanjutnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada sumber referensi penulis dalam menyelesaikan makalah ini dan semua pihak yang telah membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung. Semoga dengan selesainya makalah ini, makalah ini dapat berguna bagi pembaca.

#### REFERENSI

- [1] <http://www.snowcrystals.com/science/science.html> , 8 Desember 2016 pukul 15:13
- [2] <http://www.snowcrystals.com/guide/guide.html> , 8 Desember 2016 pukul 15:13
- [3] <http://www.snowcrystals.com/branching/branching.html> , 8 Desember 2016 pukul 15:13
- [4] <http://www.snowcrystals.com/faceting/faceting.html> , 8 Desember 2016 pukul 15:14
- [5] <http://www.snowcrystals.com/sharpening/sharpening.html> , 8 Desember 2016 pukul 15:15
- [6] Munir, Rinaldi. —*Diktat Kuliah IF2153 Matematika Diskrit*, Informatika Bandung: Bandung, 2007.
- [7] Sekawati, Linda. "Teknik Penggambaran Bentuk dan Citra Alamiah Berbasis Dimensi Fraktal".
- [8] <http://andiagusta.blogspot.co.id/2014/04/rekursif-atau-rekursi-recursion.html> , , 9 Desember 2016 pukul 09:24
- [9] <http://andridwisaputra-andri.blogspot.co.id/2013/10/pengertian-fractal.html> , 9 Desember 2016 pukul 10:07
- [10] <http://majalah1000guru.net/2012/01/berkenalan-dengan-fraktal/> , 9 Desember 2016 pukul 10:24
- [11] [http://www.batan.go.id/ppin/lokakarya/LKSTN\\_05/rahmat.pdf](http://www.batan.go.id/ppin/lokakarya/LKSTN_05/rahmat.pdf) 9 Desember 2016 pukul 10:36,
- [12] <http://versesofuniverse.blogspot.co.id/2013/11/kepingan-salju-snowflakes.html> , 9 Desember 2016 pukul 10:57
- [13] <http://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html> , 9 Desember 2016 pukul 12:56
- [14] Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, pp. 42-45, 1983.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Ega', with a horizontal line extending to the right from the end of the signature.

Ega Rifqi Saputra (13515015)