

Penyelesaian Masalah Josephus Sederhana dalam Bentuk Eksplisit

Jehian Norman Saviero - 13515139
Program Sarjana Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
jehiannormansaviero@students.itb.ac.id

Abstrak — Masalah Josephus merupakan masalah yang muncul pada abad pertama. Singkat cerita, Josephus bersama empat puluh kawannya terjebak dalam Gua karena tentara-tentara Romawi. Mereka berniat melakukan bunuh diri dengan cara sebagai berikut: mereka berempatpuluhsatu berdiri melingkar dan melakukan perhitungan dari satu. Urutan bunuh diri dimulai dari orang ketiga, keenam, kesembilan, dan seterusnya, melingkar hingga habis. Apabila masalah ini dipandang untuk kasus yang sederhana untuk urutan bunuh diri orang kedua, keempat, dan seterusnya ternyata, apabila ditinjau secara rekursi dan dibuktikan secara induksi, permasalahan ini tidak se-“acak” yang dibayangkan. Apakah benar masalah ini bukan semacam undian dan dapat dikonstruksi secara dalam bentuk eksplisit?

Kata kunci — Masalah Josephus, Rekursif, Eksplisit, Induksi.

I. PENDAHULUAN

Masalah Josephus atau Permutasi Josephus, di dalam Ilmu Komputer dan Matematika merupakan masalah teoritis yang berkaitan dengan permainan “*Counting-out Game*”. Permasalahan ini merupakan sebuah permainan yang berlangsung secara “acak”. Jika permasalahan ini diselesaikan oleh komputer dengan metode *straightforward* ternyata kompleksitasnya adalah $O(n \log n)$ yang dimana untuk n yang cukup besar akan membutuhkan waktu yang cukup lama.

```
5
6 #ifndef listsirkuler_H
7 #define listsirkuler_H
8
9 #include "boolean.h"
10
11 #define Nil NULL
12
13 typedef int infotype;
14 typedef struct tElmtlist *address;
15 typedef struct tElmtlist {
16     infotype info;
17     address next;
18 } ElmtList;
19 typedef struct {
20     address First;
21 } List;
22
23 #define Info(P) (P->info)
24 #define Next(P) (P->next)
25 #define First(L) ((L).First)
```

Gambar 1.1 Potongan Program Penyelesaian Masalah Josephus (1)

```
6 int main()
7 {
8     List L;
9     Long T, i, count = 0, kasus;
10    scanf("%ld %ld", &T, &kasus);
11    CreateEmpty(&L);
12    for (i = 1; i <= T; ++i)
13    {
14        ++count;
15        if (count % kasus != 0)
16        {
17            InsVLast(&L, i);
18        }
19        else
20        {
21            count = 0;
22        }
23    }
24    address P, Prec;
25    if (T % kasus == 0)
26    {
27        Prec = Search(L, T-1);
28    }
29    else
30    {
31        Prec = Search(L, T);
32    }
33    P = First(L);
34    Long last;
35    while (P != Nil)
36    {
37        ++count;
38        if (count % kasus == 0)
39        {
40            DelAfter(&L, &P, Prec);
41            P = Next(Prec);
42        }
43        else
44        {
45            P = Next(P);
46            Prec = Next(Prec);
47        }
48    }
49    printf("%d\n", Info(Prec));
50    return 0;
51 }
```

Gambar 1.2 Potongan Program Penyelesaian Masalah Josephus (2)

Setelah dicari bentuk eksplisitnya, masalah ini dapat diselesaikan dengan kompleksitas $O(1)$ dengan memanfaatkan bentuk eksplisit dari sebuah bentuk rekursif yang dibuktikan secara induksi.

II. DASAR TEORI

Untuk menyelesaikan permasalahan ini dibutuhkan teori-teori dasar untuk menunjang penyusunan serta pembuktian rumus. Berikut dasar teori yang digunakan untuk melandasi dibuatnya makalah ini.

A. Barisan Rekursif

Barisan rekursif merupakan sebuah barisan yang dimana barisan tersebut mempunyai hubungan rekurens dengan bilangan bersuku sebelumnya. Barisan rekursif pada dasarnya memiliki basis.

Contoh bentuk barisan rekursif yang terkenal adalah barisan bilangan Fibonacci yang memiliki bentuk

$$\begin{aligned}f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\f_1 &= 1 \\f_0 &= 0\end{aligned}$$

dimana $n \geq 2$ dan n merupakan bilangan asli.

Agar fokus pembahasan tidak melebar, bahasan barisan rekursif sebatas penyelesaian, tidak untuk membahas bilangan rekursif lainnya.

B. Bentuk Eksplisit

Sebelumnya kita sudah mengetahui sebuah bentuk rekursif merupakan pendefinisian barisan dalam bentuk dirinya sendiri dalam artian U_n dituliskan dalam bentuk yang memuat suku lain. Sekarang, apabila kita menotasikan suku ke- n dalam barisan Fibonacci menjadi

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

maka persamaan tersebut merupakan bentuk eksplisit dari barisan fibonacci.

Meskipun secara kasat mata bentuk eksplisit cukup sulit untuk dikerjakan oleh manusia, tetapi apabila persamaan ini dijalankan oleh komputer, kompleksitas algoritmanya adalah $O(1)$ yang sangat jauh berbeda dengan bentuk rekursif yang kompleksitas algoritmanya adalah $O(n \log n)$.

Pada makalah ini, bentuk eksplisit merupakan acuan bentuk untuk mengonstruksi algoritma penyelesaian masalah Josephus.

C. Induksi Matematika

Di dalam makalah ini, pembuktian yang akan digunakan adalah metode induksi matematika. Induksi matematika adalah metode pembuktian untuk proposisi mengenai bilangan bulat. Induksi matematika sendiri merupakan metode yang baku di dalam dunia matematika. Dengan adanya induksi matematika, kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian yang menyatakan bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan solusi/kebenaran dengan langkah

yang terbatas.

Secara umum, jenis-jenis induksi terdiri dari:

1. Induksi matematika sederhana;
2. Induksi matematika umum;
3. Induksi matematika kuat

Pengertian dari induksi matematika sederhana adalah metode induksi yang pengaplikasiannya cukup dijalankan dengan dua langkah sederhana, yaitu: (1) Misal diberikan sebuah pernyataan $P(n)$ dimana n merupakan bilangan bulat positif, buktikan bahwa $P(1)$ benar; (2) Apabila $P(1)$ bernilai benar, asumsikan $P(k)$ benar lalu buktikan bahwa $P(k + 1)$ bernilai benar untuk semua k bilangan bulat. Pada langkah kedua, anggapan bahwa $P(k)$ benar disebut dengan *hipotesis induksi*.

Adakalanya pernyataan yang ingin kita buktikan tidak selalu berlaku untuk setiap bilangan asli n , melainkan terdapat sebuah bilangan terkecil yang menjadi batas bawah di mana pernyataan tersebut berlaku. Untuk kejadian seperti ini digunakanlah metode induksi matematika umum yang dimana nilai terkecil n agar $P(n)$ terpenuhi adalah n_0 . Tidak berbeda jauh dengan metode induksi matematika sederhana, cukup mengganti pernyataan "buktikan bahwa $P(1)$ benar" dengan pernyataan "buktikan bahwa $P(n_0)$ benar".

Pada induksi yang telah dibahas sebelumnya, hipotesis induksi hanya terdiri dari atas anggapan kebenaran sebuah pernyataan, yaitu $P(k)$. Ada jenis induksi lain, yaitu induksi kuat. Pada induksi kuat, dalam hipotesis induksi kita menganggap benar semua pernyataan

$$P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \dots, P(k)$$

yaitu semua pernyataan untuk nilai n dari batas bawah sampai dengan k , kita harus membuktikan kebenaran $P(k + 1)$.

D. Masalah Josephus

Dinamakan masalah Josephus dikarenakan masalah ini berasal dari nama Flavius Josephus, seorang sejarawan Yahudi pada abad ke-1.

Ketika perang sedang berlangsung pada saat itu, Josephus bersama empat puluh tentara lainnya terperangkap dalam sebuah gua oleh tentara-tentara Romawi. Singkatnya, mereka berniat untuk melakukan bunuh diri dengan cara sebagai berikut. Mereka berempatpuluhsatu berdiri membentuk sebuah lingkaran, mulai orang ke-1, 2, 3, dan seterusnya hingga orang ke-41. Urutan bunuh diri dimulai dari orang ke-3, 6, 9, 12, dan seterusnya, melingkar sampai dengan tersisa dua orang terakhir. Namun, Josephus dan seorang temannya diam-diam tidak setuju dengan rencana konyol ini dan ia mulai menghitung, ia harus menjadi orang keberapa agar dirinya bersama temannya tidak mendapat giliran bunuh diri. [1]

III. PEMODELAN MASALAH JOSEPHUS

Masalah Josephus ini dapat kita modelkan di kertas dengan menuliskan bilangan 1, 2, 3, dan seterusnya hingga 41 secara melingkar, kemudian dimulai dari 1 kita

melakukan perhitungan hingga hitungan kelipatan 3 kita melakukan pencoretan pada angka yang terhitung kelipatan 3. Setelah melakukan proses ini, dapat kita lihat bahwa bilangan yang tidak tercoret adalah bilangan 16 dan 31.

Putaran ke-	Deret Bilangan
1	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41
2	1 2 4 5 7 8 10 11 13 14 16 17 19 20 22 23 25 26 28 29 31 32 34 35 37 38 40 41
3	2 4 7 8 11 13 16 17 20 22 25 26 29 31 34 35 38 40
4	2 4 8 11 16 17 22 25 29 31 35 38
5	2 4 11 16 22 25 31 35
6	2 4 16 22 31 35
7	4 16 31 35

Tabel 3.1 Proses Urutan Bunuh Diri Pada Josephus Problem

Mungkin bagi orang di masa itu, proses semacam ini dianggap sebagai undian. Namun, kenyataannya tidak. Jika proses ini dimulai dengan kasus sejumlah orang tertentu, maka nomor urutan orang-orang yang selamat dapat kita tentukan dengan pasti.

Pada makalah ini akan dibahas masalah Josephus jika terdapat n orang berdiri membentuk lingkaran dan dimulai dari 2, setiap orang kedua bunuh diri. Sebagai contoh jika terdapat 13 orang, maka urutan giliran bunuh diri adalah 2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, sehingga orang yang selamat adalah orang urutan ke-11.

Kita dapat terlebih dahulu meluangkan waktu untuk mengumpulkan data untuk masalah ini, dan kita akan memperoleh data sebagai berikut.

n	Data
1	1
2	1 2
3	1 2 3
4	1 2 3 4
5	1 2 3 4 5
6	1 2 3 4 5 6
7	1 2 3 4 5 6 7
8	1 2 3 4 5 6 7 8
9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
12	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
13	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Tabel 3.2 Tabel Analisis untuk Kasus Giliran Bunuh Diri Kelipatan 2

Dari data di atas kita dapat melihat sebuah pola yang

cukup menarik, yaitu mulai dari $n = 2$, nomor orang yang selamat adalah 1, 1, 3, 1, 3, 5, 7, 1, 3, dan kita dapat menerka pola selanjutnya yaitu 5, 7, 9, 11, 13, 15, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, dan selanjutnya.

Dari sini muncul dugaan bahwa untuk n merupakan bilangan dua berpangkat, misalkan $n = 2^p$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif p , maka orang yang selamat adalah orang yang berada di urutan pertama.

Selanjutnya, dari dugaan sebelumnya muncul dugaan baru jika n adalah m lebihnya dari bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari n , yaitu $n = 2^p + m$, maka dapat kita lihat bahwa orang yang selamat adalah orang yang bernomor $2m + 1$.

Dari pola ini kita dapat menghitung orang yang selamat jika kita mulai dengan 2016 orang, misalnya. Bilangan berpangkat yang terbesar yang kurang dari 2016 adalah 1024. Oleh sebab itu, 2016 kita tuliskan sebagai

$$2016 = 2^{10} + 992$$

Jadi, dari data ini dapat ditarik kesimpulan orang yang selamat adalah orang yang bernomor

$$2 \times 992 + 1 = 1985$$

Pola di atas hanyalah pola yang merupakan terkaan kita berdasarkan data yang telah kita kumpulkan. Kini kita akan menyelesaikan masalah ini secara rekursif.

Misalkan U_n menyatakan nomor urut orang terakhir yang selamat jika kita mulai dengan n orang. Kita dapat membagi menjadi dua kasus, yaitu ketika n genap dan n ganjil.

Ketika n genap, tanpa mengurangi keumuman misalkan $n = 2k$, maka nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k} . Pada putaran pertama, semua yang bernomor genap akan melakukan bunuh diri, sehingga orang-orang yang selamat adalah orang-orang yang bernomor

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2k - 1$$

Kemudian barisan ini dapat ditulis sebagai

$$2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots, 2 \times k - 1$$

Dari sini dapat ditarik kesimpulan bawah akan ada sebanyak k orang yang selamat pada putaran pertama. Untuk putaran kedua, terjadi pergeseran urutan sebagai berikut. Urutan pertama kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan pertama, urutan kedua kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ketiga, urutan ketiga kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan kelima, dan seterusnya hingga urutan ke- k kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke- $(2k - 1)$.

Pada putaran kedua, kita melakukan proses yang sama dengan putaran pertama tetapi untuk kali ini dengan k orang yang tersisa. Orang terakhir yang selamat bernomor urut U_k , yaitu orang yang tadinya pada putaran pertama menduduki urutan ke- $(2U_k - 1)$. Karena pada putaran pertama kita telah memisalkan nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k} , maka kita memperoleh hubungan rekursif

$$U_{2k} = 2U_k - 1$$

Pandangan untuk kasus ketika n ganjil, misalkan $n = 2k + 1$, maka nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k+1} . Pada putaran pertama, semua orang bernomor genap bunuh diri. Setelah orang bernomor genap bunuh diri. Setelah orang bernomor ganjil bunuh diri, tentu diikuti dengan orang pertama bunuh diri. Jadi, orang-orang yang selamat pada putaran pertama adalah orang-orang bernomor

$$3, 5, 7, \dots, 2k + 1$$

Barisan ini bisa ditulis dengan

$$2 \times 1 + 1, 2 \times 2 + 1, 2 \times 3 + 1, \dots, 2 \times k + 1$$

Ini mengindikasikan bahwa akan ada sebanyak k orang yang selamat dari putaran pertama. Tidak jauh berbeda dengan kasus $n = 2k$, untuk putaran kedua juga terjadi pergeseran urutan sebagai berikut. Urutan pertama kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ketiga, urutan kedua kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan kelima, urutan ketiga kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ketujuh, dan seterusnya sampai dengan urutan ke- k kini ditempati oleh orang yang tadinya menduduki urutan ke- $(2k + 1)$.

Pada putaran kedua, kita melakukan lagi proses pergiliran bunuh diri tersebut, tetapi kali ini dengan k orang yang tersisa. Orang terakhir yang selamat bernomor urut U_k , yaitu orang yang tadinya pada putaran pertama menduduki urutan ke- $(2k + 1)$. Karena awalnya pada putaran sebelumnya kita telah memisalkan nomor urut orang terakhir yang selamat adalah U_{2k+1} , maka kita memperoleh hubungan rekursif

$$U_{2k+1} = 2U_k + 1$$

Sejauh ini kita telah memperoleh dua buah rumus rekursif, yaitu

$$U_{2k} = 2U_k - 1 \quad (\text{i})$$

$$U_{2k+1} = 2U_k + 1 \quad (\text{ii})$$

Relasi rekurensi ini dapat kita gunakan untuk membuktikan dugaan dari pola yang tadi telah kita peroleh, yaitu jika $n = 2^p + m$, dengan $0 \leq m < 2^p$, jelas bahwa orang yang selamat adalah orang bernomor $2m + 1$. Kita akan membuktikan pernyataan ini dengan induksi pada p . Akan dibuktikan bahwa $U_{2^p+m} = 2m + 1$ untuk $p \geq 0$ dan $0 \leq m < 2^p$.

Untuk $p = 0$, maka kita memperoleh

$$0 \leq m < 1$$

sehingga nilai m yang memenuhi hanyalah $m = 0$. Hal ini menyebabkan

$$U_{2^0+m} = U_{2^0+0}$$

$$U_{2^0+m} = U_1$$

Berdasarkan data sebelumnya, kita telah memperoleh

hasil bahwa $U_1 = 1$, yang nilainya sama dengan $2 \times 0 + 1$. Jadi, pernyataan ini benar untuk $p = 0$.

Selanjutnya kita misalkan untuk $p = k$ berlaku

$$U_{2^k+m} = 2m + 1$$

dan akan kita buktikan bahwa untuk $p = k + 1$ berlaku

$$U_{2^{k+1}} = 2m + 1$$

Untuk membuktikan hal ini, kita bagi menjadi dua kasus.

1. Kasus pertama, jika m genap, maka dapat kita tuliskan $m = 2a$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif a , dengan

$$0 \leq a \leq 2^{k-1}$$

maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} U_{2^{k+1}+m} &= U_{2 \times 2^k + 2a} \\ &= U_{2(2^k+a)} \\ &= 2U_{2^k+a} - 1 \quad (\text{i}) \\ &= 2(2a + 1) - 1 \quad (\text{hipotesis}) \\ &= 2(m + 1) - 1 \\ &= 2m + 1 \end{aligned}$$

\therefore Jadi, untuk m genap telah terbukti bahwa

$$U_{2^{k+1}+m} = 2m + 1$$

2. Kasus kedua, jika m ganjil, maka dapat kita tuliskan $m = 2a + 1$, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif a , dengan

$$0 \leq a < 2^{k-1} - \frac{1}{2}$$

maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} U_{2^{k+1}+m} &= U_{2 \times 2^k + 2a + 1} \\ &= U_{2(2^k+a)+1} \\ &= 2U_{2^k+a} + 1 \quad (\text{ii}) \\ &= 2(2a + 1) + 1 \quad (\text{hipotesis}) \\ &= 2m + 1 \end{aligned}$$

\therefore Jadi, untuk m ganjil telah terbukti bahwa

$$U_{2^{k+1}+m} = 2m + 1$$

\therefore Jadi, untuk m genap dan ganjil telah terbukti bahwa pernyataan ini benar untuk $p = k + 1$.

Mari kita nyatakan bentuk tersebut kedalam sebuah variabel n saja.

Mari kita mulai dengan proses berpikir sebagai berikut. Untuk mencari nomor urut orang yang selamat pada masalah Josephus yang dimulai dengan n orang dan setiap orang kedua bunuh diri, mula-mula kita mencari

bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari atau sama dengan n . Misalkan bilangan dua berpangkat terbesar ini adalah 2^p , sehingga $n = 2^p + m$, atau $m = n - 2^p$. Maka nomor urut orang yang selamat adalah $U_n = 2m + 1 = 2(n - 2^p) + 1 = 1 + 2n - 2^{1+p}$ (iii)

Sekarang misalkan kita akan menghitung nomor urut orang yang selamat jika kita mulai dengan 69 orang. Bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari atau sama dengan 69 orang adalah $64 = 2^6$. Kita dapat menulis bahwa $6 = \log_2 64$. Jika kita mengganti 69 dengan 64, tentu nilai logaritma tersebut akan bertambah besar, tetapi tidak akan mencapai 7, sebab $7 = \log_2 128$. Jadi dalam logaritma tadi, kita dapat mengganti 64 dengan 69 dengan bantuan fungsi *floor*, yaitu fungsi pembulatan kebawah yang definisinya digunakan pada masalah menghitung banyaknya bilangan yang bukan kelipatan k pada rentang tertentu yang terdapat pada Diktat Matematika Diskrit oleh Rinaldi Munir [2]. Dari sini bisa diperoleh

$$6 = \lfloor \log_2 69 \rfloor$$

Penjelasan serupa juga berlaku jika 69 diganti dengan sebarang bilangan asli n . Misalkan bilangan dua berpangkat terbesar yang kurang dari atau sama dengan n adalah $N = 2^p$. Kita dapat menulis bahwa $p = \log_2 N$. Jika kita mengganti N dengan n , tentu nilai logaritma tersebut akan terus bertambah menjadi semaki besar tetapi tidak akan mencapai satu lebihnya dari p . Jadi, dengan bantuan fungsi *floor* diperoleh

$$p = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

Ini berarti persamaan (iii) dapat kita tulis sebagai

$$U_n = 1 + 2n - 2^{1+\lfloor \log_2 n \rfloor}$$

sebagaimana yang diinginkan [3].

Bentuk implementasi dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int main()
4  {
5      long T;
6      cin >> T;
7      long temp = floor(log(T)/log(2));
8      cout << (1 + 2*T - pow(2,1+temp)) << endl;
9      return 0;
10 }
```

Gambar 3.1 Potongan Program Penyelesaian Masalah Josephus $O(1)$

IV. KESIMPULAN

Pada dasarnya masalah Josephus dapat diselesaikan

secara rekursif, tetapi untuk n yang sangat besar justru akan memakan waktu yang cukup lama. Mengubah menjadi bentuk eksplisit merupakan langkah yang tepat untuk menyelesaikan masalah Josephus dengan kompleksitas algoritma $O(1)$. Untuk masalah Josephus dengan perhitungan lebih dari dua penulis ingin sekali membuktikannya. Akan tetapi, dibutuhkan data dan waktu yang lebih dari ini. Penulis berharap makalah ini dapat menjadi dasar awal untuk mengubah ke bentuk yang lebih umum lagi untuk perhitungan lebih dari dua.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Tuhan yang Maha Esa atas hikmat dan waktu yang telah diberikan agar penulis dapat menyelesaikan makalah ini tepat pada waktunya. Penulis juga ingin berterima kasih kepada kedua orang tua penulis karena tanpa mereka, penulis tidak akan bisa meraih pengetahuan sampai saat ini. Tak lupa penulis juga ingin mengucapkan terima kasih kepada Ibu Harlili karena melalui pengajarannya, penulis dapat mengerti konsep Matematika Diskrit terkhusus barisan rekursif dan pembuktian menggunakan metode induksi matematika yang menjadi dasar makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Josephus_problem, diakses pada 8 Desember 2016 pukul 22.47.
- [2] Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit Revisi Keempat*. Bandung: Informatika Bandung, 2005.
- [3] Hoseana, Jonathan, *Sukses Juara Olimpiade Matematika*. Jakarta: Grasindo, 2015.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2016



Jehian Norman Saviero
13515139