

# Penerapan Fungsi Rekursi pada Droste Effect

Aries Tri Sutrisno K.A  
13515116

Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13515116@std.stei.itb.ac.id

*Rekursi sebagai sebuah metode fungsional telah digunakan dalam berbagai cabang ilmu seperti matematika dan ilmu komputer. Namun, beberapa dekade terakhir fungsi rekursi ternyata telah mengalami perluasan dalam penggunaannya terutama pada cabang ilmu lain, salah satunya adalah penggunaan fungsi rekursi pada seni rupa. Contoh penerapan fungsi rekursi pada seni rupa adalah sebuah efek grafis yang umum disebut sebagai Droste Effect. Prinsip Droste Effect pada karya seni rupa telah ada bahkan sejak abad pertengahan, tetapi istilah Droste Effect kembali populer di pertengahan abad ke-20 melalui karya Maurits Cornelis Escher. Karya yang diberi judul *Prententoonstelling* tersebut telah berkontribusi banyak dalam perkembangan Droste Effect sampai pada penggunaannya yang sangat luas saat ini.*

**Keywords:** fungsi rekursi, Droste Effect, matematika, seni rupa

## I. PENDAHULUAN

Fungsi rekursif secara primitif berarti fungsi tertentu yang didapatkan melalui beberapa proses substitusi dan rekursi berulang[1]. Fungsi rekursif biasanya digunakan ketika ingin mendefinisikan secara eksplisit suatu objek menggunakan definisi dirinya sendiri. Secara umum, fungsi rekursif memiliki dua komponen utama yaitu basis dan rekurens.

Fungsi rekursif ditemukan sekitar tahun 1934 oleh seorang ahli matematika asal Hungaria yang bernama Rosza Peter<sup>1</sup>. Teori fungsi rekursif sendiri adalah pengembangan dari penemuan *primitive recursive* yang sebelumnya telah diajukan oleh Jacques Herbrand dan didefinisikan secara lebih umum oleh Kurt Godel, yang keduanya merupakan ahli matematika pada abad ke-20.

Sejak pertama kali ditemukan, fungsi rekursif telah banyak digunakan dalam berbagai aspek, yang utama adalah pada keilmuan matematika dan ilmu komputer. Pada keilmuan komputasi, fungsi rekursif sendiri berperan penting dalam penyusunan algoritma penyelesaian

---

<sup>1</sup> Nama lahir Rosza Peter adalah Rosa Politzer. Dia mengubah namanya pada tahun 1930 seperti yang dilakukan oleh orang Hungaria pada umumnya. Hal ini berkaitan dengan publikasi ilmiah yang beliau lakukan untuk *Rekursive Funktionen* menggunakan nama Rosa Politzer sementara publikasi ilmiah lain miliknya dipublikasi menggunakan nama Rosza Peter.

beberapa masalah komputasional.

Pada bidang seni rupa, terdapat juga penerapan konsep rekursif dalam suatu efek grafis yang disebut *Droste Effect*. *Droste Effect* adalah sebuah efek dimana sebagian gambar muncul pada bagian tertentu pada gambar itu sendiri[2]. Tampilan gambar terjadi secara rekursif dimana basis dari rekurens tersebut adalah resolusi piksel terkecil yang mampu menampilkan sebagian gambar tersebut.

Istilah *Droste Effect* sendiri diambil dari sebuah merek produsen bubuk kakao *Droste*, yang pada tahun 1904 memperkenalkan kemasan produknya dengan gambar yang rekursif. Kemasan produk bubuk kakao tersebut bertahan selama berpuluh-puluh tahun dengan perubahan seperlunya, sehingga di kemudian hari konsep gambar tersebut lebih dikenal dengan nama *Droste Effect*.

*Droste Effect* sendiri diperkenalkan bahkan sebelum fungsi rekursif ditemukan pada tahun 1934. Penggunaan *Droste Effect* dalam konsep produk komersial juga telah banyak digunakan sejak efek tersebut dikenal. Bahkan, *Droste Effect* sebagai sebuah metode visual pun telah dipergunakan sejak abad pertengahan. Beberapa penggunaan *Droste Effect* yang memiliki konsep rekursif ini diantaranya adalah pembuatan boneka Matryoshka, lukisan tiga panel “Stefaneschi Triptych”, dan yang paling populer adalah litograf berjudul “Prententoonstelling”.

Tidak dapat dipungkiri bahwa litograf “Prententoonstelling” karya Maurits Cornelis Escher (1898-1972) telah mempopulerkan kembali *Droste Effect* di penghujung abad ke-20. Kemudian pada awal abad ke-21 tepatnya pada tahun 2003, beberapa ahli matematika dari Universitas Leyden yang dipimpin oleh B. de Smit dan Hendrik W. Lenstra berhasil memecahkan teka-teki struktur visual yang digunakan oleh M.C. Escher dalam pembuatan “Prententoonstelling”. Dasar struktur visual yang berhasil dituangkan dalam logika matematika itu kemudian dijadikan algoritma untuk menyempurnakan “Prententoonstelling” apabila monogram dan *signature* M.C. Escher dihilangkan dari tengah lukisan. Algoritma itulah yang kemudian membangkitkan *Droste Effect* bersama penggunaannya secara *viral* hingga saat ini. Berikut ini akan diungkapkan cara memecahkan algoritma *Droste Effect* yang didasari dari struktur visual litograf M.C. Escher “Prententoonstelling”.

## II. LANDASAN TEORI

M.C. Escher tidak semata-mata membuat “Prententoonstelling” tanpa rancangan. Escher membuat metode tersebut dengan ide awal untuk membuat tampilan ekspansi sirkular tanpa awal dan tanpa akhir. Untuk itu, Escher melakukan beberapa percobaan ekspansi sirkular dari menggunakan pengulangan garis lurus pada sudut-sudut persegi hingga menggunakan pengulangan garis lengkung pada sudut-sudut persegi. Dengan mengembangkan konsep hasil percobaannya tersebut, sketsa grafis dalam media persegi bisa dirancang sedemikian sehingga sketsa tersebut mengandung *Droste Effect* di dalamnya.

Secara matematis, menginduksi *Droste Effect* bisa dilakukan melalui beberapa tahapan[3]:

### 1. Transformation by $\log(z)$

Diumpamakan sebuah lingkaran konsentris dalam sistem koordinat Kartesius dengan diameter  $2\pi$  ditransformasi menggunakan fungsi  $f(z) = \log(z)$  sehingga dihasilkan sebuah bidang datar (persegi panjang) dengan representasi hasil transformasi dari lingkaran konsentris tersebut. Perhatikan Fig.1 dan Fig.2.

### 2. Rotation and Scaling

Persegi panjang hasil transformasi tersebut kemudian dirotasikan hingga diagonalnya berpotongan dengan sudut dari sumbu imajiner bidang datar aslinya menurut fungsi  $f(z) = zfe^{i\alpha}$  dengan  $f = \cos(\alpha)$  dan  $\alpha = \arctan(\log(r2/r1)/2\pi)$ . Perhatikan Fig.3.

### 3. Exponentiation

Bidang datar hasil *rotation and scaling* tersebut kemudian akan diekspontensi menurut fungsi  $f(z) = e^z$  sehingga sudut A dan sudut A' saling bersinggungan. Perhatikan Fig.4.

### 4. Replication

Kembali ke langkah ke-2 namun dengan menggandakan persegi panjang yang telah dirotasi seperti pada Fig.4. Setelah itu dilakukan langkah *exponentiation* sehingga didapatkan rancangan seperti pada Fig.5 dan Fig.6

Setelah melakukan perhitungan menurut tahapan-tahapan diatas, ternyata litograf M.C. Escher “Prententoonstelling” menggunakan faktor rotasi sebesar 157.6255960832 derajat searah jarum jam dan menggunakan faktor skala sebesar 22.5836845286[4].

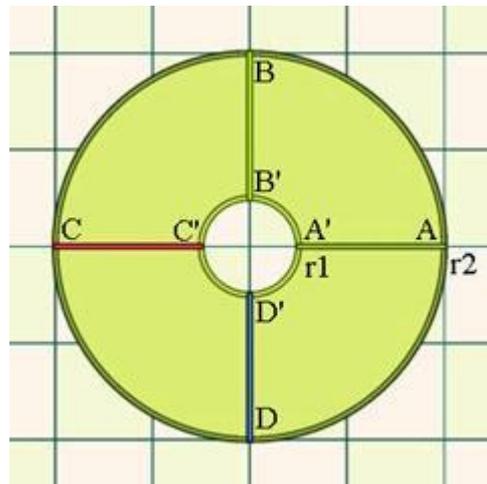


Fig.1. Contoh sebuah lingkaran konsentris.

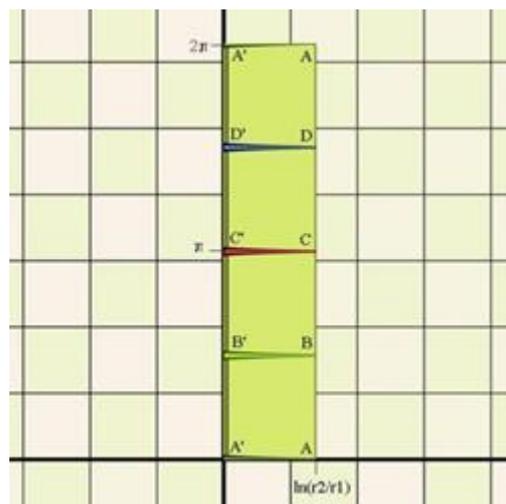


Fig.2. Hasil transformasi lingkaran oleh  $\log(z)$ .

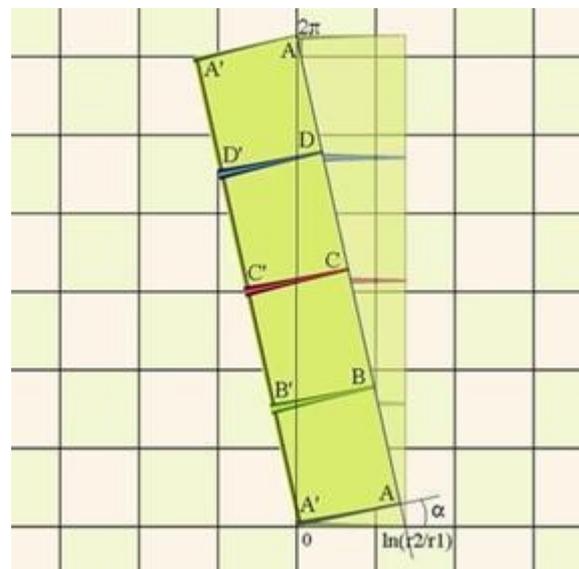


Fig.3. Hasil *rotation and scaling* dari bidang pada Fig.2.

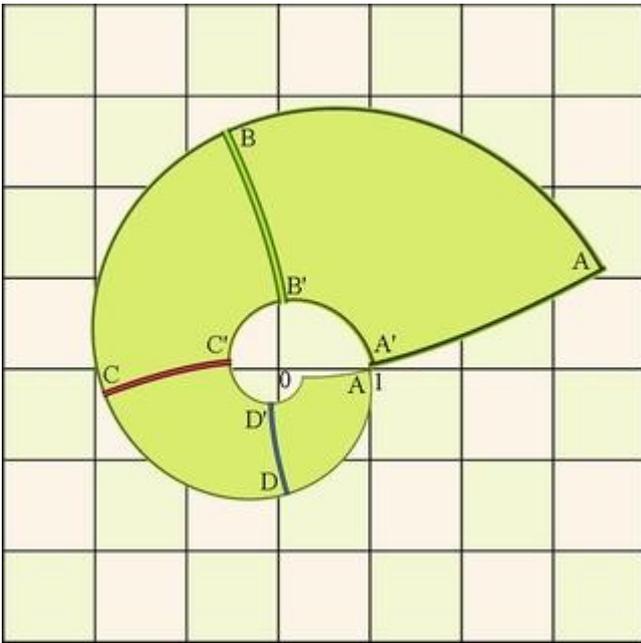


Fig.4. Hasil eksponensiasi persegi panjang pada Fig.3 menurut fungsi  $f(z) = e^z$ .

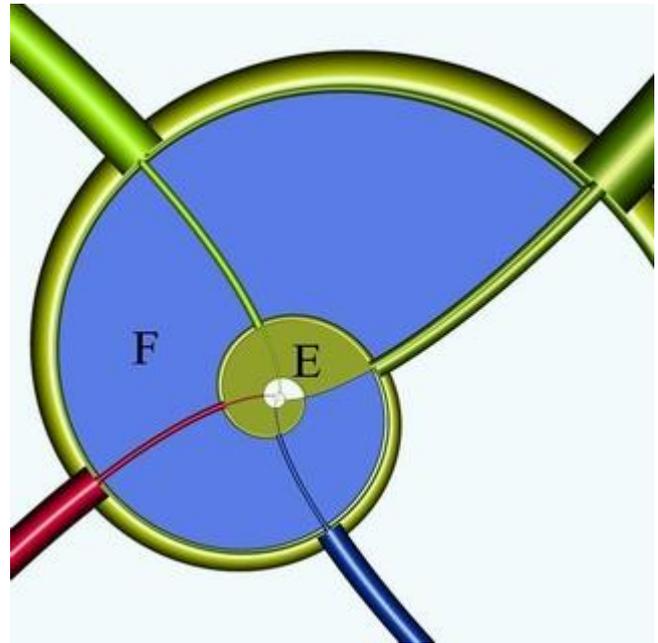


Fig.6. Sketsa hasil eksponensiasi bidang-bidang datar yang tersusun seperti pada Fig.5

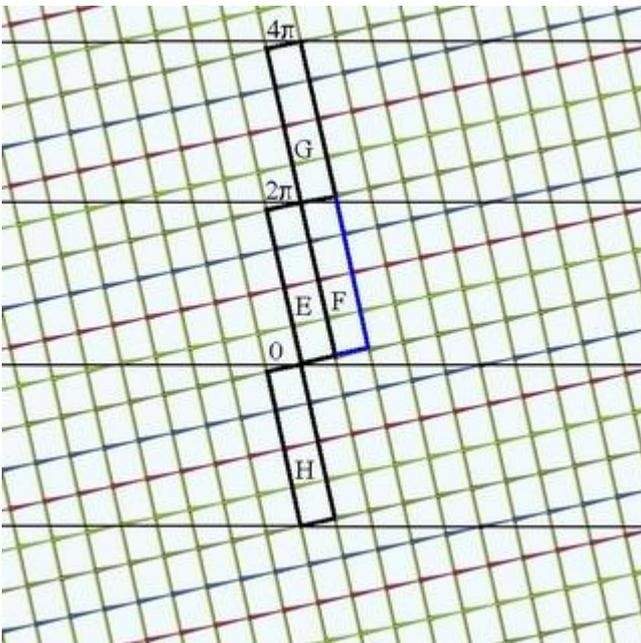


Fig.5. Hasil replikasi persegi panjang pada Fig.3.

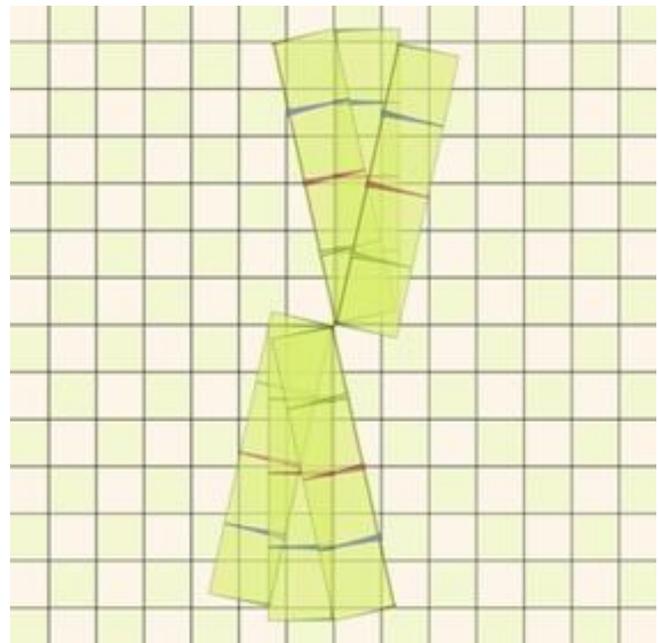


Fig.7. Beberapa opsi lain yang bisa dilakukan pada tahapan *rotation and scaling* untuk mendapatkan hasil *Droste Effect* yang bisa dimodifikasi.

### III. PEMBAHASAN

Beberapa tahapan tadi membentuk algoritma untuk memunculkan *Droste Effect* pada sebuah gambar. Hingga saat ini algoritma tersebut bahkan telah berkembang hingga mampu diimplementasikan pada aplikasi dan program *visual editor* yang dapat memunculkan *Droste Effect* pada jenis gambar apapun (tidak hanya lingkaran konsentris seperti pada contoh diatas). Salah satu implementasi algoritma tersebut adalah program grafis bernama *Ultrafractal* yang mengusung konsep fraktal yang merupakan salah satu penerapan konkret dari fungsi rekursif. Berikut adalah beberapa contoh gambar hasil penerapan algoritma diatas.



### IV. KESIMPULAN

Rekursi sebagai sebuah metode fungsional telah banyak digunakan dalam berbagai aspek, tidak hanya pada induk keilmuannya di matematika dan ilmu komputer tetapi juga pada bidang lain seperti seni rupa. *Droste Effect* adalah salah satu aplikasi fungsi rekursi tersebut. Beberapa karya seni melibatkan efek tersebut bahkan sebelum istilah *Droste Effect* itu sendiri populer seperti pada lukisan tiga-panel “Stefaneschi Triptych” oleh Giotto di Bondone (1266-1337) yang dibuat pada abad pertengahan.

*Droste Effect* mengalami perkembangan dengan dikenalkannya istilah tersebut pada 1904. Barulah pada tahun 1956 *Droste Effect* menjadi populer melalui litograf M.C. Escher “Prententoonstelling” yang kemudian struktur visualnya dituangkan dalam algoritma oleh ahli matematika dari Universitas Leyden yang dipimpin oleh B. de Smit dan Hendrik W. Lenstra. Algoritma tersebut kini mendasari program-program yang memiliki fitur *Droste Effect* yang sudah dapat digunakan secara luas.

## REFERENCES

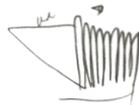
- [1] Robinson, Raphael M., *Primitive Recursive Functions*. <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183511140>, 2007.
- [2] Fischer, O., Nanny, M. *The Motivated Sign: Iconity in Language and Literature*. John Benjamins Publishing Company, 2001.
- [3] Leys, Jos. "The Mathematics Behind Droste Effect (A Logarithmic Image Transformation)," [http://www.josleys.com/article\\_show.php?id=82](http://www.josleys.com/article_show.php?id=82), 2008.
- [4] de Smit, B., Lenstra, Hendrik W. Jr., *The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery*. [www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf](http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf), 2013.
- [5] Barbour, Antony. *The Droste Effect: Fun with Recursive Algorithms*. <http://www.boredpanda.com/the-droste-effect-fun-with-recursive-algorithms/>, 2015.
- [6] O'Connor, J.J., Robertson, E.F., *Rosza Peter biography*. <http://www-groups.dcs.stand.ac.uk/~history/Biographies/Peter.html>

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016

ttd



Aries Tri Sutrisno KA  
13515116