

Penerapan Aritmatika Modulo Dalam Transposisi Modal

Adrian Hartarto Pramudita, 13515091
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13515091@std.stei.itb.ac.id

Abstrakt—Dalam musik, tangga nada dapat direpresentasikan sebagai sekumpulan bilangan. Dengan memanfaatkan aritmatika modulo, dapat diketahui transposisi dan invers dari sebuah tangga nada. Hal ini penting agar ketika seorang musisi memainkan sebuah lagu, musisi tersebut dapat memainkannya lebih fleksibel pada tangga nada yang beragam.

Keywords—Musik, Aritmatika Modulo, Transposisi, Tone Row, Modal, Integer.

I. PENDAHULUAN

Musik adalah ilmu atau seni menyusun nada atau suara dalam urutan, kombinasi, dan hubungan temporal untuk menghasilkan komposisi (suara) yang mempunyai kesatuan dan kesinambungan (<http://kbbi.web.id/musik>). Nada-nada merupakan faktor penting dalam bermusik. Nada-nada menjadi bahan untuk membentuk sebuah akord ataupun sebuah kalimat musik. Maka dari itu dalam bermusik, pemain harus bisa merasakan dan mendengarkan nada-nada yang dimainkan. Matematika mempunyai peran dalam berbagai teori musik. Pythagoras menemukan hubungan antara musik dan angka. Nada-nada juga dapat direpresentasikan sebagai bilangan sehingga bidang matematika dapat dimanfaatkan untuk memanipulasi nada.

Salah satu pengaplikasian matematika dalam teori musik yaitu transposisi dan inversi. Dengan menggunakan teori bilangan, khususnya aritmatika modulo, kita dapat mentranspos sebuah nada ataupun mencari inversi dari sebuah nada.

Berdasarkan faktor-faktor tersebut, dalam makalah ini, penulis akan membahas cara mentranspos dengan menggunakan aritmatika modulo.

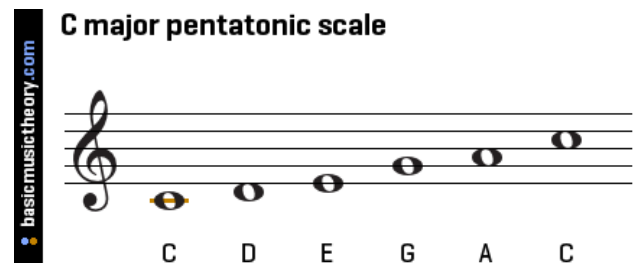
II. LANDASAN TEORI

A. Tangga nada

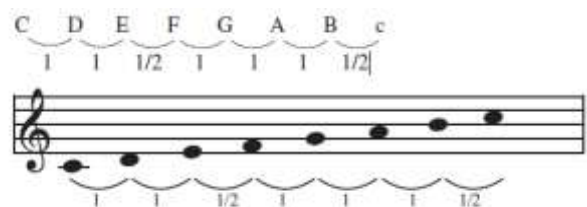
¹Tangga nada merupakan kumpulan nada-nada yang harmonis. Keharmonisan nada-nada ini didapat dari

¹ https://yoyokpm.files.wordpress.com/2008/04/teori_musik1.pdf

keraturan penyusunannya. Banyak sekali bentuk tangga nada, tetapi tangga nada yang paling umum dibagi menjadi dua jenis yaitu, tangga nada *pentatonic* dan tanggana *diatonic*. ²Tangga nada *pentatonic* adalah jenis tangga nada yang hanya memakai lima nada pokok. Tangga nada *diatonic* adalah tangga nada yang mempunyai dua jarak (interval) tangga nada, yaitu satu dan setengah. Kedua interval tersebut bias disebut Whole step (1) an Half step (1/2).



³Gambar 2.1 Contoh tangga nada pentatonic



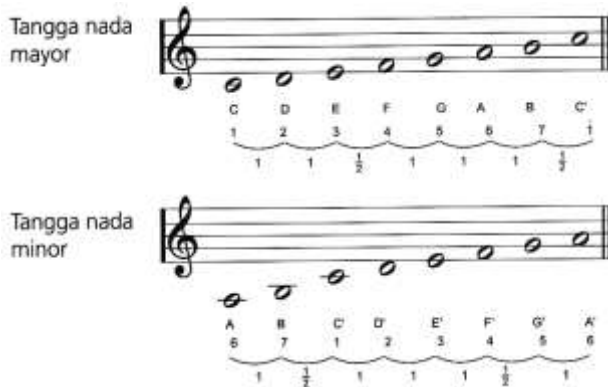
⁴Gambar 2.2 Contoh tangga nada diatonic

² <http://www.volimaniak.com/2016/11/pengertian-tangga-nada-dan-macam-macam.html>

³ https://www.google.co.id/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjg_t6NgeXQAhXMRo8KHah9A f8QjB0IBg&url=https%3A%2F%2Fwww.basicmusictheory.com%2Fmajor-pentatonic-scale&psig=AFQjCNF4HwHYtEsVH8K9vT6hK9v23wGNg&ust=1481300640417569

⁴ <http://www.volimaniak.com/2016/11/pengertian-tangga-nada-dan-macam-macam.html>

Pada dasarnya, tangga nada diatonic mempunyai 2 bentuk umum, yaitu *Mayor* dan *Minor*. Tangga nada mayor dibentuk dari 7 nada dengan interval antar nada dari bawah keatas yaitu 1-1-1/2-1-1-1-1/2. Sedangkan Tangga nada minor dibentuk dari 7 nada dengan interval antar nada yaitu 1-1/2-1-1-1/2-1-1.



⁵Gambar 2.3 Contoh tangga nada mayor dan minor.

B. Melodi

Melodi merupakan salah satu unsur utama dalam bermain musik, khususnya dalam sebuah lagu. Melodi disusun dari nada-nada yang dibuat teratur sehingga menjadi kalimat lagu. Melodi seperti ucapan kalimat dalam sebuah lagu. Contoh melodi



⁶Gambar 2.4 Melodi Burung Kakatua

B. Modal

⁷Modal atau *modes* merupakan jenis tangga nada *diatonic* yang terbentuk dalam tangga nada mayor atau minor. Modal sendiri cenderung menekankan terhadap warna atau nuansa dari sebuah tangga nada. Terdapat 7

⁵ https://2.bp.blogspot.com/-gUdK5F2nd5E/VzIpb0MfuNI/AAAAAAAAACKs/LsGAp3H09P4SRiZcqwX4_QOUyhTUrwCLcB/s1600/Tangga%2BNada%2BMayor%2Bdan%2BMinor.jpg

⁶ http://lh3.ggpht.com/daviddeba74/SJE06h4ngvI/AAAAAAAAANE/QZuySrEvnHg/BurungKakatua_thumb4.jpg

⁷ <http://eprints.uny.ac.id/17689/1/Doni%20Darmawan%2006208244018.pdf>

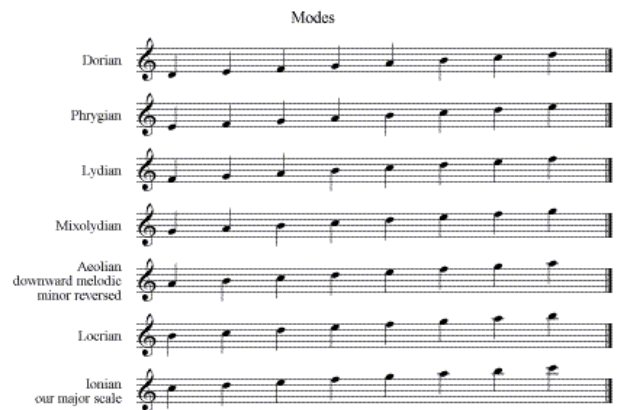
jenis modal yang memiliki ciri khas masing-masing. Ketujuh modal tersebut, yaitu :

1. Ionian (WWHWWWH)
2. Dorian (WHWWWHW)
3. Phrygian (HWWWHWW)
4. Lydian (WWHWWWH)
5. Mixolydian (WWHWWHW)
6. Aeolian (WHWWHWW)
7. Locrian (HWWHWW)

Modal diatas biasa disebut dengan modal scale. Tiap modal memiliki interval yang berbeda-beda.

Mode	Scale	Interval Formula	Description
Mode 1	Ionian	WWHWWWH	Ionian is the major scale.
Mode 2	Dorian	WHWWWHW	Dorian is a minor scale with a raised sixth note.
Mode 3	Phrygian	HWWWHWW	Phrygian is a minor scale with a lowered second note.
Mode 4	Lydian	WWHWWWH	Lydian is a major scale with a raised fourth note.
Mode 5	Mixolydian	WWHWWHW	Mixolydian is a major scale with a lowered seventh note.
Mode 6	Aeolian	WHWWHWW	Aeolian is the minor scale.
Mode 7	Locrian	HWWHWW	Locrian is a minor scale with lowered second and fifth notes.

⁸Gambar 2.5 karakteristik dan intervalnya.



⁹Gambar 2.6 Notasi not balok ketujuh modal.

Modal biasanya digunakan untuk berimprovisasi dalam sebuah lagu. Melodi dapat tercipta juga dari susunan tangga nada modal.

C. Himpunan dan Fungsi

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang anggotanya tidak ada yang sama. Misalkan himpunan X berisi tiga buah bilangan asli pertama. Maka X dapat ditulis sebagai $X = \{1, 2, 3\}$.

Misalkan A dan B adalah himpunan. Relasi biner f dari

⁸ https://www.google.co.id/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKewjg8tishuXQAUMwI8KHyrHBvYQjB0IBg&url=http%3A%2F%2Fwww.mandolincafe.com%2Fforum%2Farchive%2Findex.php%2Ft-123627.html&psig=AFQjCNFEEUzZkJKyW5ueKR5f65Kq_aGOnA&ust=1481301668707437

⁹ <http://www.dolmetsch.com/modes.gif>

A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. (Rinaldi 2003:III-18). Notasi fungsi dapat ditulis sebagai $f : A \rightarrow B$, dimana f memetakan A ke B. A merupakan daerah asal (domain) dari f dan B merupakan daerah hasil (codomain) dari f . Himpunan yang berisi nilai pemetaan f disebut sebagai jelajah (range) dari f . Dengan kata lain fungsi adalah pemetaan.

D. Aritmatika Modulo

Aritmatika modulo merupakan pembagian bilangan bulat yang menghasilkan sisa dari hasil pembagian tersebut. Operator yang digunakan dalam operasi ini adalah **mod**. Definisi dari operator mod dinyatakan sebagai berikut :

Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0 . Operasi $a \bmod m$ (dibaca "a modulo m") memberikan sisa jika a dibagi dengan m . Dengan kata lain, $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$. (sumber : Rinaldi (2003:V-13))

Jika diperhatikan, sisa pembagian dari bilangan bulat selalu bernilai "lebih besar sama dengan" nol. Mengapa? Coba perhatikan contoh berikut:

- a) $8 \bmod 3 = 2 \rightarrow 8 = 3 \cdot 2 + 2$
- b) $-8 \bmod 3 = 1 \rightarrow 8 = (-3) \cdot 3 + 1$

Untuk a negatif, pembagian dilakukan terhadap $|a|$. Karenanya $a \bmod m = m - r$ (r merupakan sisa dari $|a| \bmod m$). Hal ini berlaku bila $r \neq 0$. Sehingga untuk persamaan (b) dapat dilakukan cara perhitungan tersebut. $|-8| \bmod 3 = 2$, $-8 \bmod 3 = 3 - 2 = 1$.

Ketika terdapat 2 buah bilangan a dan b , mungkin saja sisa hasil pembagian bilangan a dan b mempunyai nilai yang sama. Dalam hal ini, dapat dikatakan bahwa a dan b kongruen dalam modulo m . notasi kongruensi dilambangkan sebagai : $a \equiv b \pmod m$. Sifat ini berlaku bila m dapat membagi habis $a-b$. Contoh:

- a) $10 \equiv 5 \pmod 5$
- b) $12 \equiv 2 \pmod 5$
- c) $12 \equiv 2 \pmod 7$

Kekongruenan dapat ditulis dalam notasi lain, yaitu

$$a = b + km.$$

Dengan demikian kita dapat menuliskan $a \bmod m = r$ menjadi $a \equiv r \pmod m$.

Aritmatika modulo juga memiliki sifat-sifat pengerjaan perhitungan, khususnya pada operasi perkalian dan

penjumlahan.

Jika $a \equiv b \pmod m$. Untuk c merupakan sembarang bilangan bulat > 0 , maka

- a) $(a+c) \equiv (b+c) \pmod m$
- b) $ac \equiv bc \pmod m$
- c) $a^c \equiv b^c \pmod m$

Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$, maka

- a) $(a+c) \equiv (b+d) \pmod m$
- b) $ac \equiv bd \pmod m$

(sumber : Rinaldi(2003:V-15))

Jika $a \equiv b \pmod m$. Untuk c merupakan sembarang bilangan bulat > 0 , maka

- a) $(a+c) \equiv (b+c) \pmod m$
- b) $ac \equiv bc \pmod m$
- c) $a^c \equiv b^c \pmod m$

Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$, maka

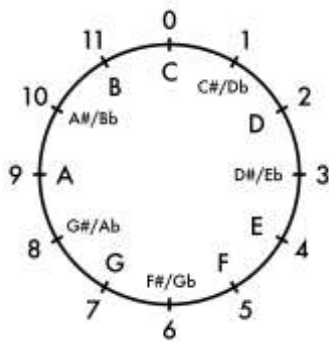
- a) $(a+c) \equiv (b+d) \pmod m$
- b) $ac \equiv bd \pmod m$

III. INTEGER MODEL OF PITCH

Dalam musik ada 12 macam nada. Untuk itu ke-12 macam nada ini diubah ke dalam bilangan bulat dimana bilangan tersebut ≥ 0 dan < 12 . Nada tersebut diubah agar dapat diterapkan aritmatika modulo. Hal ini disebut dengan *integer model of pitch*. Berikut *integer model of pitch*:

Nada	Bilangan Bulat
C	0
C#/Db	1
D	2
D#/Eb	3
E	4
F	5
F#/Gb	6
G	7
G#/Ab	8
A	9
A#/Bb	10
B	11

Tabel 3.1 Konversi nada Pada Bilangan Bulat



¹⁰Gambar 3.2 Integer Model of Pitch (Musical Clock)

Dengan menggunakan teori diatas, maka kita dapat mengubah tangga nada maupun akord kedalam bilangan bulat. Berikut konversi modal menjadi bilangan bulat.

Modal	Nada	Bilangan Bulat
C Ionian	C D E F G A B	0 2 4 5 7 9 11
C Dorian	C D D# F G A A#	0 2 3 5 7 9 10
C Phrygian	C C# D# F G G# A#	0 1 3 5 7 8 10
C Lydian	C D E F# G A B	0 2 4 6 7 9 11
C Mixolydian	C D E F G A A#	0 2 4 5 7 9 10
C Aeolian	C D D# F G G# A#	0 2 3 5 7 8 10
C Locrian	C C# D# F F# G# A#	0 1 3 5 6 8 10

Tabel 3.3 Konversi modal ke bilangan

A. Transposisi pada modal

Transposisi adalah mengubah nada dari satu nada ke nada yang lain. Secara matematika, transposisi dapat didefinisikan sebagai fungsi modulo dengan notasi berikut

$$T_n : Z_{12} \rightarrow Z_{12}$$

$$T_n(x) = x + n \pmod{12}.$$

(Sumber: <http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/musictotal.pdf>)

Dalam rumusan diatas, terdapat n yang merupakan bilangan bulat ≥ 0 dan < 12 . X adalah bilangan untuk nada. Untuk fungsi transposisi dapat diaplikasikan untuk setiap nada dengan penjabaran sebagai berikut:

$$T_0(x) = x + 0 \pmod{12}.$$

$$T_1(x) = x + 1 \pmod{12}.$$

$$T_2(x) = x + 2 \pmod{12}.$$

$$T_3(x) = x + 3 \pmod{12}.$$

$$T_4(x) = x + 4 \pmod{12}.$$

$$T_5(x) = x + 5 \pmod{12}.$$

$$T_6(x) = x + 6 \pmod{12}.$$

$$T_7(x) = x + 7 \pmod{12}.$$

$$T_8(x) = x + 8 \pmod{12}.$$

$$T_9(x) = x + 9 \pmod{12}.$$

$$T_{10}(x) = x + 10 \pmod{12}.$$

$$T_{11}(x) = x + 11 \pmod{12}.$$

Pada modal, transposisi dapat dilakukan dengan cara mentranspos tiap nada yang merupakan tangga nada dari suatu modal. Berikut contoh transposisi modal dengan nada dasar C.

1) Nada Dasar C(0) ke D(2), maka $n = D - C = 2$

D Ionian

$$T_1(0) = 0 + 2 \pmod{12} = 2$$

$$T_1(2) = 2 + 2 \pmod{12} = 4$$

$$T_1(4) = 4 + 2 \pmod{12} = 6$$

$$T_1(5) = 5 + 2 \pmod{12} = 7$$

$$T_1(7) = 7 + 2 \pmod{12} = 9$$

$$T_1(9) = 9 + 2 \pmod{12} = 11$$

$$T_1(11) = 11 + 2 \pmod{12} = 1$$

$$D \text{ Ionian} = \{2,4,6,7,9,11,1\}$$

D Dorian

$$T_1(0) = 0 + 2 \pmod{12} = 2$$

$$T_1(2) = 2 + 2 \pmod{12} = 4$$

$$T_1(3) = 3 + 2 \pmod{12} = 5$$

$$T_1(5) = 5 + 2 \pmod{12} = 7$$

$$T_1(7) = 7 + 2 \pmod{12} = 9$$

$$T_1(9) = 9 + 2 \pmod{12} = 11$$

$$T_1(10) = 10 + 2 \pmod{12} = 0$$

$$D \text{ Dorian} = \{2,4,5,7,9,11,0\}$$

D Phrygian

$$T_1(0) = 0 + 2 \pmod{12} = 2$$

$$T_1(1) = 1 + 2 \pmod{12} = 3$$

$$T_1(3) = 3 + 2 \pmod{12} = 5$$

$$T_1(5) = 5 + 2 \pmod{12} = 7$$

$$T_1(7) = 7 + 2 \pmod{12} = 9$$

$$T_1(8) = 8 + 2 \pmod{12} = 10$$

$$T_1(10) = 10 + 2 \pmod{12} = 0$$

$$D \text{ Phrygian} = \{2,3,5,7,9,10,0\}$$

D Lydian

$$T_1(0) = 0 + 2 \pmod{12} = 2$$

$$T_1(2) = 2 + 2 \pmod{12} = 4$$

$$T_1(4) = 4 + 2 \pmod{12} = 6$$

$$T_1(6) = 6 + 2 \pmod{12} = 8$$

$$T_1(7) = 7 + 2 \pmod{12} = 9$$

$$T_1(9) = 9 + 2 \pmod{12} = 11$$

$$T_1(11) = 11 + 2 \pmod{12} = 1$$

$$D \text{ Lydian} = \{2,4,6,8,9,11,1\}$$

D Mixolydian

$$T_1(0) = 0 + 2 \pmod{12} = 2$$

$$T_1(2) = 2 + 2 \pmod{12} = 4$$

$$T_1(4) = 4 + 2 \pmod{12} = 6$$

$$T_1(5) = 5 + 2 \pmod{12} = 7$$

$$T_1(7) = 7 + 2 \pmod{12} = 9$$

$$T_1(9) = 9 + 2 \pmod{12} = 11$$

¹⁰ <https://davidkulma-public.sharepoint.com/SiteAssets/musictheory/integers/Integer%20Circle.001.png>

$$T_1(10) = 10 + 2 \bmod 12 = 0$$

$$D \text{ Mixolydian} = \{2,4,6,7,9,11,0\}$$

D Aeolian

$$T_1(0) = 0 + 2 \bmod 12 = 2$$

$$T_1(2) = 2 + 2 \bmod 12 = 4$$

$$T_1(3) = 3 + 2 \bmod 12 = 5$$

$$T_1(5) = 5 + 2 \bmod 12 = 7$$

$$T_1(7) = 7 + 2 \bmod 12 = 9$$

$$T_1(8) = 8 + 2 \bmod 12 = 10$$

$$T_1(10) = 10 + 2 \bmod 12 = 0$$

$$D \text{ Aeolian} = \{2,4,5,7,9,10,0\}$$

D Locrian

$$T_1(0) = 0 + 2 \bmod 12 = 2$$

$$T_1(1) = 1 + 2 \bmod 12 = 3$$

$$T_1(3) = 3 + 2 \bmod 12 = 5$$

$$T_1(5) = 5 + 2 \bmod 12 = 7$$

$$T_1(6) = 6 + 2 \bmod 12 = 8$$

$$T_1(8) = 8 + 2 \bmod 12 = 10$$

$$T_1(10) = 10 + 2 \bmod 12 = 0$$

$$D \text{ Locrian} = \{2,3,5,7,8,10,0\}$$

IV. SIMPULAN

Agar dalam bermain musik dapat lebih fleksible, maka pemusik harus dapat mengetahui transposisi dari sebuah nada. Berdasarkan pembahasan diatas, matematika cukup berperan dalam membantu pemusik untuk menentukan transposisi dari sebuah nada. Dengan menggunakan fungsi transposisi yaitu $T_n(x) = x + n \bmod 12$, dapat diketahui transposisi dari berbagai macam nada.

V. UCAPAN TERIMAKASIH

Pertama-tama, penulis berterimakasih dan bersyukur kepada Tuhan yang Maha Esa atas berkat-Nya, penulis dapat menyelesaikan makalah ini. Penulis berterimakasih juga kepada Ibu Harlili, sebagai dosen Matematika Diskrit yang telah mengajarkan teori dasar fungsi, himpunan dan aritmatika modulo. Penulis juga berterimakasih kepada teman-teman di ITBJazz yang telah mendukung dan memberikan saran untuk menuliskan makalh bertema hubungan matematika dengan musik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] <http://www.faktailmiah.com/2010/10/03/matematika-dan-musik.html> -- diakses pada 8 Desember 2016
- [2] https://yoyokpm.files.wordpress.com/2008/04/teori_musik1.pdf -- diakses pada 8 Desember 2016
- [3] <http://www.robertnowlan.com/pdfs/Pythagoras.pdf> -- diakses pada 8 Desember 2016
- [4] <http://www.volimaniak.com/2016/11/pengertian-tangga-nada-dan-macam-macam.html> -- diakses pada 8 Desember 2016
- [5] <http://eprints.uny.ac.id/17689/1/Doni%20Darmawan%2006208244018.pdf> -- diakses pada 8 Desember 2016
- [6] <http://www.wmich.edu/mus-gened/mus170/RockElements.pdf> -- diakses pada 8 Desember 2016
- [7] <http://www.robertnowlan.com/pdfs/Pythagoras.pdf> -- diakses pada 8 Desember 2016
- [8] Fiore, Thomas. *Music and Mathematic*. fioreth@umich.edu < <http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/musictotal.pdf> > diakses pada 8 Desember 2016
- [9] Harnum, Jonathan. 2001. *Basic Music Theory: how to read, write and understand written music 1st edition*. Anchorage : Sol-Ut Press.
- [10] Indy, Agatha. *Penerapan Matematika pada fungsi transposisi akord dan nada*. agatha.indy@yahoo.com < <http://www.slideshare.net/agathaindy/penerapan-matematika-pada-fungsi-transposisi-akord-dan-nada-by-agatha-indy-c-d> > diakses pada 8 Desember 2016
- [11] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit*. Bandung : Penerbit Informatika

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016



Adrian Hartarto Pramudita
13515091