Keterkaitan Bilangan Fibonacci pada Tangga Nada C Mayor Interval Satu Oktaf

Stevanno Hero Leadervand and 13515082[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*13515082@std.stei.itb.ac.id*

***Abstrak*—Ilmu matematika sudah menjadi bagian penting dalam kehidupan manusia. Matematika bisa kita temui dibanyak aspek, bahkan pada hal yang tidak kita sadari seperti pada musik. Musik yang kita dengarkan sehari-hari menggunakan nada-nada yang disusun agar terdengar harmonis. Maka, diciptakannya akord, salah satunya akord mayor. Tangga nada mayor dan matematika ternyata memiliki hubungan yaitu tangga nada mayor memiliki pola bilangan Fibonacci di dalamnya jika dilihat dari komposisi tuts dan penomoran tuts..**

***Kata kunci*—mayor, fibonacci, skala, tangga nada.**

I. PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu atau elemen yang sangat penting dan berperan besar bagi kehidupan manusia. Setiap detil kehidupan manusia pasti ada hubungannya dengan matematika. Begitu juga, musik yang telah ada sejak dahulu kala. Musik telah berkembang sangat pesat dan sekarang banyak sekali instrumen-instrumen yang bisa dimainkan untuk mengiringi suatu alunan musik.

Banyak orang tidak menyangka adanya korelasi atau keterkaitan antara musik dan matematika karena banyak orang berpikir dua hal itu sangat berbeda latar belakang yaitu sains dan seni. Tetapi nyatanya pada musik pun terkandung ilmu-ilmu matematika karena sejatinya musik adalah hal yang berhubungan dengan pola untuk menciptakan keharmonisan dan keselarasan nada.

Salah satu objek matematika yang mempunyai keterkaitan dengan musik yaitu bilangan Fibonacci, yang sudah dirumuskan sejak tahun 1200an. Bilangan Fibonacci yang memiliki rumus khas ini dapat kita temukan kesamaannya pada tangga nada mayor untuk salah satu instrumen musik yaitu piano. Alat yang mempunyai tuts hitam dan putih sudah terkenal dengan keluaran nadanya yang indah. Jika kita perhatikan pada interval satu oktaf, bilangan-bilangan Fibonacci ini akan terlihat jelas dan akan dijelaskan pada bab selanjutnya. Dengan memanfaatkan bilangan Fibonacci, mempelajari akord akan lebih mudah dan bisa menambah pengetahuan lebih detil tentang musik dan isinya.

II. TEORI DASAR

A. Barisan Fibonacci

Barisan Fibonacci pertama ditulis pada buku *"Liber Abaci"* oleh Leonardo Fibonacci pada sekitar abab ke-12. Barisan Fibonacci adalah adalah barisan dengan suku yang merupakan penjumlahan dari dua suku sebelumnya berdasar pada aturan:

$$f(n)\begin{cases}0, & n=0\\ 1, & n=1\\ f(n-1)+f(n-2), & n>2\end{cases}$$

Barisan Fibonacci dimulai dari basis angka 0 dan 1, lalu dilanjutkan dengan aturan rekursif $f_{n-1}+f_{n-2}$. Dengan mengikuti aturan diatas, maka bisa didapatkan barisan Fibonacci dibawah ini:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…

Contohnya untuk bilangan suku kelima yaitu 3 didapatkan dengan cara menjumlahkan dua bilangan sebelumya yaitu 1 dan 2. Begitu juga, dengan 5 adalah hasil penjumlahan 2 dan 3. Angka ini nantinya akan mempunyai rasio istimewa yaitu raiso emas jika suku n dibandingkan dengan satu suku sebelumnya. Dirumuskan dengan $\frac{f_{n+1}}{fn}$.

Barisan Fibonacci berbeda dari deret Fibonacci. Deret Fibonacci adalah deret dengan setiap suku mempunyai rasio bilangan barisan Fibonacci. Dijelaskan pada tabel di bawah ini:

f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabel 2.1. Barisan f(n) Fibonacci

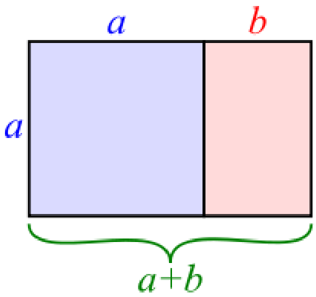
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
1	2	4	7	12	20	33	54	88	144

Tabel 2.2. Deret F(n) Fibonacci

Rasio untuk setiap dua bilangan yang berurutan pada barisan Fibonacci adalah berkisar pada phi(φ) yaitu mendekati 1.618033989… atau bisa juga dituliskan dengan tutsasi:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948\ \ldots$$

Rasio diatas berdasar pada teori rasio emas (golden ratio) yaitu rasio antara jumlah kedua bilangan terhadap bilangan yang besar adalah sama dengan rasio bilangan besar terhadap bilangan yang lebih kecil, seperti dijelaskan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.1. Ilustrasi rasio emas (golden ratio) pada persegi panjang
Sumber: https://upload.wikimedia.org
(diakses tanggal 8 Desember 2016)

Dapat dilihat pada gambar 2.1. bahwa persegi panjang memiliki sisi yang rasionya merupakan rasio emas sesuai dengan persamaan dibawah ini:

$$\frac{a+b}{b} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Hal ini menunjukkan juga bahwa:

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

Dapat dilihat bahwa persamaan diatas merupakan persamaan kuadrat dan bisa diselesaikan untuk mencari solusi φ dengan mengalikan kedua ruas dengan φ dan akan didapatkan:

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

Atau bisa dituliskan dengan:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Dengan menggunakan rumus $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, maka didapatkan nilai φ yaitu:

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948\ \ldots$$

Barisan Fibonacci adalah barisan yang menggunakan prinsip rasio emas. Untuk menghitung suku pada barisan Fibonacci dapat digunakan rumus binet. Barisan Fibonacci dengan $f_1 = 0$ dan $f_2 = 1$ dengan asumsi setiap suku pada barisan Fibonacci dapat dirumuskan dengan ar^n dapat dituliskan seperti dibawah ini:

$$f_{\mathrm{n}} = f_{\mathrm{n-1}} + f_{\mathrm{n-2}}$$

$$ar^n = ar^{n-1} + ar^{n-2}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan ar^{n-2}, maka didapatkan persamaan karakteristik berikut:

$$r^2 - r - 1 = 0$$

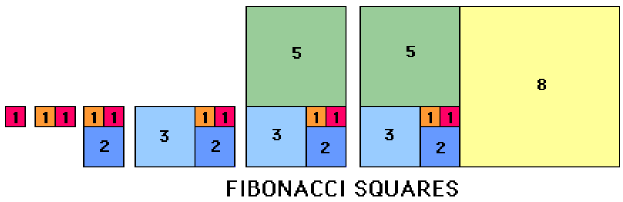
Maka didapatkan r sesuai dengan rasio emas yaitu:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dengan membandingkan kedua suku pada bilangan Fibonacci, maka:

$$x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Dengan n > 1 dan dilakukan secara iteratif, maka akan didapatkan nilai x yaitu 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, dst.



Gambar 2.2. Ilustrasi Barisan Fibonacci
Sumber:
http://mathforum.org/dr.math/faq/fibonacci.squares1.gif
(Diakses tanggal 8 Desember 2016)

Pada bahasa C, fungsi fibonacci bisa dituliskan sebagai berikut:

```
int fibonacci (int x)
{
    int hasil;

    if ((x == 0) || (x == 1))
    {
        hasil = 1;
    }
    else if
    {
        hasil = fibonacci(x-1) + fibonacci(x-2);
    }
    return hasil;
}
```

Gambar 2.3. Fungsi Menghitung Barisan Fibonacci pada bahasa C
Sumber: milik pribadi

B. Piano

Piano adalah instrumen musik yang cukup populer di semua kalangan. Piano sudah ada sejak abad ke-16. Orang yang memainkan piano disebut pianis.

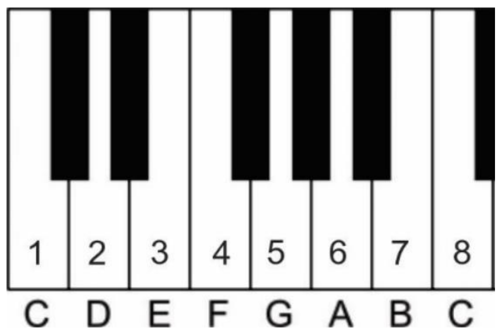
Gambar 2.4. *Grand Piano*
Sumber: http://www.pianoreport.com/
(diakses tanggal 8 Desember 2016)

Gambar 2.5. Keyboard dengan 88 tuts
Sumber: http://thehub.musiciansfriend.com/
(diakses tanggal 8 Desember 2016)

1. Teori Dasar
   1) Tuts/Not/Nada
      Tuts adalah tombol yang terdapat pada piano, piano memiliki dua jenis tuts (*keys*) yaitu tuts putih dan tuts hitam, jarak antar tuts berurutan yaitu ½ atau 1. Pada tangga nada mayor jarak antar nada dasar sampai nada oktafnya yaitu 1 1 ½ 1 1 1 ½ (C D E F G C) yang akan dijelaskan pada bagian tangga nada.
      Jumlah tuts pada sebuah piano berbeda-beda berdasarkan jenis piano. Piano standar memiliki 88 tuts.
   2) Akord
      Akord adalah kombinasi dari tiga atau lebih nada dengan tinggi berbeda yang ditekan bersamaan yang menghasilkan harmoni. Akord mayor mempunyai selisih not 2:1 ½ pada selangnya. Contoh, akord C (C – E – G), jarak C ke adalah 2, jarak E ke G adalah 1 ½.
   3) Harmoni
      Harmoni adalah peristiwa saat dua atau lebih nada dengan tinggi berbeda dibunyikan bersamaan, harmoni juga dapat terjadi bila nada-nada dibunyikan berurutan atau disebut *arpeggio*. Harmoni dihasilkan dari akord.
   4) Tangga Nada
      Tangga nada merupakan susunan nada berurutan dari nada-nada suatu sistem nada, dimulai dari satu nada dasar dilanjutkan sampai dengan nada oktafnya, misalnya do, re, mi, fa, so, la, si, do.

2. Klasifikasi Tangga Nada
   Pada musik dikenal dua tangga nada berdasarkan suasananya yaitu:
   1) Tangga nada mayor
      Tangga nada mayor adalah tangga nada yang memiliki skala diatonis. Tangga nada yang memiliki karakteristik riang gembira, membuat semangat, mempunyai interval antar not yaitu 1 1 ½ 1 1 1 ½. Contoh tangga nada mayor yaitu C mayor yang terdiri dari C D E F G A B C’.
   2) Tangga nada minor
      Tangga nada minor juga tangga nada yang menggunakan skala diatonis. Tangga nada minor memiliki karakteristik sedih atau suram dan mempunyai interval not yaitu 1 ½ 1 1 ½ 1 1. Contoh tangga nada minor yaitu A B C D E F G A’.

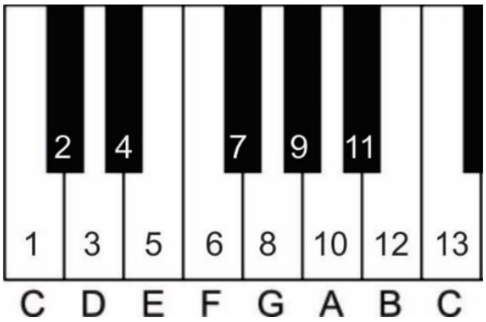
3. Skala pada Musik
   Skala yang dimaksud adalah cara pandang jarak suatu nada ke nada yang lainnya untuk dimainkan. Pada musik khususnya instrumen piano, dikenal banyak skala, tetapi skala yang akan dijelaskan berikut berdasarkan jarak antar nada pada satu oktaf penuh:
   1) Skala Diatonis



Gambar 2.6. Skala Diatonis pada Tuts Piano Interval Satu Oktaf
Sumber: milik pribadi

Skala diatonis adalah skala yang yang tidak memperhatikan tuts hitam. Skala diatonis terdiri dari 7 not dalam satu oktaf. Tuts-tuts putih pada skala diatonis menunjukkan tangga nada C mayor.

2) Skala Kromatis



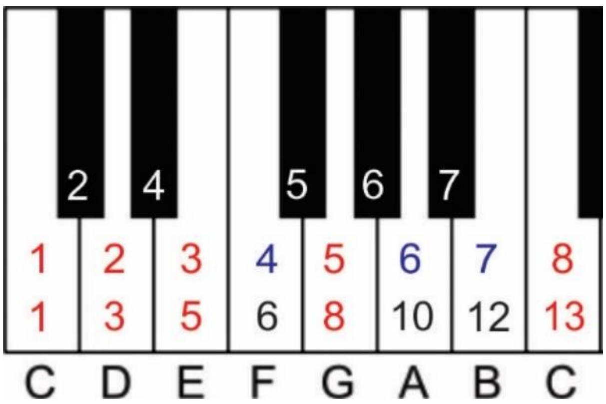
Gambar 2.7. Skala Kromatis pada Tuts Piano Interval Satu Oktaf
Sumber: milik pribadi

Skala diatonis adalah skala yang yang memperhatikan tuts hitam atau dengan kata lain, setiap not berjarak ½ dengan nada setelahnya. Skala kromatis terdiri dari 12 not dalam satu oktaf. Not yang mempunyai selisih ½ dari not sebelumnya disebut #. Jadi notasi nada pada skala kromatis dapat dituliskan sebagai berikut:

A A# B C C# D D# E F G

III. KETERKAITAN BILANGAN FIBONACCI DENGAN TANGGA NADA KUNCI C MAYOR

Tanpa disadari, musik mempunyai hubungan dengan dunia matematika. Pada interval satu oktaf (termasuk ditambah nada oktafnya) pada tuts piano, terdapat pola bilangan Fibonacci yang diilustrasikan pada gambar di bawah dibawah ini:

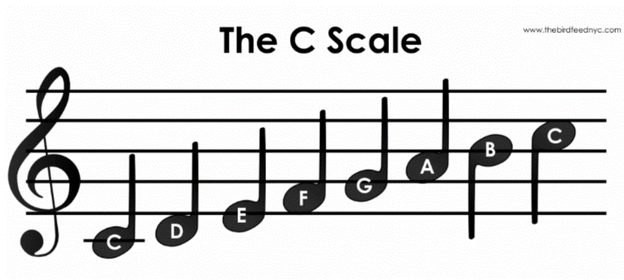


Gambar 3.1. Ilustrasi Bilangan Fibonacci pada Interval Satu Oktaf Piano Kunci Mayor
Sumber: milik pribadi

Terdapat tiga baris bilangan pada gambar 3.1. yaitu: barisan pertama 2, 4, 5, 6, 7; barisan kedua 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; barisan ketiga 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13. Barisan pertama dan barisan ketiga jika digabungkan akan menjadi tangga nada skala kromatis, yaitu tangga nada dengan interval ½ untuk setiap not pada piano. Barisan kedua pada gambar 3.1. merupakan tangga nada skala diatonis yang tidak melihat tuts hitam sehingga proses penomoran urut pada tuts putih.

Jika diambil akord C Mayor penuh yaitu, C E G C, maka akan terlihat pola Fibonacci yaitu:

1. Pada not C, barisan kedua dan barisan ketiga membentuk barisan Fibonacci yaitu suku kedua (1) dan ketiga (1) dengan aturan suku pertama adalah 0. Hal ini sama seperti perbandingan f_n 1/1 menurut rumus x_n dengan (n = 2) yang ditelah dijelaskan pada bab II.
2. Pada not D, barisan kedua dan barisan ketiga membentuk barisan Fibonacci yaitu suku ketiga (2) dan suku keempat (3). Pada tuts ini, D tidak termasuk dalam kunci mayor C, tetapi pada D, terdapat pula pola Fibonacci.
3. Pada not E, barisan kedua dan barisan ketiga membentuk barisan Fibonacci yaitu suku keempat (3) dan suku kelima (5).
4. Pada not G, barisan kedua dan barisan ketiga membentuk barisan Fibonacci yaitu suku kelima (5) dan suku keenam (8).
5. Pada not C' (C yang lebih tinggi yaitu pada oktaf baru), barisan kedua dan barisan ketiga membentuk barisan Fibonacci yaitu suku keenam (8) dan suku ketiga (13).



Gambar 2.6. Tangga Nada C Mayor pada Kunci G di Garis Paranada
Sumber: http://thebirdfeednyc.com/
(diakses tanggal 9 Desember 2016)

Pola ini bersifat repetitif, jika kita ambil akord C mayor sederhana yaitu tuts 1, 3, 5 pada skala diatonis atau bisa dijuga disebut (C, E, G) sudah jelas didapatkan bilangan Fibonacci yaitu 1:3:5. Lalu, jika mengambil akord D mayor dengan mengambil tiga tuts pada skala kromatis 3, 5, 10 atau bisa juga disebut (D, F#, A). Maka, juga akan didapatkan bilangan Fibonacci jika indeks 1 pada skala kromatis C digeser ke D, karena sejatinya, jarak antar not pada akord mayor adalah tetap yaitu 2:1 ½.

Hal lain pada interval satu oktaf piano tangga nada C mayor yang berhubungan dengan bilangan Fibonacci yaitu dalam satu oktaf (termasuk nada oktafnya X') terdapat 13 jumlah tuts, dengan komposisi 8 tuts putih, dan 5 tuts putih. Maka didapatkan perbandingan setiap tuts:

1. Perbandingan Tuts Hitam dengan Total Tuts

$$\frac{5}{13}$$

5 yang merupakan suku kelima dari barisan Fibonacci dan 13 yang merupakan suku ketujuh.

2. Perbandingan Tuts Putih dengan Total Tuts

$$\frac{8}{13}$$

Angka di atas didapatkan menggunakan rumus x_n pada bab II dengan n = 5

3. Perbandingan Tuts Hitam dengan Tuts Putih

$$\frac{5}{8}$$

Angka di atas didapatkan menggunakan rumus x_n pada bab II dengan n = 4

Hanya saja batasan masalah pada pengenalan pola Fibonacci pada tangga nada ini adalah, pola ini hanya berlaku untuk satu oktaf saja, saat diambil sampel dua oktaf pada percobaan, bilangan Fibonacci gagal didapatkan. Hal ini juga tidak berlaku pada akord minor.

V. Simpulan

Barisan Fibonacci adalah barisan dengan suku-sukunya merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya. Bilangan Fibonacci dapat ditemui pada banyak hal, tak terkecuali pada musik. Pada tangga nada mayor yang dimulai dari C, terdapat pola Fibonacci jika dalam satu oktaf dibandingkan skala diatonis dengan skala kromatisnya.

Dengan mengetahui pola ini, maka untuk menemukan sebuah akord akan lebih mudah menggunakan rumus barisan Fibonacci atau bisa digunakan sebagai cara alternatif.

VI. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena atas kuasanya, penulis bisa menyelesaikan makalah ini dengan baik dan tepat waktu. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada dosen pembimbing Matematika Diskrit kelas 1, yaitu Ibu Harlili. Penulis turut mengucapkan terimakasih pada Bapak Rinaldi Munir atas bimbingannya untuk menulis makalah ini. Ucapan terimakasih untuk Paduan Suara Mahasiswa (PSM) ITB karena telah memberi inspirasi pada pemilihan judul. Juga, untuk Mudita (MA'14) atas bimbingannya dan Dzar (IF'15) atas bantuannya.

Daftar Pustaka

[1] Rosen, Kenneth H. 2012. Discrete Mathematics and Its Applications 7th edition. New York: McGraw-Hill.
[2] Rosen, Kenneth H. 2010. Elementary Number Theory and Its Application, 6th Edition. New York: Pearson.
[3] Boretz, Benjamin. 1995. Meta-Variations: Studies in the Foundations of Musical Thought. Red Hook. New York: Open Space.
[4] Soeharto, M. 1992. Kamus Musik. Jakarta : PT Gramedia.
[5] The Fibonacci Series. "What is the Fibonacci Sequence (aka Fibonacci Series)?". Diakses dari http://goldennumber.net/fibonser.htm, tanggal 7 Desember 2016.

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2016

ttd

Stevanno Hero Leadervand, 13515082