

Geometri Fraktal dalam Etnomatematika Candi Borobudur

Arfinda Ilmania, 13515137¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹findafn@gmail.com

13515137@std.stei.itb.ac.id

Abstract—Geometri fraktal adalah cabang matematika yang mempelajari sifat dan perilaku fraktal. Fraktal adalah suatu bentuk yang memiliki pola berulang. Pola ini memiliki detail tak berhingga yang apabila diperbesar dapat memiliki struktur yang serupa dengan fraktal itu sendiri. Banyak fraktal yang dihasilkan dengan mengulang pola secara rekursif. Dalam makalah ini akan dibahas penerapan geometri fraktal dengan pendekatan budaya atau yang biasa disebut *Etnomatematika*. Salah satu bentuk etnomatematika yang menarik untuk dieksplorasi adalah megastruktur Candi Borobudur.

Keywords—geometri, fraktal, etnomatematika, Candi Borobudur

I. PENDAHULUAN

Fraktal merupakan bentuk yang memiliki pola berulang. Bentuk tersebut dapat dibagi-bagi secara radikal menjadi beberapa bagian yang memiliki struktur yang sama dengan bentuk secara keseluruhannya. Cabang matematika yang mempelajari tentang sifat dan perilaku fraktal dinamakan geometri fraktal.

Dalam dunia matematika, bahasan tentang geometri fraktal sudah cukup berkembang. Namun istilah geometri fraktal masih terdengar asing di telinga masyarakat awam, khususnya masyarakat Indonesia. Padahal terdapat banyak penerapannya di alam semesta dan dalam kehidupan sehari-hari, terlebih dalam kebudayaan Indonesia itu sendiri.

Di alam terdapat banyak bentuk fraktal yang sangat menakjubkan. Seperti bunga salju Koch, brokoli, dan daun pakis. Selain fraktal alamiah, juga terdapat beberapa bentuk fraktal buatan manusia. Kebudayaan Indonesia sendiri juga telah menerapkannya sejak jaman nenek moyang. Batik dan bangunan candi adalah salah satu dari hasil perpaduan budaya dan geometri fraktal. Hal tersebut membuktikan bahwa matematika dapat diterapkan di dalam semua bidang. Matematika sudah tumbuh dan berkembang sejak jaman dahulu kala dama budaya Indonesia, baik disadari maupun tidak disadari. Matematika yang tumbuh dan berkembang dari suatu budaya atau kelompok etnis tertentu inilah yang disebut

dengan istilah etnomatematika.

Dalam makalah ini, penulis akan membahas tentang penerapan geometri fraktal pada megastruktur Candi Borobudur dengan menggunakan pendekatan budaya lokal.

II. DASAR TEORI

A. Rekursif

Rekursif adalah suatu metode dalam dunia matematika. Definisi dari rekursif adalah suatu proses perulangan untuk menyelesaikan suatu permasalahan berdasarkan suatu hubungan rekurens. Dalam bidang ilmu komputer, rekursif didefinisikan sebagai fungsi yang mendeskripsikan fungsi itu sendiri. Rekursif terdiri dari basis dan langkah rekursifnya.

Teorema rekursif adalah sebagai berikut [6]. Diberikan suatu himpunan X , sebuah elemen a dari X dan sebuah fungsi $f : X \rightarrow X$, teorema menyatakan bahwa ada fungsi unik $F : \mathbb{N} \rightarrow X$ (dengan \mathbb{N} menunjukkan himpunan dari bilangan asli termasuk nol) sehingga

$$F(0) = a$$

$$F(n + 1) = f(F(n))$$

untuk setiap bilangan asli n . Untuk membuktikan keunikannya, ambil dua fungsi.

$$F : \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$G : \mathbb{N} \rightarrow X$$

Sehingga,

$$F(0) = a$$

$$G(0) = a$$

$$F(n + 1) = f(F(n))$$

$$G(n + 1) = f(G(n))$$

dengan a adalah elemen dari X .

Dapat dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $F(n) = G(n)$ untuk semua bilangan asli n :

Kasus dasar (basis):

$$F(0) = a = G(0),$$

sehingga persamaan memenuhi untuk $n = 0$.

Langkah Induktif:

Misalkan $F(k) = G(k)$ untuk beberapa $k \in \mathbb{N}$. Maka,

$$F(k + 1) = f(F(k)) = f(G(k)) = G(k + 1).$$

Karenanya $F(k) = G(k)$ menyiratkan $F(k+1) = G(k+1)$.

Dengan induksi, $F(n) = G(n)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh sederhana dari metode rekursif adalah saat dua buah cermin diletakkan secara paralel dan berhadapan satu sama lain maka gambar yang tertangkap pada cermin adalah suatu bentuk rekursi tak terbatas (*infinite recursion*). Sedangkan dalam dunia nyata rekursif dapat ditemukan dalam silsilah keluarga. Orangtua seseorang adalah leluhur seseorang, sebagai kasus dasar. Kemudian, orangtua dari suatu leluhur juga merupakan leluhurnya (langkah rekursif).

Dalam bidang komputer, khususnya bidang pemrograman, metode ini digunakan untuk menghitung suatu bilangan yang memiliki rumus berulang. Contohnya adalah mencari faktorial sebuah bilangan. Berikut ini adalah contoh dari fungsi faktorial dalam bahasa C.

```
int faktorial (int n)
{
    if ( n == 0 ) {
        return 1;
    } else {
        return n*faktorial(n-1);
    }
}
```

Beberapa contoh relasi perulangan lainnya adalah bilangan *fibonacci*, *golden ratio*, fungsi *ackermann*, dan sebagainya.

B. Fraktal dan Geometri Fraktal

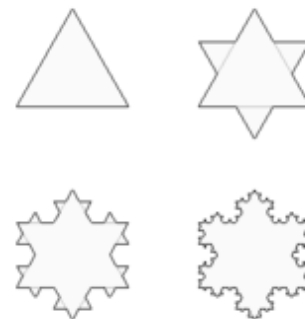
Fraktal merupakan bentuk yang memiliki pola berulang. Bentuk tersebut dapat dibagi-bagi secara radikal menjadi beberapa bagian yang memiliki struktur yang sama dengan bentuk secara keseluruhannya. Cabang matematika yang mempelajari tentang sifat dan perilaku fraktal dinamakan geometri fraktal.

Istilah fraktal pertama kali dicetuskan oleh Benoît Mandelbrot pada tahun 1975 dalam makalahnya yang berjudul “*A Theory of Fractal Set*”. Istilah ini berasal dari bahasa latin *fractus* yang artinya “tidak teratur” atau “rusak” [1].

Dalam geometri fraktal juga dikenal istilah dimensi fraktal. Secara konvensional, konsep dimensi merupakan ‘bilangan bulat’. Dimensi 1 direpresentasikan dengan garis, dimensi 2 dengan bidang, dimensi 3 dengan ruang,

dimensi 4 dengan ruang dan waktu, dan seterusnya. Namun, fraktal adalah konsep geometri yang mengenal dimensi ‘bilangan pecahan’. Dalam kenyataannya, penggunaan gagasan dimensi pecahan telah melangkah lebih jauh dari apa yang dibayangkan oleh pencetusnya. Karena alam berlimpah dengan bentuk-bentuk swa-reflektif (*self-reflectif*), maka kebanyakan dari alam sekitar dapat dicirikan dengan indeks yang baru ini. Pegunungan, awan, pohon-pohon, dan bunga-bunga semuanya memiliki dimensi antara dua dan tiga. Ciri dari suatu bentuk juga dapat dibaca dari dimensinya. Garis pantai pulau Sulawesi yang kasar memiliki dimensi pecahan yang lebih besar dari pada garis pantai Bali yang halus. Gumpalan awan”mengisi ruang” lebih banyak dari kabut tipis. Bangunan indah seperti Borobudur memiliki dimensi pecahan yang lebih besar dari pencakar langit di Jakarta.

Fraktal sebenarnya sudah ada sebelum istilah fraktal itu sendiri ditemukan. Awalnya jenis fraktal ini dipelajari sebagai benda-benda matematis. Terdapat banyak sekali contoh benda fraktal di alam semesta, seperti bunga salju *Koch*, himpunan *Mandelbrot*, kurva *peano*, sampai benda-benda di sekitar kita seperti brokoli dan daun pakis.



Gambar 2.1 Bunga Salju *Koch*

Sumber: <https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTdYguWlxBpRWjuYDfPLYWxEUNJgnYekecYeO-cFrywd-oMXk1S>



Gambar 2.2 Brokoli

Sumber: <https://ae01.alicdn.com/kf/HTB1yg2OLpXXXXaXXpXXq6xXFXXG/Seeds-Green-Cabbage-font-b-Broccoli-b-font-b-Romanesco-b-font-Organic-Heirloom-Vegetable.jpg>



Gambar 2.3 Daun Pakis

Sumber: <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/236x/34/19/38/3419384702e6f8efa602dbb7440df141.jpg>

Selain itu geometri fraktal juga dapat ditemukan di berbagai bidang kehidupan, seperti arsitektur, sosial, dan budaya. Banyak bangunan di dunia ini yang menggunakan konsep fraktal dalam kerangka bangunannya. Seperti Candi Borobudur, *Cathedral Notre Dame*, dan *Eureka Pavillion*. Kebudayaan di Indonesia juga memiliki keterkaitan yang erat dengan geometri fraktal. Selain Candi Borobudur, terdapat juga motif-motif batik dari berbagai daerah di Indonesia. Di setiap daerahnya memiliki motif fraktal berbeda-beda yang berkesesuaian dengan lingkungan tempat motif itu lahir.



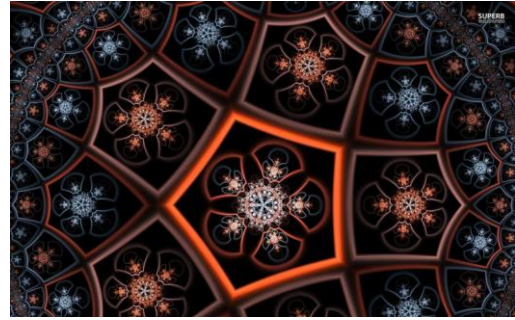
Gambar 2.4 Candi Borobudur, Indonesia

Sumber: <http://www.jogjakharismatransport.com/info-wisata/candi-borobudur/>



Gambar 2.5 *Cathedral Notre Dame*, Paris

Sumber: <http://worldheritage.routes.travel/wp-content/uploads/2013/05/cathedral-notre-dame-5-809x640.jpg>



Gambar 2.6 Motif batik fraktal

Sumber:

http://www.printexmag.com/images/uploads/article/89batik_fractal_batik_dengan_sentuhan_ilmu_matematika.jpg

C. Etnomatematika

Etnomatematika adalah sebuah sebutan untuk matematika yang tumbuh dan berkembang dalam kebudayaan tertentu. Budaya disini mencakup norma dan aturan yang berlaku di kehidupan sehari-hari dalam suatu kelompok istilah ini terbentuk dari kata *ethno*, *mathema*, dan *tics*. *Ethno* berarti kelompok kebudayaan yang dapat dikenali, *mathema* berarti menjelaskan, mengerti serta mengelola, dan *tics* mengandung arti seni dalam teknik.

Karena ilmu ini tumbuh dan berkembang dari budaya, keberadaannya seringkali tidak disadari oleh masyarakat penggunaannya. Sebagai contohnya adalah geometri fraktal yang sangat melekat erat pada budaya Indonesia. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, yaitu Candi Borobudur, yang nantinya akan dibahas lebih lanjut. Selain itu ada beberapa motif batik di Indonesia serta fraktal raja pada budaya Batak yang juga menerapkan prinsip geometri fraktal.

III. SEJARAH SINGKAT CANDI BOROBUDUR

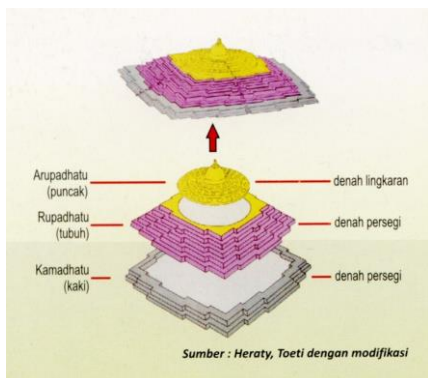
Candi Borobudur merupakan salah satu tempat bersejarah di Indonesia. Candi ini merupakan candi terbesar di dunia yang berlokasi di Magelang, Jawa Tengah. Tidak ada bukti tertulis tentang siapa yang membangun Candi ini. Namun diperkirakan bangunan ini dibangun sekitar 800 M, yang bersamaan dengan kurun waktu puncak kejayaan wangsa Syailendra di Jawa Tengah dengan Samaratingga sebagai rajanya.

Nama Borobudur sendiri berasal dari kata *Sambharabhudharma*, yang artinya gunung (*bhudara*). Ada juga yang mengatakan Borobudur berasal dari kata *bara* dan *beduhur*. Kata *bara* berasal dari kata vihara atau kompleks candi. Dan *beduhur* artinya ada di tempat tinggi. Jadi secara keseluruhan artinya kompleks candi yang berada di tanah tinggi.

Candi Borobudur terbagi atas tiga tingkatan. Setiap tingkatan merupakan tingkatan dunia spiritual dalam kosmologi Buddha. Tingkatan-tingkatan tersebut adalah *Kamadhatu*, *Rupadhatu*, dan *Arupadhatu*.

Kamadhatu berada di paling bawah. Tingkatan ini

menggambarkan dunia yang masih dikuasai oleh *kama* atau “hawa nafsu”. *Rupadhatu* berada pada tingkatan kedua. Tingkatan ini menggambarkan dunia yang sudah dapat membebaskan diri dari hawa nafsu atau biasa disebut *alam antara* yakni, antara *alam bawah* dan *alam atas*. Tingkatan paling atas adalah *Arupadhatu* yang berarti tidak berupa atau berwujud. Denah lantainya berbentuk lingkaran, berbeda dari tingkatan-tingkatan sebelumnya yang berbentuk persegi. Tingkatan ini melambangkan alam atas di mana manusia sudah bebas dari segala keinginan dan ikatan rupa, namun belum mencapai nirwana. Terdapat stupa induk berukuran besar sebagai pusatnya yang dikelilingi oleh stupa-stupa kecil berbentuk lonceng.



Gambar 3.1 Tingkatan pada Candi Borobudur
Sumber:

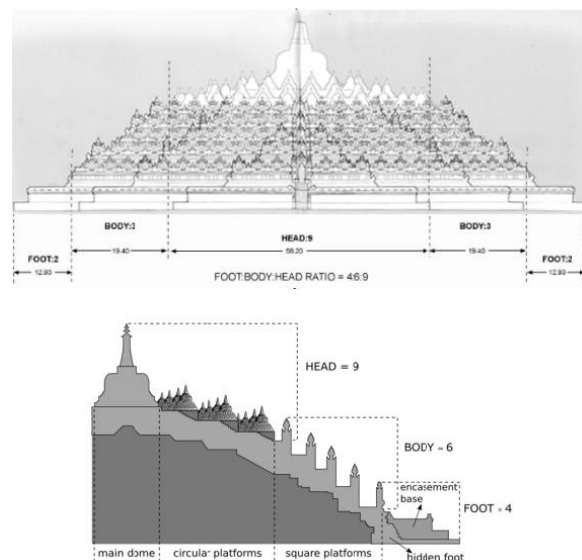
https://belajar.kemdikbud.go.id/PetaBudaya/Repositorys/borobudur/gb_borobudur/dhatu.jpg

Bentuk Borobudur jika dilihat dari atas membentuk mandala. Mandala adalah peta yang menggambarkan tatanan semesta maupun sifat batin. Bentuk mandala yang mendasari arsitektur Borobudur adalah Mandala *Dharmadhatu* dan *Wajradhatu*. Teras Borobudur disusun sesuai dengan kaidah matematis Mandala Wajradhatu [5].

IV. GEOMETRI FRAKTAL DALAM ETNOMATEMATIKA CANDI BOROBUDUR

Bangunan Candi Borobudur berkaitan sangat erat dengan beberapa prinsip matematika yang ada. Yaitu Geometri Fraktal, konsep bangun datar, teselasi, perbandingan dan lain sebagainya.

Secara mendasar, jika dilihat dari atas, Candi Borobudur terdiri dari dua bentuk dasar yaitu persegi dan lingkaran. Enam lantai berbentuk persegi dan 3 lantai berbentuk lingkaran. Dilihat secara *vertical*, bangunan candi ini memiliki perbandingan 9:6:4 berdasarkan pembagian tiga tingkatan yang telah dibahas sebelumnya [2]. *Kamadhatu* sebagai kaki, *Rupadhatu* sebagai badan, dan *Arupadhatu* sebagai kepala candi. Secara *horizontal* pun juga memiliki perbandingan yang sama. Hal tersebut dijelaskan dalam Gambar 4.1.



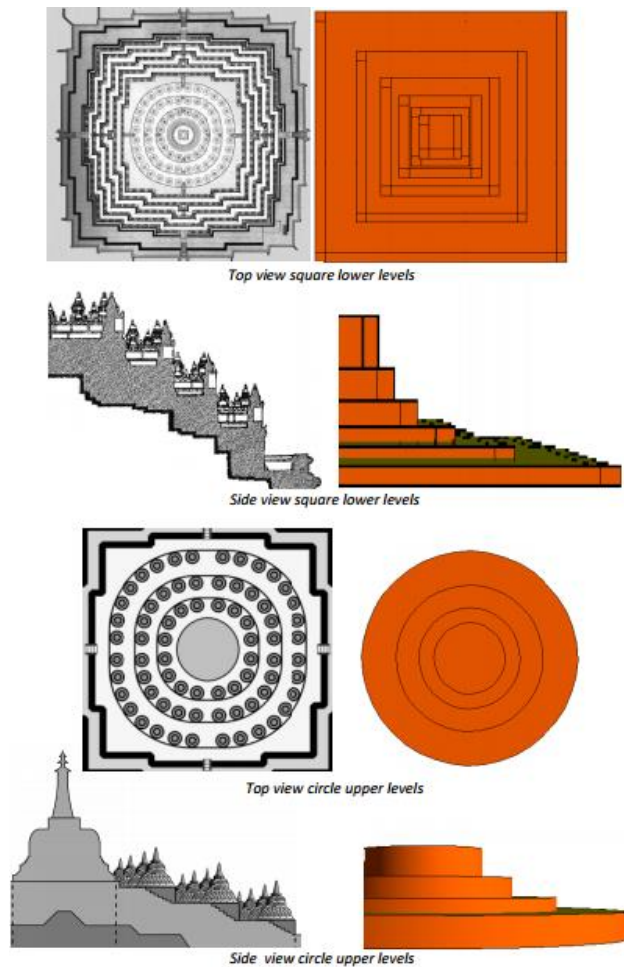
Gambar 4.1 Perbandingan Kepala-Badan-Kaki Candi Borobudur secara *horizontal* (atas) dan *vertical* (bawah).
Sumber: H. Situngkir (2010). "Borobudur Was Built Algorithmically".

Tinggi Candi Borobudur menurut rasio 9:6:4 adalah 41,81 meter atau 182.576 tala. Angka ini adalah setengah jumlah hari dalam satu tahun penanggalan matahari (362,25 hari). Jika diukur, kedua sumbu diagonal di teras lingkaran kedua, diperoleh hasil 182,53 tala dan 182,79 tala yang persis dengan jumlah hari dalam 1 tahun, yakni 365,32 hari. Demikianlah Borobudur adalah monumen yang menyimbolkan garis waktu [5].

Kesamaan diri (*self-similarity*) pada Candi Borobudur dapat dilihat pada stupa-stupa yang membentuknya. Terdapat 72 stupa kecil di dalam candi ini. Keseluruhannya terletak pada tingkatan *Arupadhatu* yang terbagi menjadi tiga pelataran. Pada pelataran pertama terdapat 32 stupa dengan lubang berbentuk wajik, melambangkan jumlah 32 markah agung Sakyamuni. Pelataran kedua berjumlah 24 stupa dengan lubang berbentuk wajik, yakni penanggalan almanak India yang meliputi siklus 12 bulan purnama dan 12 bulan baru. Pelataran ketiga 16 stupa dengan lubang berbentuk kotak. 56 stupa dengan masing-masing 64 lubang wajik memiliki makna Buddha di dalamnya memancarkan 364 cahaya ke sepuluh penjuru mata angin, merujuk ke almanak matahari. 16 stupa dengan 44 lubang kotak memancarkan 72 nirmita ke sepuluh penjuru, merujuk ke satuan penanggalan India kuno. Di tengah ke-72 stupa tersebut terdapat sebuah stupa besar yang dinamakan stupa induk. Stupa ini merupakan bagian tertinggi dalam candi.

Jika dilihat dari jauh Borobudur sendiri merupakan sebuah stupa yang sangat besar yang di dalamnya terdiri dari stupa-stupa kecil. Inilah yang dinamakan geometri fraktal. Dimensi fraktal pada Candi Borobudur adalah 2.325, yang berada di antara dimensi dua dan tiga [2]. Jadi, Candi Borobudur bukanlah bangun ruang 3 dimensi biasa dan tidak tepat juga dilihat sebagai bentuk 2 dimensi.

Baik dari atas maupun samping, Candi Borobudur terdiri dari bentuk-bentuk geometri, baik satu maupun dua dimensi yang berulang-ulang. Jika dilihat dari atas, bangunan ini terdiri dari persegi yang di dalamnya juga mengandung persegi yang lebih kecil (rekursif). Selain itu, pada tiga lantai teratas bangunan ini terdiri dari lingkaran yang mengandung lingkaran yang lebih kecil di dalamnya. Sedangkan jika dilihat dari samping, bangunan ini tersusun dari balok dan tabung yang ditumpuk. Balok dan tabung dengan ukuran terbesar berada di paling bawah dan di atasnya terdapat balok atau tabung lain yang lebih kecil. Penjelasan tersebut diilustrasikan dengan gambar di bawah ini.



Gambar 4.2 Bangun ruang pembentuk candi jika dilihat dari atas maupun samping
 Sumber: H. Situngkir (2010). "Borobudur Was Built Algorithmically".

V. KESIMPULAN

Candi Borobudur adalah megastruktur peninggalan bersejarah yang kaya akan penerapan prinsip matematika. Salah satu penerapan prinsip matematika pada bangunan ini adalah prinsip geometri fraktal atau yang lebih mendasarinya lagi adalah prinsip rekursifitas. Arsitektur bangunan ini terdiri dari lingkaran dan persegi yang

memiliki pola berulang. Etnomatematika Candi Borobudur ini menjadi bukti bahwa sejak jaman nenek moyang, Indonesia sudah mengenal prinsip-prinsip matematika sederhana. Meskipun banyak masyarakat yang belum menyadari keberadaan etnomatematika tersebut.

REFERENCES

- [1] Barnsley, Michael F. 1993. *Fractal Everywhere*. Academic Press Professional. United States of America.
- [2] H. Situngkir (2010). "Borobudur Was Built Algorithmically". BFI Working Paper Series WP-9-2010 (Bandung Fe Institute).
- [3] Hammond, Tracy. 2000. **Ethnomathematics: Concept Definition and Research Perspectives**. Thesis for Degree of Master of Arts, Columbia University. http://srlweb.cs.tamu.edu/srlng_media/content/objects/object-1234476000-b6fdd344454299ac478700e4deb6e040/2000HammondEthnomathematics.pdf
- [4] Yusuf, Mohammed Waziri, dkk. 2010. **Ethnomathematics (a Mathematical Game in Hausa Culture)**. International Journal of Mathematical Science Education Technomathematics Research Foundation. <http://www.tmrfindia.org/sutra/v3i16.pdf>
- [5] <http://blog.umy.ac.id/annisawityasiwi/2015/11/19/arti-tatanan-arsitektur-candi-borobudur-magelang/>, diakses pada 9 Desember 2016, pukul 15.10.
- [6] Hunter, David (2011). *Essentials of Discrete Mathematics*. Jones and Bartlett. p. 494.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2016

Arfinda Ilmania, 13515137