Penyelesaian Teka-Teki Sudoku dengan Didasarkan pada Teknik Pewarnaan Graf

William, 13515144[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*13515144@std.stei.itb.ac.id, willywilliamss97@gmail.com*

***Abstrak*— Sudoku merupakan permainan teka-teki penempatan angka pada matriks 9x9, yang didalamnya dibagi kembali menjadi 9 upamatriks berukuran 3x3. Tujuan dari teka-teki ini adalah menempatkan angka 1-9 dimana tidak ada angka yang sama pada suatu baris, kolom, dan upamatriks 3x3. Matematika Diskrit adalah salah satu bidang ilmu yang merupakan dasar dari materi lain di ranah Informatika. Salah satu bidang yang dipelajari pada Matematika Diskrit adalah Teori Graf. Makalah ini akan membahas tentang representasi Sudoku sebagai graf dan penyelesaiannya dengan didasarkan teknik pewarnaan graf. Pewarnaan graf yang digunakan merupakan proses untuk meberi warna setiap simpul graf, dimana simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan graf sendiri merupakan salah satu aplikasi graf yang memiliki banyak manfaat.**

***Kata Kunci*— sudoku, pewarnaan graf, bilangan kromatik**

I. PENDAHULUAN

Sudoku (数独) merupakan teka teki penempatan angka. Teka-teki ini dapat mengasah otak karena didasari pada logika. Tujuan dari teka-teki ini adalah untuk mengisi matriks 9x9 dengan angka 1-9. Penempatan angka-angka tersebut memiliki syarat dimana pada setiap baris, kolom, dan kesembilan buah submatriks 3x3 tidak mengandung angka yang sama. Teka-teki semacam Sudoku ini pernah muncul dalam surat kabar Perancis "*La France"* pada 6 Juli 1895, namun tidak memiliki upamatriks. Sudoku modern dirancang oleh Howard Garns, seorang pensiunan arsitek dan perancang teka-teki dari Connersville, Indiana, dan dipublikasikan pertama kali oleh *"Dell Magazine"* pada 1979 dengan nama "*Number Place"*[7]. Di Jepang, teka-teki Sudoku diperkenalkan oleh penerbit *Nikoli* di *"Monthly Nikolist"* pada April 1984 sebagai *Sūji wa dokushin ni kagiru* (数字は独身に限る), yang berarti "digit angka yang tunggal" atau "digit dibatasi 1 kali kemunculan". Pada perkembangannya, teka-teki ini disingkat sebagai *Sudoku* (数独). Makalah ini akan membahas tentang penyelesaian teka-teki Sudoku dengan pendekatan graf. Teka-teki Sudoku akan direpresentasikan dalam bentuk graf dan penyelesaiannya akan didasarkan pada teknik pewarnaan graf.

	5	3	2		7			8
6		1	5					2
2			9	1	3		5	
7	1	4	6	9	2			
	2						6	
			4	5	1	2	9	7
	6		3	2	5			9
1					6	3		4
8			1		9	6	7	

Gambar 1. Ilustrasi Sudoku
Sumber: http://www.educationworld.com/a_lesson/sudoku/sudoku002.shtml (diakses 6 Desember 2016, Pk. 19.43)

II. DASAR TEORI

A. Graf

Berdasarkan Ref[2], graf merupakan suatu pokok bahasan yang sudah tua usianya namun masih memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek – objek diskrit dan hubungan antara objek – objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antar bulatan dinyatakan dengan garis. Graf memiliki banyak kegunaan. Pada umumnya, graf digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan agar menjadi lebih mudah.

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), yang dalam hal ini:

1. V= himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*)
2. E= himpunan sisi (*edges* atau *arcs*)

Graf dapat pula ditulis dalam notasi G=(V,E).

Berdasarkan definisi diatas, dinyatakan bahwa V tidak boleh kosong, namun E boleh kosong. Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf (a,b,c,…), dengan bilangan asli (1,2,3,…) atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul vi dengan simpul vj dinyatakan dengan pasangan (v_i,v_j) atau dengan lambing $e_1, e_2, e_3, \ldots$ Dengan kata lain, jika e menghubungkan v_i dengan v_j, e dapat ditulis sebagai $e=(v_i,v_j)$.

B. Jenis Graf

Pengelompokkan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi gelang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi gelang, graf digolongkan menjadi dua jenis, yaitu:

1. Graf sederhana (*simple graph*), yaitu graf yang tidak mengandung sisi gelang maupun sisi ganda.
2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*), yaitu graf yang mengandung sisi gelang atau sisi ganda.

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, graf dapat digolongkan menjadi:

1. Graf berhingga (*limited grah*), yaitu graf yang jumlah simpulnya sebanyak n.
2. Graf tak berhingga (*unlimited graph*), yaitu graf yang jumlah simpulnya tidak berhingga banyaknya

Berdasarkan ada tidaknya orientasi arah, graf digolongkan menjadi :

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*), yaitu graf yang sisiya tidak mempunyaiorientasi arah.
2. Graf berarah (*directed graph*), yaitu graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

C. Terminologi Dasar

1. Ketetenggaan (*Adjacency*)

   Dua buah simpul bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.
2. Bersisian (*Incidency*)

   Untuk sembarang sisi e = (v_j, v_k), dikatakan e bersisian dengan simpul v_j, atau e bersisian dengan simpul vk.
3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

   Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang beririsan dengannya.
4. Graf Kosong (*Null Graph*)

   Graf yang tidak memiliki sisi sama sekali atau himpunan sisinya kosong.
5. Derajat (*Degree*)

   Derajat dari suatu simpul adalah jumlah sisi yang menempel dengan dengan simpul terserbut.
6. Lintasan (*Path*)

   Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan vn di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, … , vn-1, en, vn sedemikian sehingga e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v1, v2), … , e_n = (vn-1. vn) adalah sisi-sisi dari graf G.
7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)

   Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus. Sedangkan, panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut.
8. Terhubung (*Connected*)

   Dua buah simpul v1 dan simpul v2 disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v1 ke v2. G disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul vi dan vj dalam himpunan V terdapat lintasan dari vi ke vj.
9. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf

   Misalkan G = (V, E) adalah sebuah graf. G1 = (V1, E1) adalah upagraf dari G jika V1 ⊆ V dan E1 ⊆ E. Komplemen dari upagraf G1 terhadap G adalah graf G2 = (V2, E2) sedemikian sehingga G2 = E – E1, dan V2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E2 bersisian dengannya. Komponen graf adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G.
10. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)

    Upagraf G1 = (V1, E1) dari G = (V, E) dikatakan upagraf rentang jika (V1 = V) G1 mengandung semua simpul dari G.
11. *Cut-Set*

    Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung.
12. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

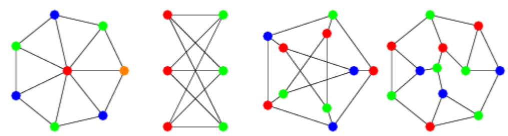
    Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah bobot.

D. Pewarnaan Graf

Masalah utama pewarnaan graf adalah bagaimana cara untuk mewarnai semua simpul pada graf, dengan warna seminimal mungkin, dimana tidak ada simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama. Jumlah warna minimum yang digunakan disebut bilangan kromatik dari graf G, disimbolkan dengan χ(G). Terdapat 3 jenis pewarnaan graf, yaitu :

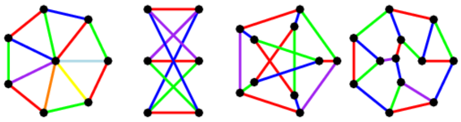
1. Pewarnaan simpul

   Pewarnaan simpul adalah memberikan warna pada setiap simpul dimana tidak ada simpul bertetangga yang memiliki warna yang sama.



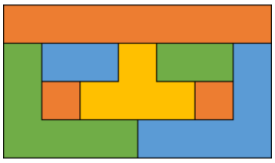
Gambar 2. Pewarnaan simpul
Sumber:http://mathworld.wolfram.com/VertexColoring.html (diakses 6 Desember 2016, Pk. 20.21)

2. Pewarnaan sisi
   Pewarnaan sisi adalah memberikan warna pada setiap sisi dimana tidak ada sisi yang bersisian dengan simpul yang sama memiliki warna yang sama.



Gambar 3. Pewarnaan Sisi
Sumber: http://mathworld.wolfram.com/EdgeColoring.html (diakses 6 Desember 2016, Pk.20.23)

3. Pewarnaan bidang
   Pewarnaan bidang adalah memberikan warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga memiliki warna yang sama.



Gambar 4. Pewarnaan Bidang
Sumber: http://www.laurentlessard.com/bookproofs/adversarial-map-coloring/ (diakses 6 Desember 2016 Pk.20.25)

E. Bilangan Kromatis

Bilangan kromatis adalah jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf, disimbolkan dengan χ. Contohnya, pada sebuah graf lengkap K_n, bilangan kromatisnya adalah $\chi(K_n)$=n. Berikut merupakan beberapa sifat bilangan kromatis:

1. $\chi(G) = 1 \leftrightarrow$ G adalah graf kosong (tidak terhubung sama sekali).
2. $\chi(G) \geq 3 \leftrightarrow$ G memiliki upagraf yang merupakan K_3 atau C_3
3. $\chi(G) \leq B(G)+1$.
4. $\chi(G) \leq B(G)$, kecuali jika G adalah graf lengkap atau graf lingkaran dengan jumlah simpul ganjil. Untuk setiap graf planar, berlaku teorema *Four Colouring*, yaitu $\chi(G)\leq 4$.
5. Bila G' adalah upagraf dari G, maka $\chi(G') \leq \chi(G)$. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$.
6. Graf Lingkaran C_n memiliki $\chi(G) = 2$ bila n genap dan $\chi(G) = 3$ bila n ganjil.
7. Graf Teratur derajat n selalu memiliki $\chi(G) = n +1$ (berdasarkan sifat ke-3)
8. Graf Bipartit hanya membutuhkan dua warna.
9. Graf berupa pohon hanya membutuhkan dua warna.

F. Algoritma Pewarnaan Graf

Terdapat beberapa algoritma pewarnaan graf, seperti algoritm Welch-Powell, algoritma *backtracking*, dsb. Pada makalah ini hanya akan dibahas algoritma Welsh-Powell. Berdasarkan Ref[5], algoritma Welsh-Powell sebagai berikut:

1. Urutkan simpul dari derajat terbesar
2. Warnai simpul pertama yang sudah kita urutkan dengan warna-1. Kemudian warnai simpul berikutnya yang tidak berdampingan dengan simpul pertama tadi dengan warna yang sama.
3. Kemudian kita lanjutkan dengan warna kedua, dan seterusnya, sampai semua simpul telah diberi warna.

III. PENYELESAIAN TEKA-TEKI SUDOKU DENGAN PEWARNAAN GRAF

Langkah – langkah yang dapat digunakan untuk pengerjaan Sudoku menggunakan graf adalah sebagai berikut :

1. Setiap sel matriks Sudoku akan diubah ke dalam bentuk Graf Sudoku di mana setiap sel merupakan simpul graf tersebut dan dilambangkan dengan $v_{i,j}$ dengan i adalah indeks baris, dan j adalah indeks kolom.
2. Simpul-simpul tersebut akan bertetangga (dihubungkan dengan sisi), dengan aturan sebagai berikut:
   a. $v_{i,j}$ bertetangga dengan $v_{i',j'}$ jika i=i' (Semua simpul akan saling bertetangga apabila berada dalam 1 baris yang sama)
   b. $v_{i,j}$ bertetangga dengan $v_{i',j'}$ jika j=j' (Semua simpul akan saling bertetangga apabila berada dalam 1 kolom yang sama)
   c. Semua simpul yang berada dalam 1 upa matriks 3x3 yang sama akan saling bertetangga , contohnya pada upamatriks pertama, simpul v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{31}, v_{32}, v_{33} saling bertetangga
3. Tentukan setiap warna yang digunakan sebagai penanda setiap angka.
4. Warnailah simpul-simpul yang sudah terisi angka (yang diberikan dari soal) dengan warna yang sesuai (berdasarkan langkah no 3)
5. Warnai simpul graf yang belum berwarna, dengan memberikan warna tertentu terhadap suatu simpul, kemudian cari simpul lain yang belum diberi warna dan lakukan proses yang sama. Pencarian ini akan dilakukan kembali pada simpul – simpul lain yang belum diberi warna hingga semua simpul sudah terwarnai dengan tepat. Pewarnaan dikatakan tepat apabila simpul tersebut tidak memiliki warna yang sama dengan tetangganya. Dalam penyelesaian Sudoku akan dicoba untuk mengembangkan

(*extend*) sebagian graf berwarna menjadi pewarnaan yang tepat.

6. Setelah seluruh simpul telah terwarnai dengan tepat, ubah kembali warna-warna tersebut dengan angka (yang diatur dalam langkah 3)

Sebagai contoh, misalkan diberikan soal Sudoku seperti gambar di bawah:

			3		4			
		1	9		8	5		4
4			6				9	8
					7			
9	3						8	7
			4					
6	7				2			3
8		4	7		3	2		
			5		1			

Gambar 5. Contoh Soal Sudoku

Langkah pertama, ubah matriks tersebut dan bayangkan sebagai graf dengan aturan yang telah dituliskan di atas. Sebagai contoh, simpul $v_{5,8}$ akan bertetangga dengan simpul yang diberi warna pada gambar di bawah ini:

			3		4			
		1	9		8	5		4
4			6				9	8
					7			
9	3						8	7
			4					
6	7				2			3
8		4	7		3	2		
			5		1			

Gambar 6. Simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul $v_{5,8}$

Berikutnya, tentukan warna untuk masing-masing angka, misalnya:

1. Angka 1= merah
2. Angka 2= jingga
3. Angka 3= kuning
4. Angka 4= hijau
5. Angka 5= biru
6. Angka 6= ungu
7. Angka 7= merah muda
8. Angka 8= coklat
9. Angka 9= toska

Selanjutnya, mulai dengan mewarnai simpul yang sudah ada pada soal. Setelah diwarnai, Sudoku akan seperti gambar di bawah ini:

			3		4			
		1	9		8	5		4
4			6				9	8
					7			
9	3						8	7
			4					
6	7				2			3
8		4	7		3	2		
			5		1			

Gambar 7. Pewarnaan awal simpul dari soal

Kemudian, simpul v_{19}, v_{35}, v_{41}, v_{54}, v_{68}, v_{77}, v_{82} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna merah, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna merah.

1,1	1,2	1,3		1,5		1,7	1,8	
2,1	2,2			2,5			2,8	
	3,2	3,3			3,6	3,7		
	4,2	4,3	4,4	4,5		4,7	4,8	4,9
		5,3		5,5	5,6	5,7		
6,1	6,2	6,3		6,5	6,6	6,7		6,9
		7,3	7,4	7,5			7,8	
				8,5			8,8	8,9
9,1	9,2	9,3		9,5		9,7	9,8	9,9

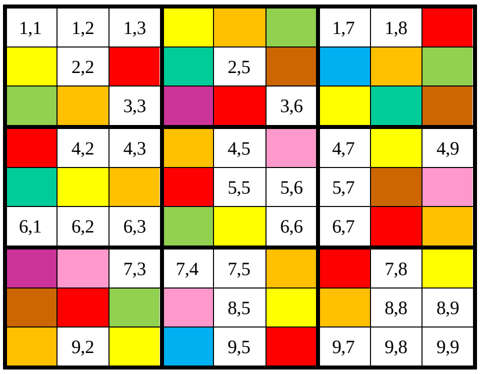
Gambar 8. Pewarnaan merah

Kemudian, simpul v_{15}, v_{28}, v_{32}, v_{44}, v_{53}, v_{69}, v_{91} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna jingga, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna jingga.

1,1	1,2	1,3				1,7	1,8	
2,1	2,2			2,5				
		3,3			3,6	3,7		
	4,2	4,3		4,5		4,7	4,8	4,9
				5,5	5,6	5,7		
6,1	6,2	6,3		6,5	6,6	6,7		
		7,3	7,4	7,5			7,8	
				8,5			8,8	8,9
	9,2	9,3		9,5		9,7	9,8	9,9

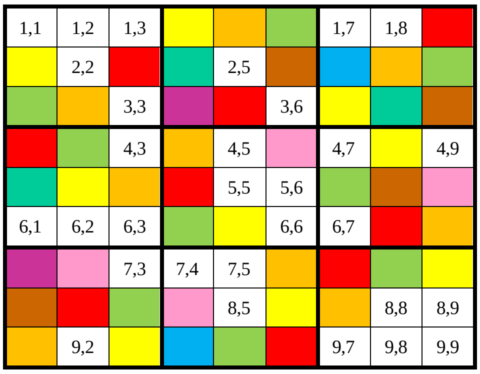
Gambar 9. Pewarnaan jingga

Kemudian, simpul v_{21}, v_{37}, v_{48}, v_{65}, v_{93} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna kuning, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna kuning.



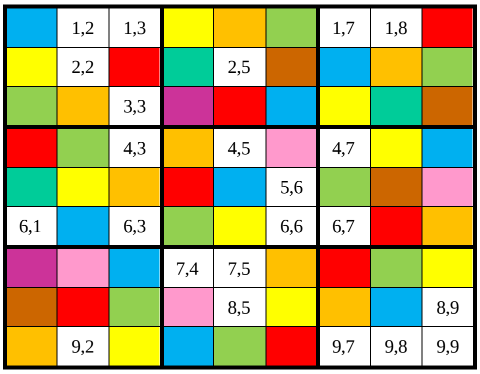
Gambar 10. Pewarnaan kuning

Kemudian, simpul v_{42}, v_{57}, v_{78}, v_{95} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna hijau, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna hijau.



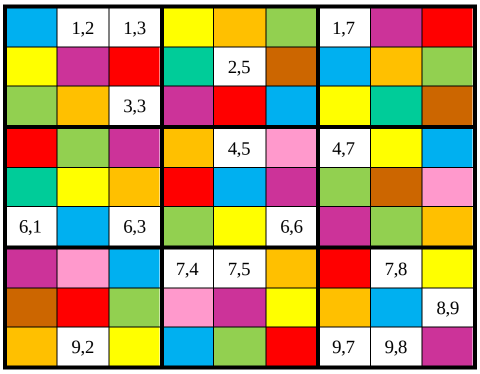
Gambar 11. Pewarnaan hijau

Kemudian, simpul v_{11}, v_{36}, v_{49}, v_{55}, v_{62}, v_{73}, v_{88} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna biru, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna biru.



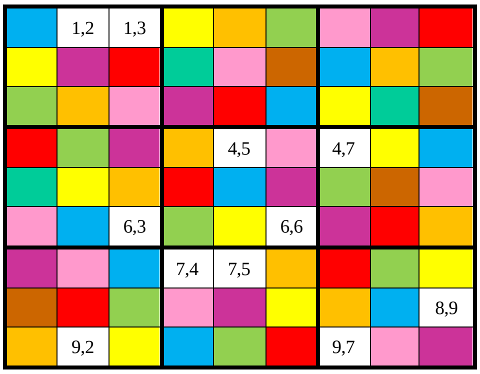
Gambar 12. Pewarnaan biru

Kemudian, simpul v_{18}, v_{22}, v_{43}, v_{56}, v_{67}, v_{85}, v_{99} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna ungu, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna ungu.



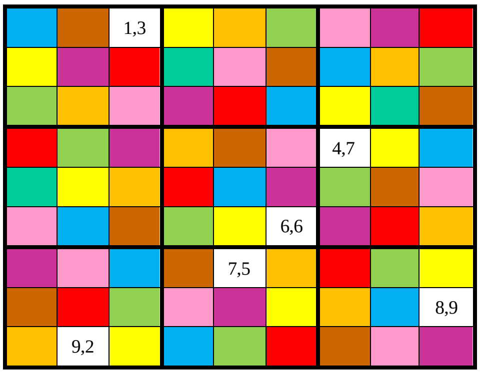
Gambar 13. Pewarnaan ungu

Kemudian, simpul v_{17}, v_{25}, v_{33}, v_{61}, v_{98} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna merah muda, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna merah muda.



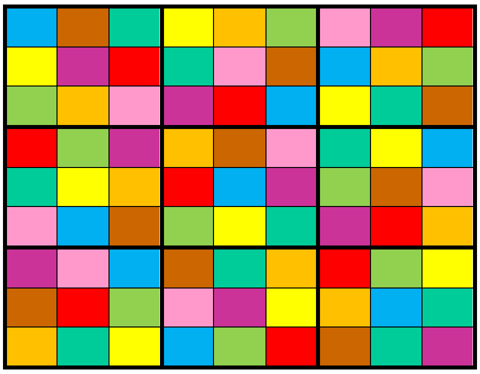
Gambar 14. Pewarnaan merah muda

Kemudian, simpul v_{12}, v_{45}, v_{63}, v_{74}, v_{97} vtidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna coklat, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna coklat.



Gambar 15. Pewarnaan coklat

Kemudian, simpul v_{13}, v_{47}, v_{66}, v_{75}, v_{89}, v_{22} tidak bertetangga dengan simpul yang sudah berwarna toska, dan dari antara simpul tersebut tidak ada yang saling bertetangga, sehingga simpul-simpul tersebut dapat diberi warna toska.



Gambar 16. Pewarnaan toska

Setelah semua simpul telah diberi warna dengan benar, kembalikan warna menjadi angka.

5	8	9	3	2	4	7	6	1
3	6	1	9	7	8	5	2	4
4	2	7	6	1	5	3	9	8
1	4	6	2	8	7	9	3	5
9	3	2	1	5	6	4	8	7
7	5	8	4	3	9	6	1	2
6	7	5	8	9	2	1	4	3
8	1	4	7	6	3	2	5	9
2	9	3	5	4	1	8	7	6

Gambar 17. Hasil Sudoku akhir

Teka-teki Sudoku sudah berhasil diselesaikan.

IV. KESIMPULAN

Teori graf memiliki banyak aplikasi, salah satunya dalam pewarnaan graf. Penyelesaiam teka-teki Sudoku dapat didasarkan pada teknik pewarnaan graf, dimana teka-teki direpresentasikan terlebih dahulu sebagai graf. Angka-angka 1-9 yang harus ditempatkan pada Sudoku direpresentasikan sebagai warna-warna yang berbeda. Setelah pewarnaan selesai, graf Sudoku akan dikembalikan kembali menjadi bentuk semula. Untuk Sudoku konvensional dengan ukuran 9x9, diperlukan 9 warna yang berbeda untuk mewarnai seluruh simpul, sehingga bilangan kromatisnya adalah 9.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas rahmat dan penyertaan-Nya makalah ini dapat diselesaikan. Penulis juga berterima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Ibu Harlili selaku dosen mata kuliah Matematika Diskrit untuk waktu dan ilmu yang diberikan. Tidak lupa penulis berterima kasih kepada orang tua dan teman-teman atas bantuan dan dukungannya.

REFERENSI

[1] Chytry, Vlastimil. 2014. “Sudoku Game Solution on Graph Theory and Suitable for School-Marhematics”, diakses dari http://www.nmk.fpv.ukf.sk/2014/proceedings/6_chytry_fulltext.pdf pada 6 Desember 2016 Pk. 19.42

[2] Munir, Rinaldi. 2006. “Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit.”, Institut Teknologi Bandung : Bandung

[3] Oddson, Kyle. 2016. “Math and Sudoku: Exploring Sudoku Boards Through Graph Theory, Group Theory, and Combinatorics”, diakses dari http://pdxscholar.library.pdx.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1078&context=studentsymposium pada 6 Desember 2016 Pk.19.10

[4] Rosen, Kenneth. “Mathematics and Its Applications 7th edition”,McGraw-Hill: New York

[5] Welsh, D. J. A.; Powell, M. B. (1967), "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems", The Computer Journal, 10 (1): 85–86

[6] http://www.cs.kent.edu/~dragan/ST-Spring2016/SudokuGC.pdf (Diakses pada 6 Desember 2016 Pk.19.20)

[7] https://www.theguardian.com/media/2005/may/15/pressandpublishing.usnews (Diakses 6 Desember 2016 Pk. 19.40)

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016

William/13515144