

# Memanfaatkan Pewarnaan Graf untuk Menentukan Sifat Bipartit Suatu Graf

Gianfranco Fertino Hwandiano - 13515118

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13515118@std.stei.itb.ac.id

**Abstrak**—Salah satu terminologi dasar dalam graf adalah graf bipartit. Graf ini memiliki sifat khusus yang unik. Dalam makalah ini akan dibahas algoritma untuk menentukan apakah suatu graf merupakan graf bipartit menggunakan. Algoritma ini didasarkan atas pewarnaan graf, yaitu dengan cara menelusuri simpul-simpul dalam suatu graf dan melakukan pewarnaan pada masing-masing simpul. Jika pewarnaan berhasil maka graf tersebut bipartit dan jika tidak maka graf tersebut bukan graf bipartit.

**Kata Kunci**—Graf, graf bipartit, pewarnaan, algoritma.

## I. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan pokok bahasan yang terkenal dan dapat diterapkan di banyak bidang sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dengan simpul, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.

Salah satu terminologi dasar dalam graf adalah graf bipartit. Graf ini unik karena memiliki sifat khusus yang membedakannya dari graf lainnya. Graf ini penting untuk dibahas karena kegunaannya cukup banyak. Contohnya yaitu untuk *social network analysis*

Untuk menentukan apakah suatu graf merupakan graf bipartit atau tidak, digunakan algoritma yang didasarkan atas pewarnaan graf. Inti dari algoritma ini adalah suatu graf bipartit harus bisa diwarnai oleh hanya 2 warna saja, dengan syarat simpul yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Jika tidak memenuhi syarat tersebut, maka graf bukanlah graf bipartit. Penjelasan lebih lanjut mengenai algoritma ini akan dibahas dalam makalah ini.

## II. LANDASAN TEORI

### A. Graf

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$ , yang dalam hal ini:

$V$  = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul graf =  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

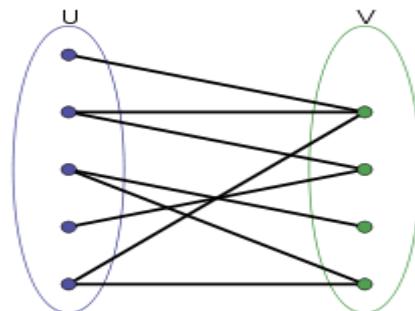
$E$  = himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul =  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Suatu simpul dikatakan bertetangga dengan simpul lainnya jika dan hanya jika terdapat minimal suatu sisi  $e$  yang menghubungkan kedua simpul yang dimaksud.

### B. Graf Bipartit

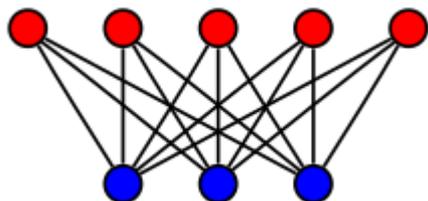
Graf bipartit adalah graf yang simpul-simpulnya dapat dipisah sedemikian rupa menjadi dua himpunan, misalnya  $U$  dan  $V$ , sehingga setiap sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah simpul di  $U$  dengan sebuah simpul di  $V$ . Graf tersebut dapat dinyatakan sebagai  $G(U, V)$ . Dapat dikatakan bahwa setiap pasang simpul di  $U$  tidak bertetangga, demikian pula dengan simpul-simpul di  $V$ .

Kedua himpunan  $U$  dan  $V$  tersebut juga dapat dianggap sebagai suatu pewarnaan graf dengan dua warna. Apabila semua simpul di  $U$  diberi warna biru, dan semua simpul di  $V$  diberi warna hijau, masing-masing sisi akan mempunyai ujung yang berbeda warna, sama halnya dengan ketentuan pada masalah pewarnaan graf. Namun demikian, pewarnaan demikian (dua warna) tidak mungkin dilakukan pada graf nonbipartit, misalnya segitiga: setelah satu simpul diberi warna biru dan simpul lain diberi warna hijau, simpul ketiga dari segitiga tersebut bertetangga dengan simpul-simpul yang mengandung kedua warna tersebut, sehingga harus ada satu warna lagi selain kedua warna tersebut. Gambar di bawah ini merupakan salah satu contoh dari graf bipartit dalam bentuk himpunan.[1]



Gambar 1. Contoh graf bipartit dalam bentuk himpunan

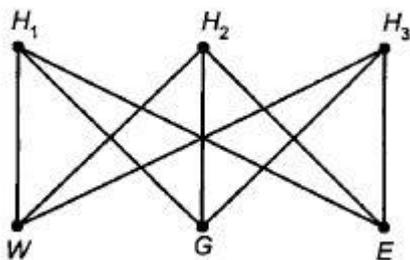
Apabila setiap simpul di  $U$  bertetangga dengan semua simpul di  $V$ , maka  $G(U, V)$  disebut sebagai **graf bipartit lengkap** (*complete bipartite graph*), dilambangkan dengan  $K_{m,n}$ , dengan  $m$  dan  $n$  masing-masing merupakan jumlah simpul di setiap himpunan ( $U$  dan  $V$ ), dan jumlah sisi pada graf bipartit lengkap adalah  $m \cdot n$ . Gambar berikut merupakan salah satu contoh graf bipartit lengkap dengan  $m = 5$  dan  $n = 3$ . [1]



Gambar 2. Contoh Graf Bipartit Lengkap

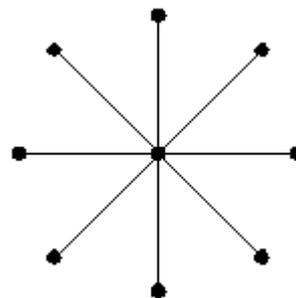
### C. Kegunaan Graf Bipartit

Contoh persoalan yang dapat dinyatakan sebagai graf bipartit adalah persoalan utilitas: misalkan ada tiga buah rumah:  $H_1$ ,  $H_2$ , dan  $H_3$ , masing-masing dihubungkan dengan tiga buah utilitas: air ( $W$ ), gas ( $G$ ), dan listrik ( $E$ ) dengan alat pengantar (pipa, kabel, dsb.) yang direpresentasikan dengan sisi-sisi pada graf. Graf yang merepresentasikannya adalah sebagai berikut. [1]



Gambar 3. Graf persoalan utilitas.

Salah satu contoh persoalan graf bipartit lainnya adalah topologi bintang (*star topology*) pada jaringan komputer LAN. Dalam hal ini,  $U$  berisi sebuah simpul sebagai pusat, sedangkan  $V$  berisi simpul-simpul lainnya yang merepresentasikan *client* pada topologi bintang. Graf tersebut adalah graf  $K_{1,n}$ . Berikut gambar grafnya. [1]



Gambar 3. Topologi bintang yang merupakan graf bipartit

### D. Pewarnaan Graf

Ada tiga macam persoalan pewarnaan graf, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Kita hanya akan fokus pada pewarnaan simpul saja.

Pewarnaan simpul adalah pemberian warna pada simpul-simpul dalam graf sedemikian rupa sehingga setiap dua simpul yang bertetangga / bersisian mempunyai warna yang berbeda.

Salah satu terapan penting pewarnaan graf adalah mewarnai peta (*colouring of map*). Misalkan kita diminta mewarnai sebuah peta yang terdiri atas sejumlah wilayah. Wilayah pada peta menyatakan provinsi, kabupaten, negara, dan lain-lain. Kita diminta mewarnai setiap wilayah di dalam peta sedemikian rupa sehingga tidak ada dua wilayah bertetangga yang mempunyai warna sama. Satu cara untuk menjamin bahwa dua buah wilayah bertetangga tidak mempunyai warna sama adalah menggunakan warna yang berbeda untuk setiap wilayah.

Di dalam persoalan pewarnaan graf, kita tidak hanya sekedar mewarnai simpul-simpul dengan warna berbeda dari warna simpul tetangganya saja, namun kita juga menginginkan jumlah macam warna yang digunakan sesedikit mungkin.

Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai simpul disebut bilangan kromatik graf. Suatu graf yang mempunyai bilangan kromatis  $k$  berarti graf tersebut dapat diwarnai hanya dengan  $k$  macam warna. [1]

### E. Kompleksitas waktu

Kompleksitas waktu,  $T(n)$ , adalah jumlah operasi yang dilakukan untuk melaksanakan algoritma sebagian fungsi dari ukuran masukan  $n$ . [1]

Sebagai contoh, tinjau algoritma menghitung rata-rata dari elemen-elemen pada sebuah larik. Operasi yang diperhitungkan disini adalah operasi penjumlahan elemen-elemen larik, yang mana dilaksanakan sebanyak  $n$  kali, yaitu sejumlah pengulangan dilakukan. Maka kompleksitas waktu algoritma hitung rata-rata adalah  $T(n) = n$ .

Seringkali kita kurang tertarik dengan kompleksitas waktu yang presisi untuk suatu algoritma, tetapi kita lebih tertarik pada bagaimana waktu terbaik dan waktu terburuk

tumbuh bersamaan dengan meningkatnya ukuran masukan. Disinilah digunakan notasi O-besar.

$T(n) = O(f(n))$  (dibaca “ $T(n)$  adalah  $O(f(n))$ ”) yang artinya  $T(n)$  berorde paling besar  $f(n)$  bila terdapat konstanta  $C$  dan  $n_0$  sedemikian sehingga

$$T(n) \leq C \cdot f(n)$$

Untuk  $n \geq n_0$ .

Makna notasi O-besar adalah jika sebuah algoritma mempunyai waktu asimptotik  $O(f(n))$ , maka jika  $n$  dibuat semakin besar, waktu yang dibutuhkanannya tidak akan pernah melebihi suatu konstanta  $C$  dikali dengan  $f(n)$ . Jadi,  $f(n)$  adalah batas atas dari  $T(n)$  untuk  $n$  yang besar. Kita katakan  $T(n)$  berorde paling besar  $f(n)$ .

### III. SOLUSI PENENTUAN GRAF BIPARTIT

#### A. Algoritma pewarnaan untuk graf bipartit

Kita gunakan 2 warna yaitu biru dan merah. Berikut adalah algoritmanya :[2]

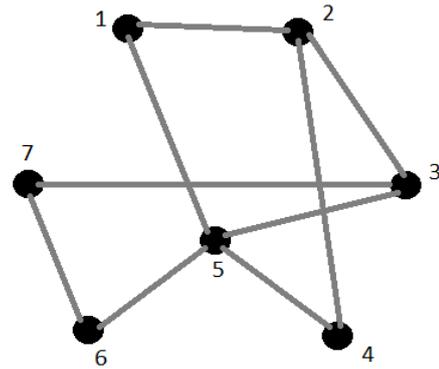
1. Pilih sebuah sembarang simpul dalam graf.
2. Warnai simpul yang dipilih tersebut dengan suatu warna, misalnya biru.
3. Warnai semua simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah kita warnai tadi dengan warna lawannya, dalam hal ini merah, kecuali jika tetangga dari simpul ini telah memiliki warna. Jika tetangga dari simpul ini sudah memiliki warna misalnya biru sementara kita tadinya akan mewarnai simpul ini dengan warna lawannya misalnya merah, maka proses dihentikan dan graf ini bukanlah graf bipartit. Jika tetangga dari simpul ini sudah memiliki warna dan warnanya sama dengan yang akan kita warnai, maka abaikan saja.
4. Pilih salah satu simpul tetangga yang baru saja diwarnai tadi, kemudian kembali ke langkah nomor 3. Lakukan hal ini pada semua tetangga. Jika tetangga pertama selesai, telusuri tetangga berikutnya, dan seterusnya.
5. Ulangi terus langkah 3-4 hingga semua simpul telah pernah dipilih/diwarnai.
6. Apabila semua simpul telah tertelusuri/terwarnai tanpa terjadi konflik (proses terhenti), maka graf tersebut berarti telah sukses diwarnai dengan 2 warna dan berarti graf tersebut adalah graf bipartit.

#### B. Analisa Kasus Algoritma Penentuan Graf

##### Bipartit

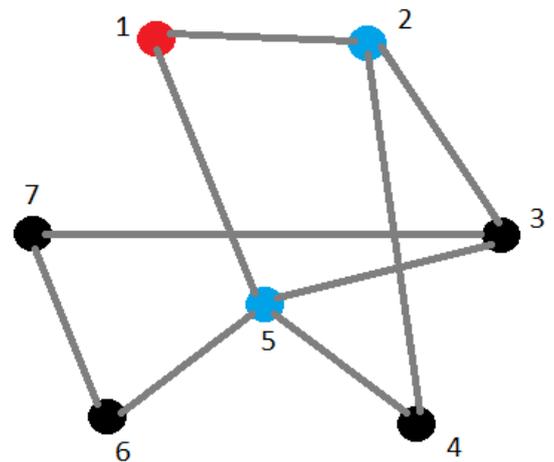
Algoritma akan diuji coba pada 2 graf, yang 1 merupakan graf bipartit dan 1 lagi bukan merupakan graf bipartit.

Contoh kasus 1 :

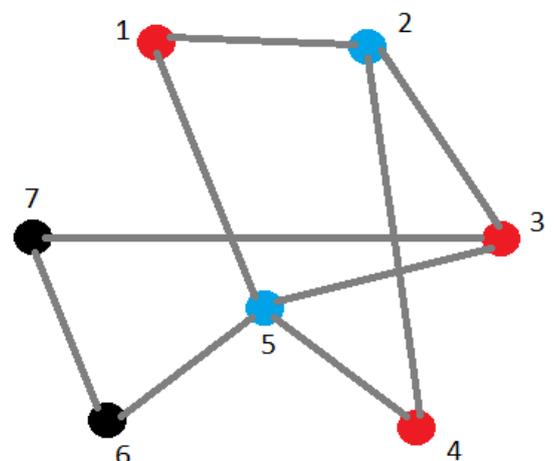


Gambar 4. Contoh graf untuk kasus 1

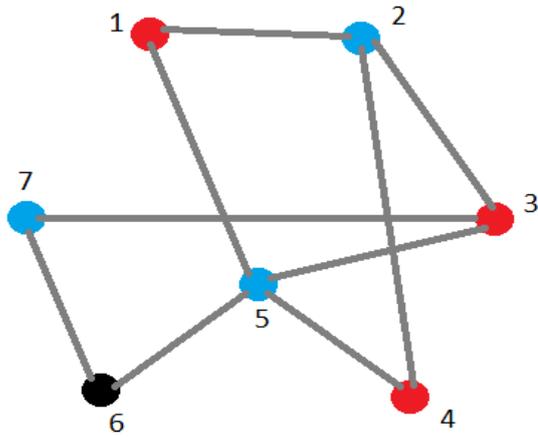
1. Pilih simpul 1, warnai simpul 1 dan tetangganya.



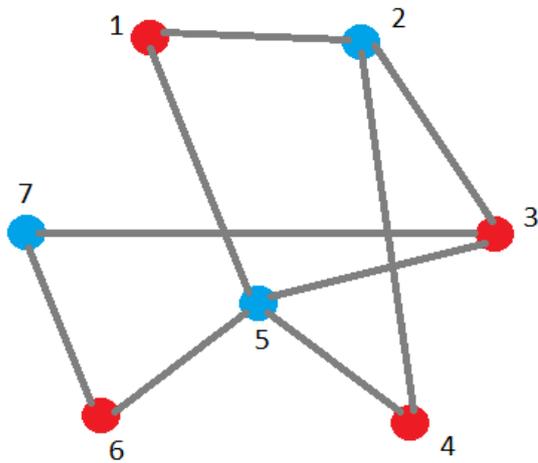
2. Pilih simpul 2, warnai tetangganya dengan warna lawannya. Karena simpul 1 sudah diwarnai dengan merah, abaikan.



3. Pilih simpul 3, warnai tetangganya dengan warna lawannya, karena simpul 5 sudah diwarnai biru, abaikan.

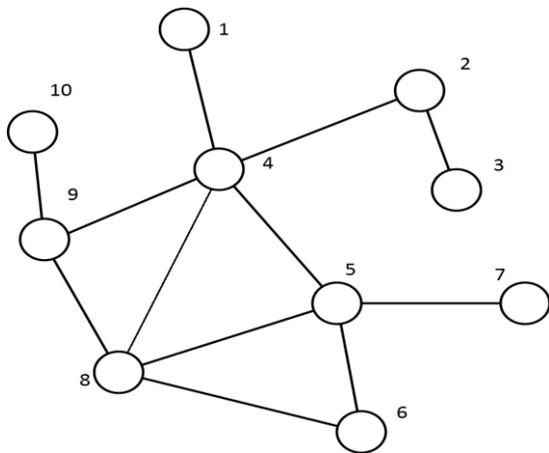


- Pilih simpul 5, warnai tetangganya, abaikan jika ada yang sudah terwarnai



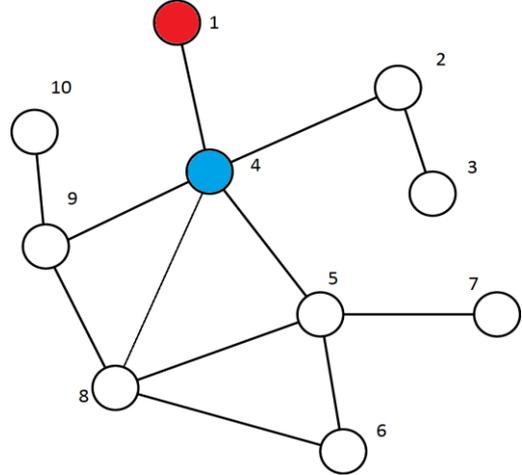
- Karena semua simpul telah diwarnai, proses berhenti dan graf sukses untuk disebut graf bipartit.

Contoh kasus 2 :

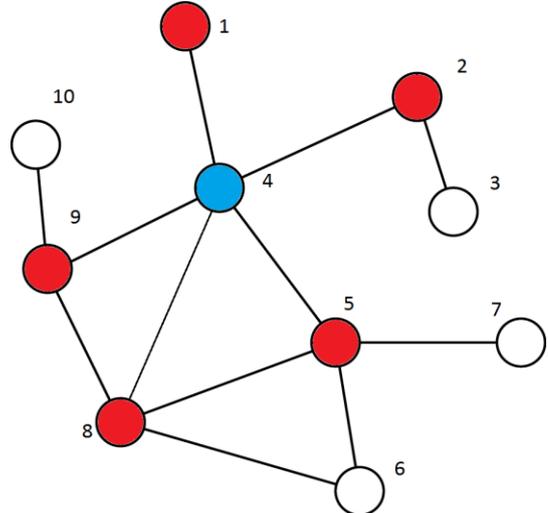


Gambar 5. Contoh Graf bukan Bipartit.

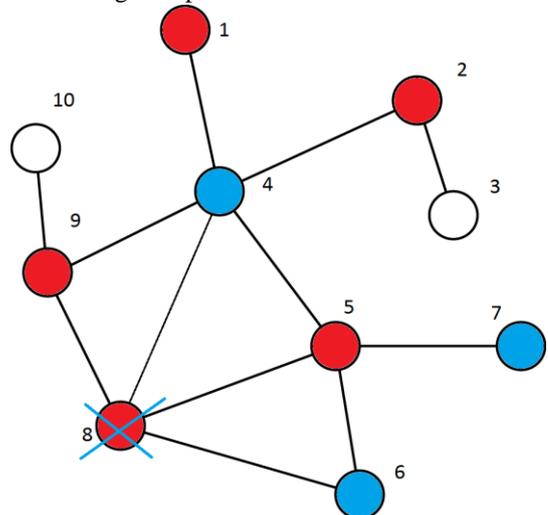
- Pilih simpul 1, warnai dengan warna merah, warnai seluruh tetangganya dengan warna biru.



- Pilih simpul 4, warnai tetangganya dengan warna lawannya yaitu warna merah.



- Pilih simpul 5, warnai tetangganya dengan warna lawannya yaitu warna biru. Tetapi kita lihat bahwa simpul 8 telah berwarna dan ia berwarna merah. Terjadi konflik. Algoritma berhenti dan graf ini bukanlah graf bipartit



#### IV. KOMPLEKSITAS ALGORITMA

Dari algoritma yang telah dijelaskan di atas, kita akan mencari kompleksitas waktu dari algoritma tersebut beserta notasi big-O nya.

Diketahui dari algoritma tersebut bahwa yang jadi fokus utama adalah proses pemilihan simpul dan penelusuran simpul.

Pada kasus dimana graf yang ditinjau merupakan graf bipartit, semua simpul akan diproses. Ini berarti  $T(V) = V$  dimana  $V$  adalah banyaknya simpul suatu graf. Lalu dari setiap simpul yang dipilih tersebut, kita akan mempertimbangkan simpul tetangganya. Namun apabila kita cermati, sisi-sisi yang akan ditelusuri hanyalah sisi-sisi yang menghubungkan antara simpul yang belum pernah dipilih. Maka  $T(V,E) = V + E$ , dimana  $E$  adalah banyaknya sisi dalam suatu graf. Untuk notasi big-O nya, kita dapat melakukan hal berikut :

$$T(V,E) = V + E = O(V+E).$$

#### V. KESIMPULAN

Sangatlah sulit untuk menentukan apakah suatu graf merupakan graf bipartit atau tidak jika hanya dilihat. Oleh karena alasan tersebut, diperlukan suatu algoritma yang mangkus yang dapat menentukan sifat bipartit suatu graf. Algoritma ini menerapkan pewarnaan graf dan cukup mangkus mengingat kompleksitasnya cukup kecil. Akan tetapi, perlu diingat bahwa ini merupakan kompleksitas teoritik. Jika kita ingin mengimplementasikan algoritma ini pada program, tentu kompleksitas ini akan berbeda, tergantung dengan representasi graf yang kita gunakan.

#### VI. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat rahmatnya penulis dapat menyelesaikan tulisan ini. Penulis juga berterimakasih kepada dosen pengajar Matematika Diskrit Bapak Ir.Rinaldi Munir dan Ibu Harlili, M.Sc karena berkat pengajarannya penulis memiliki pengetahuan tentang graf yang menjadi pokok bahasan disini.

Penulis juga berterima kasih atas dukungan teman-teman dalam penyelesaian tulisan ini.

#### REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF 2120, Matematika Diskrit, Edisi Keempat, Program Studi Teknik Informatika, STEI ITB, 2006.*
- [2] Wikipedia, *Bipartite Graph*  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Bipartite\\_graph](http://en.wikipedia.org/wiki/Bipartite_graph)  
Waktu Akses: 09 Desember 2016 pukul 21:00 WIB
- [3] GeeksforGeeks, *Check whether a given graph is bipartite or not*  
<http://www.geeksforgeeks.org/bipartite-graph/>  
Waktu Akses:09 Desember 2016 pukul 21:21 WIB

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2016



Gianfranco Fertino Hwandiano, 13515118