Penerapan Kombinatorial dan Pohon Untuk Menghitung Jumlah Acakan Rubiks

Aldrich Valentino Halim, 13515081[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13515081@std.stei.itb.ac.id, aldrich.vh97@gmail.com

***Abstak*—Rubiks adalah kubus yang sisinya memiliki enam warna berbeda dan dapat diputar searah maupun berlawanan arah jarum jam. Tujuan dari permainan rubiks adalah untuk mengelompokkan warna yang sama pada tiap sisi rubiks. Karena struktur dari sisi rubiks yang memungkinkan perputaran, ada banyak sekali kemungkinan muka rubiks. Muka rubiks akan bergantung dari banyaknya acakan yang dilakukan pada rubiks. Penulis akan menerapkan teori kombinatorial dan analisis pohon untuk menghitung berapakah jumlah muka rubiks yang ada dan berapa banyak acakan yang dibutuhkan untuk mendapatkan seluruh muka rubiks yang mungkin.**

***Kata Kunci*—rubiks, acakan, muka rubiks, kombinatorial, pohon.**

I. PENDAHULUAN

Kubus rubiks (Rubik's Cube) adalah permainan logika yang ditemukan oleh Erno Rubik pada tahun 1974. Walaupun tujuan dari permainan ini sangat mudah, orang-orang sangat penasaran terhadap bagaimana cara menyelesaikannya. Terdapat berbgai macam algoritma untuk menyelesaikan rubiks, contohnya *Layer by layer method* atau metode 7 langkah, *Friedrich CFOP method* (Cross F2L OLL PLL), *Raux method*, dan masih banyak lagi. Karena keseruan dari permainan ini, banyak sekali cabang lomba yang berkembang juga antara lain *speedcubing* yaitu menyelesaikan rubiks teracak secepat-cepatnya, *blindfold speedcubing* yaitu menyelesaikan rubiks secepat-cepatnya dengan mata tertutup, *one-handed solving* yaitu menyelesaikan rubiks dengan satu tangan, dsb. Namun, banyak orang kurang tertarik terhadap jumlah acakan yang mungkin pada rubiks ini.

Gambar 1 Rubiks yang teracak

Rubiks terdiri dari 26 buah *piece* kubus kecil yang tersebar pada enam buah sisi yang dapat diputar searah maupun berlawanan jarum jam. Hal ini dapat mengacak susunan muka rubiks dari yang tadinya sewarna menjadi tidak beraturan. Bila dilihat dengan cermat, rubiks terdiri dari tiga buah komponen, yaitu komponen yang memiliki satu warna (*center piece*), komponen dengan dua warna (*edge piece*), dan komponen dengan tiga warna (*corner piece*). Komponen tengah ini tetap. Karena keluwesan dari rubiks, maka akan ada banyak sekali kemungkinan muka rubiks yang terbentuk.

Dengan menggunakan teori kombinatorial, seluruh komponen rubiks dapat dimodelkan secara matematis dan dihitung berapa banyak kemungkinan dari muka rubiks yang dapat dibentuk. Selain dengan teori kombinatorial, dapat juga digunakan pohon sebagai alat untuk menghitung jumlah acakan rata-rata yang dibutuhkan untuk mendapatkan seluruh muka rubiks. Rubiks yang digunakan pada makalah ini adalah rubiks 3x3x3 atau rubiks dengan jumlah *piece* tiap sisinya adalah tiga.

II. LANDASAN TEORI

A. Kombinatorial

Kombinatorital adalah bagian dari ilmu matematika yang berfokus pada pengaturan objek-objek diskrit. Tujuan dari kombinatorial adalah untuk mencari banyaknya cara dalam mengatur objek-objek tertentu dengan aturan yang spesifik. Di dalam kombinatorial, terdapat dua buah kaidah dasar menghitung, yaitu kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan.

Kaidah perkalian (*rule of product*) digunakan untuk menghitung jumlah kemungkinan dari percobaan 1 **dan** percobaan 2. Kata 'dan' menandakan kedua percobaan dilakukan secara simultan. Sedangkan pada kaidah penjumlahan (*rule of sum*) digunakan untuk menghitung jumlah kemungkinan dari percobaan 1 **atau** percobaan 2. Kata 'atau' berarti kedua percobaan dilakukan secara tidak simultan.

Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen. Secara matematis dapat dirumuskan.

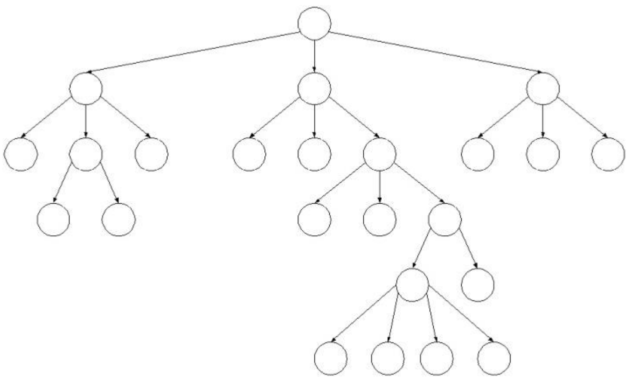
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Kombinasi adalah kasus khusus dalam permutasi, yaitu menghitung jumlah kemungkinan penyusunan objek tanpa memperhatikan pengurutan. Kombinasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan penyusunan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

B. Pohon

Pohon adalah graf terhubung tak berarah dan tidak memiliki sirkuit. Salah satu jenis pohon yang akan dimanfaatkan pada makalah ini adalah pohon berakar. Pohon berakar adalah salah satu aplikasi dari pohon di mana salah satu simpul dipilih sebagai akar (*root*) dan seluruh sisinya diberi arah. Simpul yang memiliki cabang simpul ke luar disebut *parent* dan yang tidak memiliki cabang ke luar disebut anak (*child*) atau daun (*leaf*). Tingkat (*level*) adalah lintasan terjauh untuk mencapai suatu daun. Akar memiliki *level* sama dengan nol. Salah satu penerapan pohon adalah untuk mendaftarkan seluruh keputusan yang dapat diambil dalam menyelesaikan sebuah masalah, sering disebut pohon keputusan.

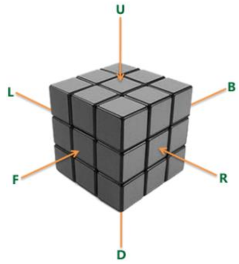


Gambar 2 Sebuah pohon dengan 5 level

C. Konvensi pada Rubiks

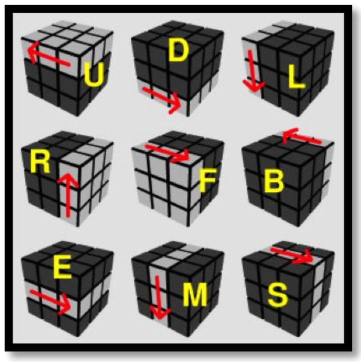
Rubiks memiliki enam buah sisi yang diwarnai dengan stiker yang unik. Dalam dunia internasional, warna yang sering digunakan adalah putih, merah, hijau, jingga, biru, kuning. Ketika rubiks diletakan di suatu tempat datar, maka akan terlihat tiga buah sisi muka rubiks, yaitu bagian atas (U), depan (F), dan kanan (R) atau kiri bergantung dari sisi mana kita melihat. Sisi yang tidak terlihat adalah sisi bawah (D), belakang (B), dan juga kiri (L).

Notasi untuk melakukan gerakan ada dua, yaitu searah atau berlawanan arah jarum jam. Gerakan dilakukan dengan meletakan sisi yang ingin diputar di hadapan wajah pemain. Gerakan yang searah jarum jam dinotasikan dengan huruf besar (U F D R2), sedangkan



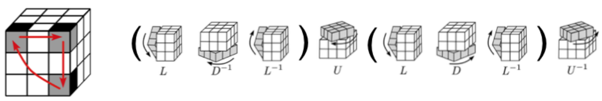
Gambar 3 Konvensi Sisi pada Rubiks

gerakan berlawanan arah jarum jam menggunakan tanda petik atau aksen (U’ L’). Selain putaran tunggal (*single turn*), terdapat juga putaran iris (*slice turn*) yang memutar lapis tengah dari rubiks. Secara ringkas dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 4 Notasi Gerakan pada Rubiks

Selain itu, beberapa algoritma yang dilakukan secara berulang dapat membuat muka rubiks kembali kepada bentuk asalnya. Contoh sederhananya adalah dengan menerapkan F F’ berulang kali pada rubiks tidak akan merusak muka rubiks yang lain. Algoritma semacam ini disebut sebagai sebuah siklus. Secara umum, siklus terdiri dari 4 sampai 8 buah gerakan. Berikut adalah contoh gerakan yang dapat menimbulkan siklus (*sequence* atau *cycle*).



Gambar 5 Siklus pada Rubiks

III. PERMODELAN MATEMATIS MUKA RUBIKS

A. Metode Pembentukan Muka Rubiks

Salah satu algoritma yang sering digunakan untuk menyusun muka rubiks adalah algoritma *old Pochmann method.* Metode ini cocok digunakan untuk permainan menyelesaikan rubiks dengan mata tertutup karena langkah pengerjaannya yang tidak merusak sisi rubiks (baik *edge* maupun *corner*) yang sudah jadi.

Dalam metode ini dikenal istilah *parity*, yaitu keadaan ketika muka rubiks yang sudah jadi secara tidak sengaja terganti atau dirusak. Kondisi *parity* untuk *edge piece* dan *corner piece* adalah 1. Angka 1 pada *parity* untuk *edge piece* berarti dalam menyusun sisi pinggir, ada kemungkinan untuk merusak 1 sisi pinggir lain yang sudah jadi. Ini berarti untuk setiap siklus yang dilakukan, ada kemungkinan 1 sisi lain tidak kembali ke posisi awalnya. Dengan kata lain, 1 sisi akan selalu bergantung pada penyusunan 11 buah sisi lainnya. Begitu juga dengan *corner piece*, yaitu dalam penyusunan 7 buah sisi pojok, akan selalu ada 1 sisi yang bergantung pada penyusunan 7 sisi pojok lainnya.

B. Permutasi untuk Sisi Ujung

Jumlah sisi ujung/pojok (*corner piece*) pada rubiks adalah delapan buah, dengan satu buah sisi ujung memiliki tiga buah muka warna. Karena itu, terdapat 8! buah pengurutan yang dapat dilakukan pada rubiks.

Selanjutnya, sisi ujung dapat diatur sedemikian rupa sehingga ia menghadap ke arah tertentu. Misalnya, sebuah sisi ujung merah-kuning-biru dapat diatur dengan posisi merah di atas atau kuning di atas atau biru di atas, dengan catatan bahwa axis dan oordinat rubiks tetap. Secara mudahnya dapat dikatakan setiap sisi tersebut memiliki 3 buah orientasi.

$$\sum \mathit{Orient\ corners} = (3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)$$

Namun, perlu diperhatikan bahwa saat dilakukan perubahan terhadap 7 buah *corner piece*, 1 *corner piece* yang lain akan menjadi variabel terikat pada perubahan tersebut. Dengan kata lain, hanya dapat dilakukan pengubahan terhadap 7 buah *corner piece*, sehingga persamaannya menjadi sebagai berikut.

$$\sum \mathit{Orient\ corners} = 3^7$$

C. Permutasi untuk Sisi Pinggir

Jumlah sisi pinggir (*edge piece*) pada rubiks adalah dua belas buah, dengan satu buah sisi pinggir memiliki dua buah muka warna. Karena itu, terdapat 12! buah pengurutan yang dapat dilakukan pada rubiks. Namun, secara alamiah, pertukaran sisi rubiks hanya akan dapat dilakukan per dua *edge piece*. Alasan mengapa hal tersebut dapat terjadi tidak dibahas pada makalah ini. Secara singkat, dapat dikatakan untuk mengatur seluruh *edge piece* pada rubiks harus dilakukan per dua blok, sehingga banyaknya permutasi menjadi 12!/2.

Selanjutnya, sisi pinggir dapat diatur sedemikian rupa sehingga ia menghadap ke arah tertentu. Misalnya, sebuah sisi pinggir merah-biru dapat diatur dengan posisi merah di kanan atau biru di kanan, dengan catatan bahwa axis dan oordinat rubiks tetap. Secara mudahnya dapat dikatakan setiap sisi tersebut memiliki 2 buah orientasi.

$$\sum O.E. = (2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)(2)$$

O.E. adalah Orient Edges

Namun, ketika menyusun kedua belas sisi pinggir ini, akan selalu ada 1 buah sisi pinggir yang bergantung pada penyusunan 11 buah sisi pinggir lainnya. Sehingga hanya ada 11 buah sisi pinggir yang dapat diatur orientasi.

$$\sum \mathit{Orient\ edges} = 2^{11}$$

D. Total Permutasi pada Muka Rubiks

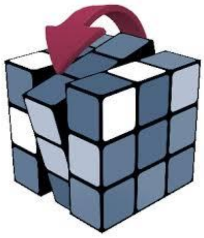
Dari persamaan yang didapat pada poin B dan pon C, maka dapat disimpulkan jumlah seluruh muka rubiks yang mungkin adalah sebagai berikut.

$$\sum \mathit{Face} = \frac{8! \cdot 3^7 \cdot 12! \cdot 2^{11}}{2} = 4.3252 \cdot 10^{19}$$

IV. Jumlah Langkah untuk Mendapatkan Seluruh Kemungkinan Muka Rubiks

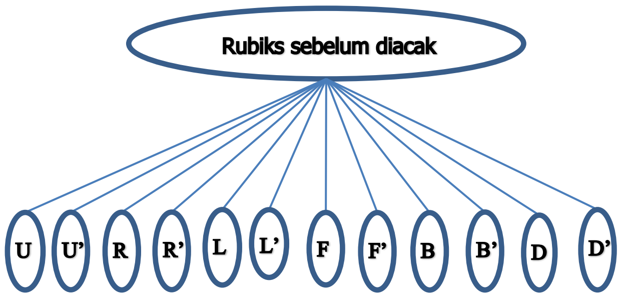
A. Pohon Keputusan dalam Rubiks

Dengan menggunakan pohon sebagai representasi keputusan, dapat dimodelkan jumlah gerakan yang dibutuhkan untuk mendapatkan semua kemungkinan muka rubiks. Pohon dimulai dari sebuah rubiks yang tidak teracak (1 muka). Akar akan memiliki 12 buah anak, melambangkan setiap gerakan *single turn* yang mungkin. Dalam pembuatan pohon ini, setiap gerakan 180^o akan dihitung sebagai dua buah gerakan. Lalu, putaran iris (*slice turn*) tidak diperbolehkan karena putaran iris secara garis besar adalah penyingkatan dua buah *single turn*, contohnya M’ setara dengan gerakan R L’. Perbedaannya adalah dalam *slice turn* terjadi perubahan axis, karena sisi tengah dari rubiks berubah.



Gambar 6 Gerakan M’ sama saja dengan R L’

Sehingga, setiap simpul pada pohon akan menggabarkan muka rubiks setelah dilakukan serangkaian algoritma.



Gambar 7 Pohon Keputusan dengan level 1

Level pada pohon akan menggambarkan banyaknya acakan yang sudah dilakukan terhadap rubiks. Seperti pada contoh pohon di atas, rubiks telah diacak dengan satu gerakan saja. Bila yang dilihat hanyalah muka terakhir dari rubiks, maka jumlah muka yang akan dihitung hanyalah muka rubiks pada simpul daun. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\sum Leaves = n^h$$

Pada persamaan, n adalah banyaknya cabang, yaitu pada kasus ini adalah banyaknya kemungkinan gerakan yang dilakukan pada rubiks. Sedangkan h adalah ketinggian dari pohon atau level dari pohon tersebut. Dengan mengambil n adalah 12 dan h adalah 18, maka akan didapat.

$$\sum Leaves = 12^{18} = 2.662 \cdot 10^{19}$$

Dengan 18 buah acakan saja, muka yang dihasilkan sudah hampir mencapai seluruh muka rubiks yang ada (sekitar 4.3 x 10^{19}). Namun, perlu diperhatikan bahwa banyak dari daun tersebut akan menghasilkan acakan yang sama karena membentuk suatu siklus. Misalkan, dengan mengulangi algoritma F F' sejumlah genap akan membuat rubiks kembali bentuk asalnya (tidak teracak). Bila diberikan 19 buah acakan pada rubiks maka akan menghasilkan sekitar 3.15 x 10^{20} buah muka rubiks.

Secara umum, acakan rubiks yang baik diperlukan sekitar 20 – 25 acakan secara acak. Maksud dari secara acak adalah tanpa memikirkan pola atau mengulangi gerakan yang sama secara berulang. Standard inilah yang digunakan dalam mengacak rubiks pada kompetisi internasional seperti yang telah ditetapkan oleh *World Cube Association* (WCA).

Gambar 8 Logo World Cube Association

Dengan memberi 20 – 25 acakan secara tak berpola, maka akan dipastikan setiap muka rubiks yang dihasilkan memiliki perbedaan yang seginifikan. Bahkan, bila digambarkan dengan pohon yang memiliki level 25, seluruh simpulnya akan memiliki muka rubiks yang berbeda. Bila diformulasikan ke dalam persamaan matematis, level pertama akan memiliki 12 buah anak, sedangakan untuk simpul-simpul lainnya hanya akan memiliki 11 buah anak (menghapus anak yang merepresentasikan gerakan aksen dari gerakan sebelumnya). Sehingga tidak akan terjadi siklus seperti F F' atau R R' secara berulang. Karena itu, pohon dapat dipecah menjadi 12 buah pohon yang memiliki 11 buah cabang dan memiliki level sebanyak 24. Untuk mencari jumlah simpul pada pohon akan digunakan rumus berikut.

$$\sum Nodes = \frac{n^{h+1}-1}{n-1} = \frac{11^{24+1}-1}{11-1} = 1.083 \cdot 10^{25}$$

Terdapat 12 pohon dengan jumlah simpul sebanyak 1.083 x 10^{25}, ditambah lagi dengan satu buah akar (rubiks awal yang tidak teracak), sehingga total buah muka rubiks yang dapat dicapai dengan 25 buah acakan adalah sebagai berikut.

$$\sum Nodes = (1.083 \cdot 10^{25}\ x\ 12) + 1 = 1.3 \cdot 10^{26}$$

Dari hasil tersebut, dapat dilihat bahwa dengan 25 gerakan, sudah dipastikan seluruh muka rubiks dapat dihasilkan. Namun, perhitungan ini masih memiliki kekurangan dalam memperhitungkan siklus yang terdiri dari 4 gerakan, seperti F F U U atau R'D'R D. Walaupun demikian, untuk kepentingan kompetisi dan mendapatkan acakan yang baik, 25 gerakan sudah dianggap cukup untuk membuat rubiks teracak dengan benar.

V. KESIMPULAN

Jumlah kemungkinan acakan rubiks yang dapat dihasilkan sangat banyak (berorde 10^{19}). Seluruh kemungkinan dari muka rubiks tersebut dapat dibuat dengan mengacak rubiks secara tak berpola. Dari pohon keputusan gerakan yang telah dimodelkan oleh penulis, rata-rata gerakan yang dibutuhkan untuk mencapai seluruh kemungkinan tersebut adalah diatas 20 gerakan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih pasti, penulis menyarankan untuk memperhatikan kemungkinan munculnya siklus dalam pengambilan gerakan. Lebih dari itu, untuk mendapatkan hasil yang lebih maksimal dapat digunakan pendekatan lain seperti menggunakan graf dan *subgroup*.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adi, Wicaksono. 2012. *Tip & Trik Jago Main Rubik*. Yogyakarta: Gradien Mediantama.

[2] https://www.worldcubeassociation.org/logo diakses tanggal 9 Desember 2016, pukul 10.30

[3] http://web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf diakses tanggal 5 Desember 2016, pukul 18.00

[3] http://steve-patterson.com/how-the-rubiks-cube-solves-all-paradoxes/ diakses tanggal 6 Desember 2016, pukul 20.00

[4] http://faculty.washington.edu/jstraub/dsa/slides/10N-ary%20Trees/100MultiLinkView.html diakses tanggal 6 Desember 2016, pukul 20.15

[5] https://www.codeproject.com/articles/322872/wpf-rubiks-cube diakses tanggal 6 Desember 2016, pukul 20.30

[6] https://chroniclesofcalculation.wordpress.com/tag/rubiks-cube/ diakses tanggal 6 Desember 2016, pukul 20.30

[7] http://www.sfu.ca/~jtmulhol/math302/puzzles-rc-basic-solution.html diakses tanggal 9 Desember 2016, pukul 10.00

[8] https://ruwix.com/the-rubiks-cube/notation/advanced/ diakses tanggal 9 Desember 2016, pukul 10.15

[9] Munir, Rinaldi. 2006. *Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit (Edisi Keempat)*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2016

Aldrich Valentino Halim, 13515081