



Teori Bilangan

Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit

Bilangan Bulat

- ✦ Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 21, 8765, -34, 0
- ✦ Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02.

Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat

✦ Misalkan a dan b bilangan bulat, $a \neq 0$.

a **habis membagi** b (a divides b) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$.

✦ Notasi: $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbf{Z}$ dan $a \neq 0$.

✦ **Contoh 1:** $4 \mid 12$ karena $12/4 = 3$ (bilangan bulat) atau $12 = 4 \times 3$. Tetapi $4 \nmid 13$ karena $13/4 = 3.25$ (bukan bilangan bulat).

Teorema Euclidean

Teorema 1 (Teorema Euclidean).

Misalkan m dan n bilangan bulat, $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r \quad (1)$$

dengan $0 \leq r < n$.

Contoh 2.

(i) $1987/97 = 20$, sisa 47:

$$1987 = 97 \cdot 20 + 47$$

(ii) $-22/3 = -8$, sisa 2:

$$-22 = 3(-8) + 2$$

tetapi $-22 = 3(-7) - 1$ salah

karena $r = -1$ (syarat $0 \leq r < n$)

Pembagi Bersama Terbesar (PBB)

- ✦ Misalkan a dan b bilangan bulat tidak nol.
- ✦ Pembagi bersama terbesar (PBB – **greatest common divisor** atau gcd) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian hingga $d \mid a$ dan $d \mid b$.
- ✦ Dalam hal ini kita nyatakan bahwa $PBB(a, b) = d$.

✦ Contoh 3.

Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45;

Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36;

Faktor pembagi bersama 45 dan 36: 1, 3, 9

$$\rightarrow \text{PBB}(45, 36) = 9.$$

✦ **Teorema 2.** Misalkan m dan n bilangan bulat, dengan syarat $n > 0$ sedemikian sehingga

$$m = nq + r \quad , \quad 0 \leq r < n$$

maka $\text{PBB}(m, n) = \text{PBB}(n, r)$

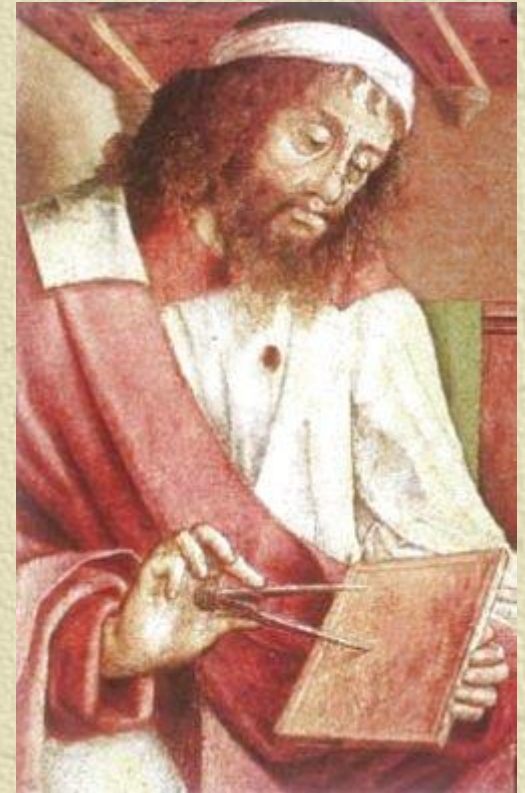
✦ **Contoh 4:** $m = 60, n = 18,$

$$60 = 18 \cdot 3 + 6$$

maka $\text{PBB}(60, 18) = \text{PBB}(18, 6) = 6$

Algoritma Euclidean

- ✦ Tujuan: algoritma untuk mencari PBB dari dua buah bilangan bulat.
- ✦ Penemu: Euclides, seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam buku, *Element*.





✦ Lukisan Euclides versi lain

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat tak negatif dengan $m \geq n$. Misalkan $r_0 = m$ dan $r_1 = n$.

Lakukan secara berturut-turut pembagian untuk memperoleh

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 \leq r_1, \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 \leq r_2, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n \leq r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_n q_n + 0 \end{aligned}$$

Menurut Teorema 2,

$$\begin{aligned} \text{PBB}(m, n) &= \text{PBB}(r_0, r_1) = \text{PBB}(r_1, r_2) = \dots = \\ &= \text{PBB}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{PBB}(r_{n-1}, r_n) = \text{PBB}(r_n, 0) = r_n \end{aligned}$$

Jadi, PBB dari m dan n adalah sisa terakhir yang tidak nol dari runtunan pembagian tersebut

Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n ($m \geq n$). Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n .

Algoritma Euclidean

1. Jika $n = 0$ maka

m adalah PBB(m, n);

stop.

tetapi jika $n \neq 0$,

lanjutkan ke langkah 2.

2. Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.

3. Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan nilai r , lalu ulang kembali ke langkah 1.

```

procedure Euclidean(input m, n : integer,
                    output PBB : integer)
{ Mencari PBB(m, n) dengan syarat n bilangan tak-negatif
  dan  $m \geq n$ 
  Masukan: m dan n,  $m \geq n$  dan  $m, n \geq 0$ 
  Keluaran: PBB(m, n)
}

```

Kamus

r : integer

Algoritma:

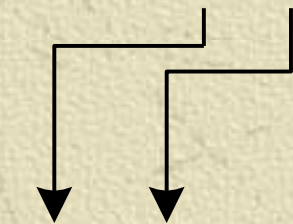
```

while n  $\neq$  0 do
    r  $\leftarrow$  m mod n
    m  $\leftarrow$  n
    n  $\leftarrow$  r
endwhile
{ n = 0, maka PBB(m,n) = m }
PBB  $\leftarrow$  m

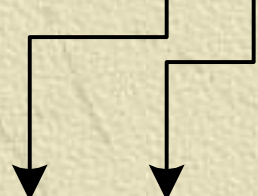
```

Contoh 4. $m = 80$, $n = 12$ dan dipenuhi syarat $m \geq n$

$$80 = 6 \cdot 12 + 8$$



$$12 = 1 \cdot 8 + 4$$



$$8 = 2 \cdot 4 + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 4, maka $\text{PBB}(80, 12) = 4$.

Kombinasi Lanjar

✦ PBB(a, b) dapat dinyatakan sebagai **kombinasi lanjar** (*linear combination*) a dan b dengan dengan koefisien-koefisennya.

✦ **Contoh 6:** $\text{PBB}(80, 12) = 4$,
$$4 = (-1) \cdot 80 + 7 \cdot 12.$$

✦ **Teorema 3.** Misalkan a dan b bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $\text{PBB}(a, b) = ma + nb$.

✧ **Contoh 7:** Nyatakan PBB(21, 45) sebagai kombinasi linier dari 21 dan 45.

✧ Solusi:

$$45 = 2(21) + 3$$

$$21 = 7(3) + 0$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 3, maka
PBB(45, 21) = 3

Substitusi dengan persamaan–persamaan di atas menghasilkan:

$$\mathbf{3 = 45 - 2(21)}$$

yang merupakan kombinasi linier dari 45 dan 21

Contoh 8: Nyatakan PBB(312, 70) sebagai kombinasi linier 312 dan 70.

Solusi: Terapkan algoritma Euclidean untuk memperoleh PBB(312, 70):

$$312 = 4 \cdot 70 + 32 \quad (\text{i})$$

$$70 = 2 \cdot 32 + 6 \quad (\text{ii})$$

$$32 = 5 \cdot 6 + 2 \quad (\text{iii})$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0 \quad (\text{iv})$$

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka **PBB(312, 70) = 2**

Susun pembagian nomor (iii) dan (ii) masing-masing menjadi

$$2 = 32 - 5 \cdot 6 \quad (\text{iv})$$

$$6 = 70 - 2 \cdot 32 \quad (\text{v})$$

Sulihkan (v) ke dalam (iv) menjadi

$$2 = 32 - 5 \cdot (70 - 2 \cdot 32) = 1 \cdot 32 - 5 \cdot 70 + 10 \cdot 32 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70 \quad (\text{vi})$$

Susun pembagian nomor (i) menjadi

$$32 = 312 - 4 \cdot 70 \quad (\text{vii})$$

Sulihkan (vii) ke dalam (vi) menjadi

$$2 = 11 \cdot 32 - 5 \cdot 70 = 11 \cdot (312 - 4 \cdot 70) - 5 \cdot 70 = 11 \cdot 312 - 49 \cdot 70$$

$$\text{Jadi, PBB}(312, 70) = 2 = 11 \cdot 312 - 49 \cdot 70$$

- ✦ Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga

$$ma + nb = 1$$

- ✦ **Contoh 10.** Bilangan 20 dan 3 adalah relatif prima karena $\text{PBB}(20, 3) = 1$, atau dapat ditulis

$$2 \cdot 20 + (-13) \cdot 3 = 1 \quad (m = 2, n = -13)$$

Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena $\text{PBB}(20, 5) = 5 \neq 1$ sehingga 20 dan 5 tidak dapat dinyatakan dalam $m \cdot 20 + n \cdot 5 = 1$.

Aritmetika Modulo

- ✦ Misalkan a dan m bilangan bulat ($m > 0$). Operasi $a \bmod m$ (dibaca “ a modulo m ”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m .
- ✦ Notasi: $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \leq r < m$.
- ✦ m disebut **modulus** atau **modulo**, dan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$.

✦ **Contoh 11.** Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:

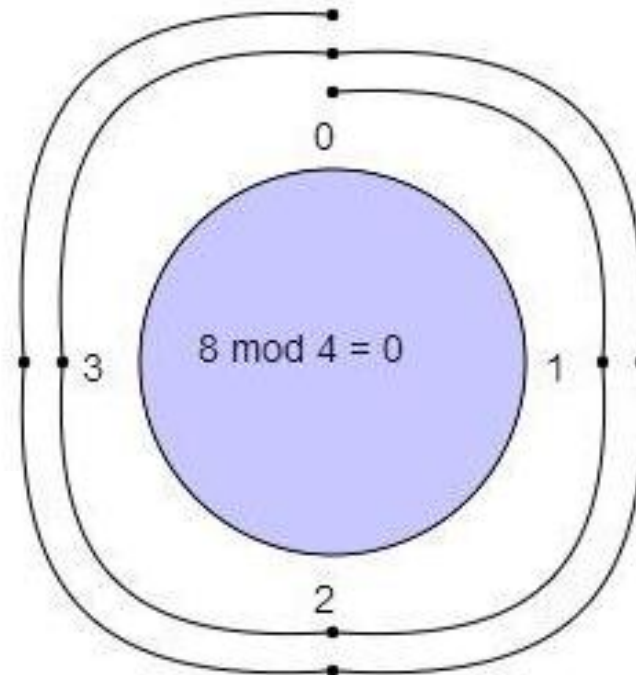
(i) $23 \bmod 5 = 3$	$(23 = 5 \cdot 4 + 3)$
(ii) $27 \bmod 3 = 0$	$(27 = 3 \cdot 9 + 0)$
(iii) $6 \bmod 8 = 6$	$(6 = 8 \cdot 0 + 6)$
(iv) $0 \bmod 12 = 0$	$(0 = 12 \cdot 0 + 0)$
(v) $-41 \bmod 9 = 4$	$(-41 = 9(-5) + 4)$
(vi) $-39 \bmod 13 = 0$	$(-39 = 13(-3) + 0)$

✦ *Penjelasan untuk (v):* Karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m mendapatkan sisa r' . Maka $a \bmod m = m - r'$ bila $r' \neq 0$. Jadi $|-41| \bmod 9 = 5$, sehingga $-41 \bmod 9 = 9 - 5 = 4$.

8 mod 4 = ?

With a modulus of 4 we make a clock with numbers 0,1,2,3

We start at 0 and go through 8 numbers in a clockwise sequence 1,2,3,0,1,2,3,0



We ended up at 0

so:

$$8 \bmod 4 = 0$$

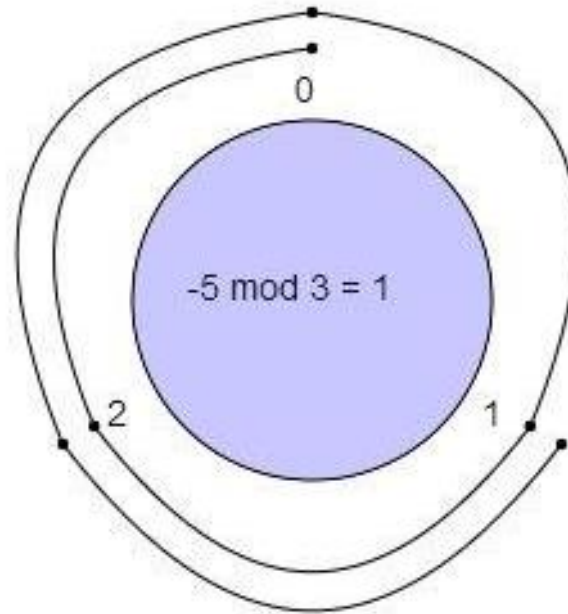
Sumber: www.khancademy.org

$-5 \bmod 3 = ?$

With a modulus of 3 we we make a clock with numbers 0,1,2

We start at 0 and go through 5 numbers in **counter-clockwise** sequence (5 is **negative**)

2,1,0,2,1



We ended up at 1

so:

$$-5 \bmod 3 = 1$$

Sumber: www.khanacademy.org

Aritmetika Modulo di dalam Wolfram Alpha

Kunjungi: www.wolframalpha.com

The image shows a screenshot of a web browser displaying the Wolfram Alpha website. The browser's address bar shows the URL www.wolframalpha.com. The page features a green background with a pattern of mathematical symbols. At the top, there is a navigation bar with options like 'Sign in', 'Settings', and 'Background colors'. A central white box contains the Wolfram Alpha logo and the text 'computational knowledge engine'. Below the logo, there is a search input field with the text '-41 mod 9' and a search button. The bottom of the page shows a Windows taskbar with several open applications, including 'start', 'Wolfram|Alpha: Com...', 'IF2120 Matematika Di...', 'Microsoft PowerPoint ...', and 'RencanaKuliah2014-2...'. The system clock in the bottom right corner shows '1:49 PM'.

File Edit View History Bookmarks Tools Help

Google Apps Kotak Masuk (4.6... Zimbra: Inbox (4... Catatanku | Ini a... Teknik Informatika ITB... ITB | Institut Tek... What is modular ... -41 mod 9 - ... http://info...is14-15.htm

www.wolframalpha.com/input/?i=-41+mod+9 Google

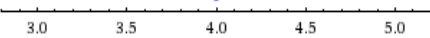
Most Visited Getting Started Latest Headlines Customize Links Free Hotmail Windows Marketplace Windows Media Windows

Input:
 $(-41) \bmod 9$

Result:
 4


Number name:
 four

Visual representation:
 ●●●●

Number line:


Integers congruent to 4 mod 9: More
 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, ...

Clock representation:


Share:




 more

New to Wolfram|Alpha?

 Take the Tour >>

Perplexed by a problem?


start -41 mod 9 - Wolfram|... IF2120 Matematika Di... Microsoft PowerPoint ... RencanaKuliah2014-2... 1:50 PM

Kongruen

✦ Misalnya $38 \bmod 5 = 3$ dan $13 \bmod 5 = 3$, maka dikatakan $38 \equiv 13 \pmod{5}$

(baca: 38 kongruen dengan 13 dalam modulo 5).

✦ Misalkan a dan b bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0 , maka $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $m \mid (a - b)$.

✦ Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m , maka ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$.

✦ **Contoh 12.**

$$17 \equiv 2 \pmod{3} \quad (3 \text{ habis membagi } 17 - 2 = 15)$$

$$-7 \equiv 15 \pmod{11}$$

$$(11 \text{ habis membagi } -7 - 15 = -22)$$

$$12 \not\equiv 2 \pmod{7}$$

$$(7 \text{ tidak habis membagi } 12 - 2 = 10)$$

$$-7 \not\equiv 15 \pmod{3}$$

$$(3 \text{ tidak habis membagi } -7 - 15 = -22)$$

Latihan

✦ Tentukan semua bilangan yang kongruen dengan 5 (mod 11).

✦ Penyelesaian: Misalkan bilangan yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah x .

$$x \equiv 5 \pmod{11}$$

Jadi, $11 \mid (x - 5)$, atau $\frac{x - 5}{11} = \text{bilangan bulat}$

✦ Nilai x yang memenuhi adalah 16, 27, 38, ..., lalu -6, -17, ...

✦ Jadi, nilai-nilai yang kongruen dengan 5 (mod 11) adalah ..., -17, -6, 16, 27, 38, ...

✦ $a \equiv b \pmod{m}$ dalam bentuk “sama dengan” dapat dituliskan sebagai

$$a = b + km \quad (k \text{ adalah bilangan bulat})$$

✦ **Contoh 13.**

$$17 \equiv 2 \pmod{3} \quad \rightarrow 17 = 2 + 5 \cdot 3$$

$$-7 \equiv 15 \pmod{11} \quad \rightarrow -7 = 15 + (-2)11$$

✦ $a \bmod m = r$ dapat juga ditulis $a \equiv r \pmod{m}$

✦ **Contoh 14.**

(i) $23 \bmod 5 = 3 \quad \rightarrow 23 \equiv 3 \pmod{5}$

(ii) $27 \bmod 3 = 0 \quad \rightarrow 27 \equiv 0 \pmod{3}$

(iii) $6 \bmod 8 = 6 \quad \rightarrow 6 \equiv 6 \pmod{8}$

(iv) $0 \bmod 12 = 0 \quad \rightarrow 0 \equiv 0 \pmod{12}$

(v) $-41 \bmod 9 = 4 \quad \rightarrow -41 \equiv 4 \pmod{9}$

(vi) $-39 \bmod 13 = 0 \quad \rightarrow -39 \equiv 0 \pmod{13}$

Teorema 4. Misalkan m adalah bilangan bulat positif,

1) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan c adalah sembarang bilangan bulat maka

(i) $(a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$

(ii) $ac \equiv bc \pmod{m}$

(iii) $a^p \equiv b^p \pmod{m}$, p bilangan bulat tak-negatif

2) Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$, maka

(i) $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$

(ii) $ac \equiv bd \pmod{m}$

Bukti (hanya untuk 1(ii) dan 2(i) saja):

1(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ berarti:

$$\Leftrightarrow a = b + km$$

$$\Leftrightarrow a - b = km$$

$$\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$$

$$\Leftrightarrow ac = bc + Km$$

$$\Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$



$$2(i) \quad a \equiv b \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad a = b + k_1m$$

$$c \equiv d \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad c = d + k_2m +$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$$

$$\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \quad (k = k_1 + k_2)$$

$$\Leftrightarrow (a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$$



Contoh 15.

Misalkan $17 \equiv 2 \pmod{3}$ dan $10 \equiv 4 \pmod{3}$,
maka menurut Teorema 4,

$$17 + 5 = 2 + 5 \pmod{3} \quad \Leftrightarrow \quad 22 = 7 \pmod{3}$$

$$17 \cdot 5 = 5 \cdot 2 \pmod{3} \quad \Leftrightarrow \quad 85 = 10 \pmod{3}$$

$$17 + 10 = 2 + 4 \pmod{3} \quad \Leftrightarrow \quad 27 = 6 \pmod{3}$$

$$17 \cdot 10 = 2 \cdot 4 \pmod{3} \quad \Leftrightarrow \quad 170 = 8 \pmod{3}$$

✦ Teorema 4 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi.

✦ **Contoh 16:**

$10 \equiv 4 \pmod{3}$ dapat dibagi dengan 2

karena $10/2 = 5$ dan $4/2 = 2$, dan $5 \equiv 2 \pmod{3}$

$14 \equiv 8 \pmod{6}$ tidak dapat dibagi dengan 2, karena $14/2 = 7$ dan $8/2 = 4$, tetapi $7 \not\equiv 4 \pmod{6}$.

Latihan

•
Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ adalah sembarang bilangan bulat maka buktikan bahwa
$$ac \equiv bd \pmod{m}$$

Solusi

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a = b + k_1m$$

$$c \equiv d \pmod{m} \rightarrow c = d + k_2m$$

maka

$$\Leftrightarrow ac = (b + k_1m)(d + k_2m)$$

$$\Leftrightarrow ac = bd + bk_2m + dk_1m + k_1k_2m^2$$

$$\Leftrightarrow ac = bd + Km \text{ dengan } K = bk_2 + dk_1 + k_1k_2m$$

$$\Leftrightarrow ac \equiv bd \pmod{m} \text{ (terbukti)}$$

Balikan Modulo (modulo invers)

- ✦ Di dalam aritmetika bilangan riil, balikan atau inversi (*inverse*) dari perkalian adalah pembagian.
- ✦ Contoh: Balikan 4 adalah $1/4$, sebab $4 \times 1/4 = 1$.
- ✦ Di dalam aritmetika modulo, masalah menghitung balikan modulo lebih sukar.

✦ **Syarat:** Jika a dan m relatif prima dan $m > 1$, maka balikan (*invers*) dari $a \pmod{m}$ ada.

✦ Balikan dari $a \pmod{m}$ adalah bilangan bulat x sedemikian sehingga:

$$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

✦ Dalam notasi lainnya, $a^{-1} \pmod{m} = x$

Bukti: a dan m relatif prima, jadi $\text{PBB}(a, m) = 1$, dan terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga:

$$xa + ym = 1$$

yang mengimplikasikan bahwa

$$xa + ym \equiv 1 \pmod{m}$$

Karena $ym \equiv 0 \pmod{m}$ (kenapa?), maka

$$xa \equiv 1 \pmod{m}$$

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa x adalah balikan dari $a \pmod{m}$. ■

✦ Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari $a \pmod{m}$, kita harus membuat kombinasi linier dari a dan m sama dengan 1.

✦ Koefisien a dari kombinasi linier tersebut merupakan balikan dari $a \pmod{m}$.

Contoh 17. Tentukan balikan dari $4 \pmod{9}$, $17 \pmod{7}$, dan $18 \pmod{10}$.

Penyelesaian:

(a) Karena $\text{PBB}(4, 9) = 1$, maka balikan dari $4 \pmod{9}$ ada.
Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

Susun persamaan di atas menjadi

$$-2 \cdot 4 + 1 \cdot 9 = 1$$

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh -2 adalah balikan dari $4 \pmod{9}$.

Periksa bahwa $-2 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{9}$

- ✦ (b) Karena $\text{PBB}(17, 7) = 1$, maka balikan dari 17 (mod 7) ada. Dari algoritma Euclidean diperoleh rangkaian pembagian berikut:

$$\begin{array}{l} 17 = 2 \cdot 7 + 3 \quad \text{(i)} \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \text{(ii)} \\ 3 = 3 \cdot 1 + 0 \quad \text{(iii)} \end{array} \quad \text{(yang berarti: } \text{PBB}(17, 7) = 1 \text{)}$$

Susun (ii) menjadi:

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 \quad \text{(iv)}$$

Susun (i) menjadi

$$3 = 17 - 2 \cdot 7 \quad \text{(v)}$$

Sulihkan (v) ke dalam (iv):

$$1 = 7 - 2 \cdot (17 - 2 \cdot 7) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 17 + 4 \cdot 7 = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17$$

atau

$$-2 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 1$$

Dari persamaan terakhir diperoleh -2 adalah balikan dari 17 (mod 7)

$$-2 \cdot 17 \equiv 1 \pmod{7} \quad (7 \text{ habis membagi } -2 \cdot 17 - 1 = -35)$$

Cara lain menghitung balikan

- ✦ Ditanya: balikan dari $a \pmod{m}$
- ✦ Misalkan x adalah balikan dari $a \pmod{m}$, maka

$$ax \equiv 1 \pmod{m} \text{ (definisi balikan modulo)}$$

atau dalam notasi ‘sama dengan’:

$$ax = 1 + km$$

atau

$$x = (1 + km)/a$$

Cobakan untuk $k = 0, 1, 2, \dots$ dan $k = -1, -2, \dots$

Solusinya adalah semua bilangan bulat yang memenuhi.

✦ **Contoh 18:** Balikan dari $4 \pmod{9}$ adalah x sedemikian sehingga $4x \equiv 1 \pmod{9}$

$$4x \equiv 1 \pmod{9} \rightarrow 4x = 1 + 9k \rightarrow x = (1 + 9k)/4$$

Untuk $k = 0 \rightarrow x$ tidak bulat

$k = 1 \rightarrow x$ tidak bulat

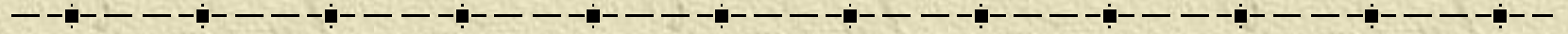
$k = 2 \rightarrow x$ tidak bulat

$$k = 3 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot 3)/4 = 7$$

$$k = -1 \rightarrow x = (1 + 9 \cdot -1)/4 = -2$$

Balikan dari $4 \pmod{9}$ adalah $7 \pmod{9}$,
 $-2 \pmod{9}$, dst

Latihan



✦ Tentukan semua balikan dari 9 (mod 11).

Solusi:

✦ Misalkan $9^{-1} \pmod{11} = x$

✦ Maka $9x \equiv 1 \pmod{11}$ atau $9x = 1 + 11k$ atau

$$x = (1 + 11k)/9$$

Dengan mencoba semua nilai k yang bulat ($k = 0, -1, -2, \dots, 1, 2, \dots$) maka

✦ diperoleh $x = 5$. Semua bilangan lain yang kongruen dengan $5 \pmod{11}$ juga merupakan solusi, yaitu $-6, 16, 27, \dots$

Kekongruenan Lanjar

✦ Kekongruenan lanjar berbentuk:

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

($m > 0$, a dan b sembarang bilangan bulat, dan x adalah peubah bilangan bulat).

Pemecahan: $ax = b + km \rightarrow x = \frac{b + km}{a}$

(Cobakan untuk $k = 0, 1, 2, \dots$ dan $k = -1, -2, \dots$ yang menghasilkan x sebagai bilangan bulat)

Contoh 19.

Tentukan solusi: $4x \equiv 3 \pmod{9}$ dan $2x \equiv 3 \pmod{4}$

Penyelesaian:

(i) $4x \equiv 3 \pmod{9}$

$$x = \frac{3 + k \cdot 9}{4}$$

$$k = 0 \rightarrow x = (3 + 0 \cdot 9)/4 = 3/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = 1 \rightarrow x = (3 + 1 \cdot 9)/4 = 3$$

$$k = 2 \rightarrow x = (3 + 2 \cdot 9)/4 = 21/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$k = 3, k = 4$ tidak menghasilkan solusi

$$k = 5 \rightarrow x = (3 + 5 \cdot 9)/4 = 12$$

...

$$k = -1 \rightarrow x = (3 - 1 \cdot 9)/4 = -6/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

$$k = -2 \rightarrow x = (3 - 2 \cdot 9)/4 = -15/4 \quad (\text{bukan solusi})$$

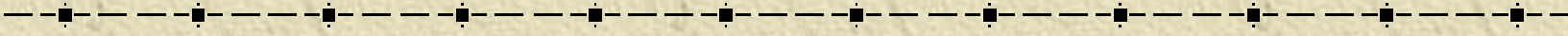
$$k = -3 \rightarrow x = (3 - 3 \cdot 9)/4 = -6$$

...

$$k = -6 \rightarrow x = (3 - 6 \cdot 9)/4 = -15$$

...

Nilai-nilai x yang memenuhi: $3, 12, \dots$ dan $-6, -15, \dots$



(ii) $2x \equiv 3 \pmod{4}$

$$x = \frac{3 + k \cdot 4}{2}$$

Karena $4k$ genap dan 3 ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi $2x \equiv 3 \pmod{5}$.

Cara lain menghitung solusi

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

✧ Seperti dalam persamaan biasa,

$4x = 12 \rightarrow$ kalikan setiap ruas dengan $1/4$ (yaitu invers 4), maka $1/4 \cdot 4x = 12 \cdot 1/4 \rightarrow x = 3$

✧ $4x \equiv 3 \pmod{9} \rightarrow$ kalikan setiap ruas dengan balikan dari 4 (mod 9) (dalam hal ini sudah kita hitung, yaitu -2)

$$(-2) \cdot 4x \equiv (-2) \cdot 3 \pmod{9} \Leftrightarrow -8x \equiv -6 \pmod{9}$$

Karena $-8 \equiv 1 \pmod{9}$, maka $x \equiv -6 \pmod{9}$. Semua blangan bulat yang kongruen dengan $-6 \pmod{9}$ adalah solusinya, yitu 3, 12, ..., dan $-6, -15, \dots$

Latihan

-
- ✦ Sebuah bilangan bulat jika dibagi dengan 3 bersisa 2 dan jika ia dibagi dengan 5 bersisa 3. Berapakah bilangan bulat tersebut

Solusi

Misal : bilangan bulat = x

$$x \bmod 3 = 2 \quad \rightarrow \quad x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \bmod 5 = 3 \quad \rightarrow \quad x \equiv 3 \pmod{5}$$

Jadi, terdapat sistem kekongruenan:

$$x \equiv 2 \pmod{3} \quad (\text{i})$$

$$x \equiv 3 \pmod{5} \quad (\text{ii})$$

Untuk kongruen pertama:

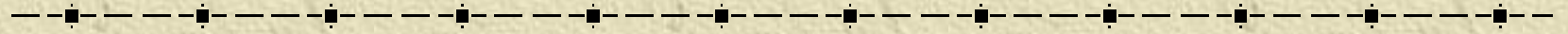
$$x = 2 + 3k_1 \quad (\text{iii})$$

Substitusikan (iii) ke dalam (ii):

$$2 + 3k_1 \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow 3k_1 \equiv 1 \pmod{5}$$

diperoleh

$$k_1 \equiv 2 \pmod{5} \text{ atau } k_1 = 2 + 5k_2$$



$$\begin{aligned}x &= 2 + 3k_1 \\ &= 2 + 3(2 + 5k_2) \\ &= 2 + 6 + 15k_2 \\ &= 8 + 15k_2\end{aligned}$$

atau

$$x \equiv 8 \pmod{15}$$

Semua nilai x yang kongruen dengan 8 (mod 15) adalah solusinya, yaitu

$$x = 8, \quad x = 23, \quad x = 38, \quad \dots, \quad x = -7, \text{ dst}$$

Chinese Remainder Problem



-
- ✦ Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

- ✦ Misakan bilangan bulat tersebut = x . Formulasikan kedalam sistem kongruen lanjar:

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 7 \pmod{11}$$

Teorema 5. (*Chinese Remainder Theorem*)

Misalkan m_1, m_2, \dots, m_n adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga $\text{PBB}(m_i, m_j) = 1$ untuk $i \neq j$. Maka sistem kongruen linier

$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

mempunyai sebuah solusi unik dalam modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$.

Contoh 15.

Tentukan solusi dari pertanyaan Sun Tse di atas.

Penyelesaian:

$$x \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow x = 3 + 5k_1 \text{ (i)}$$

Sulihkan (i) ke dalam kongruen kedua menjadi:

$$3 + 5k_1 \equiv 5 \pmod{7} \rightarrow k_1 \equiv 6 \pmod{7}, \text{ atau } k_1 = 6 + 7k_2 \text{ (ii)}$$

Sulihkan (ii) ke dalam (i):

$$x = 3 + 5k_1 = 3 + 5(6 + 7k_2) = 33 + 35k_2 \text{ (iii)}$$

Sulihkan (iii) ke dalam kongruen ketiga menjadi:

$$33 + 35k_2 \equiv 7 \pmod{11} \rightarrow k_2 \equiv 9 \pmod{11} \text{ atau } k_2 = 9 + 11k_3.$$

Sulihkan k_2 ini ke dalam (iii) menghasilkan:

$$x = 33 + 35(9 + 11k_3) = 348 + 385k_3$$

atau $x \equiv 348 \pmod{385}$. Ini adalah solusinya.

348 adalah bilangan bulat positif terkecil yang merupakan solusi sistem kekongruenan di atas. Perhatikan bahwa $348 \pmod{5} = 3$, $348 \pmod{7} = 5$, dan $348 \pmod{11} = 7$. Catatlah bahwa $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.

✦ Solusi unik ini mudah dibuktikan sebagai berikut.
Solusi tersebut dalam modulo:

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 5 \cdot 77 = 11 \cdot 35.$$

Karena $77 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$,

$$55 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$35 \cdot 6 \equiv 1 \pmod{11},$$

maka solusi unik dari sistem kongruen tersebut adalah

$$x \equiv 3 \cdot 77 \cdot 3 + 5 \cdot 55 \cdot 6 + 7 \cdot 35 \cdot 6 \pmod{385}$$

$$\equiv 3813 \pmod{385}$$

$$\equiv 348 \pmod{385}$$

Bilangan Prima

- ✦ Bilangan bulat positif p ($p > 1$) disebut bilangan prima jika pembagiannya hanya 1 dan p .
- ✦ Contoh: 23 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagi oleh 1 dan 23.

-
- ✦ Karena bilangan prima harus lebih besar dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2, yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13,
 - ✦ Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil, kecuali 2 yang merupakan bilangan genap.
 - ✦ Bilangan selain prima disebut bilangan **komposit** (*composite*). Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 sendiri.

Teorema 6. (*The Fundamental Theorem of Arithmetic*). Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh 16.

$$9 = 3 \times 3$$

$$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

$$13 = 13 \quad (\text{atau } 1 \times 13)$$

✦ Tes bilangan prima:

(i) bagi n dengan sejumlah bilangan prima, mulai dari 2, 3, ... , bilangan prima $\leq \sqrt{n}$.

(ii) Jika n habis dibagi dengan salah satu dari bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan komposit,

(ii) tetapi jika n tidak habis dibagi oleh semua bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan prima.

✦ **Contoh 17.** Tes apakah (i) 171 dan (ii) 199 merupakan bilangan prima atau komposit.

Penyelesaian:

(i) $\sqrt{171} = 13.077$. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.

(ii) $\sqrt{199} = 14.107$. Bilangan prima yang $\leq \sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Karena 199 tidak habis dibagi 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

✦ **Teorema 6 (Teorema Fermat).** Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p , yaitu $\text{PBB}(a, p) = 1$, maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Contoh 18. Tes apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan dengan Teorema Fermat

~~Ambil $a = 2$, karena $PBB(17, 2) = 1$ dan $PBB(21, 2) = 1$.~~

(i) $2^{17-1} = 65536 \equiv 1 \pmod{17}$

karena 17 habis membagi $65536 - 1 = 65535$

Jadi, 17 prima.

(ii) $2^{21-1} = 1048576 \not\equiv 1 \pmod{21}$

karena 21 tidak habis membagi $1048576 - 1 = 1048575$.

Jadi, 21 bukan prima

- ✦ Kelemahan Teorema Fermat: terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan **prima semu** (*pseudoprimes*).

-
- ✦ Contoh: 341 adalah komposit (karena $341 = 11 \cdot 31$) sekaligus bilangan prima semu, karena menurut teorema Fermat,

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$$

- ✦ Untunglah bilangan prima semu relatif jarang terdapat.
- ✦ Untuk bilangan bulat yang lebih kecil dari 10^{10} terdapat 455.052.512 bilangan prima, tapi hanya 14.884 buah yang merupakan bilangan prima semu terhadap basis 2.

Latihan

Hitunglah sisa pembagian 2^{2020} dibagi dengan 73

Penyelesaian: Dengan menggunakan teorema Fermat kita dapat mengetahui bahwa $2^{72} \equiv 1 \pmod{73}$.

$$\begin{aligned} 2^{2020} &\equiv (2^{72})^{28} \cdot 2^4 \pmod{73} \\ &\equiv (1)^{28} \cdot 2^4 \pmod{73} \\ &\equiv 2^4 \pmod{73} \\ &\equiv 16 \pmod{73} = 16 \end{aligned}$$

Jadi sisa pembagiannya adalah 16

Latihan

Tiga kemunculan terakhir komet Halley adalah pada tahun 1835, 1910, dan 1986. Kemunculan berikutnya diprediksi akan terjadi pada tahun 2061. Dengan bantuan Teorema Fermat buktikan bahwa $1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 0 \pmod{7}$

Jawaban: Karena 7 adalah bilangan prima dan $7 \nmid 1835$ serta $7 \nmid 1986$ maka soal ini memenuhi syarat Teorema Fermat.

Selanjutnya berdasarkan teorema fermat

$$1835^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1835^{1910} \pmod{7} \equiv 1835^{6 \cdot 318 + 2} \pmod{7} \equiv 1835^2 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1986^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$1986^{2061} \pmod{7} \equiv 1986^{6 \cdot 343 + 3} \pmod{7} \equiv 1986^3 \pmod{7} \equiv 5^3 \pmod{7} \equiv 6 \pmod{7}$$

Maka,

$$1835^{1910} + 1986^{2061} \equiv 1 + 6 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$$

Aplikasi Teori Bilangan

- ✦ *ISBN (International Book Serial Number)*
- ✦ Fungsi *hash*
- ✦ Kriptografi
- ✦ Pembangkit bilangan acak-semu
- ✦ dll



ISBN

✦ Kode ISBN terdiri dari 10 karakter, biasanya dikelompokkan dengan spasi atau garis, misalnya 0–3015–4561–9.

✦ ISBN terdiri atas empat bagian kode:

- kode yang mengidentifikasi negara atau kelompok negara,
- kode penerbit,
- kode unik untuk buku tersebut,
- karakter uji (angka atau huruf X (=10)).

✦ Karakter uji dipilih sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i \equiv 0 \pmod{11}$$

✦ Karakter uji

$$\left(\sum_{i=1}^9 ix_i \right) \pmod{11} = \text{karakter uji}$$

✦ Contoh: ISBN 0–3015–4561–8

0 : kode kelompok negara berbahasa Inggris,

~~3015~~ : ~~kode penerbit~~ -----

4561 : kode unik buku yang diterbitkan

8 : karakter uji.

Karakter uji ini didapatkan sebagai berikut:

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + \\ 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 151$$

✦ Jadi, karakter ujinya adalah $151 \bmod 11 = 8$.

Fungsi *Hash*

✦ Tujuan: pengalamatan di memori untuk tujuan pengaksesan data dengan cepat.

✦ Bentuk: $h(K) = K \bmod m$

- m : jumlah lokasi memori yang tersedia

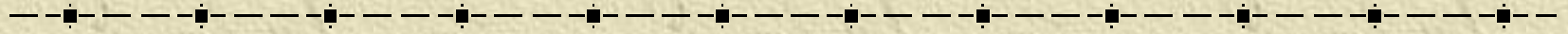
- K : kunci (*integer*)

- $h(K)$: lokasi memori untuk *record* dengan kunci unik K

Contoh: data record mahasiswa, NIM adalah kunci (K)

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598011	Amir	Matematika Diskrit	A
13598011	Amir	Arsitektur Komputer	B
13598014	Santi	Algoritma	D
13598015	Irwan	Algoritma	C
13598015	Irwan	Struktur Data	C
13598015	Irwan	Arsitektur Komputer	B
13598019	Ahmad	Algoritma	E
13598021	Cecep	Algoritma	B
13598021	Cecep	Arsitektur Komputer	B
13598025	Hamdan	Matematika Diskrit	B
13598025	Hamdan	Algoritma	A
13598025	Hamdan	Struktur Data	C
13598025	Hamdan	Arsitektur Komputer	B

Contoh: $m = 11$ mempunyai sel-sel memori yang diberi indeks 0 sampai 10. Akan disimpan data *record* yang masing-masing mempunyai kunci 15, 558, 32, 132, 102, dan 5.



$$h(15) = 15 \bmod 11 = 4$$

$$h(558) = 558 \bmod 11 = 8$$

$$h(32) = 32 \bmod 11 = 10$$

$$h(132) = 132 \bmod 11 = 0$$

$$h(102) = 102 \bmod 11 = 3$$

$$h(5) = 5 \bmod 11 = 5$$

132			102	15	5			558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

❖ Kolisi (*collision*) terjadi jika fungsi *hash* menghasilkan nilai *h* yang sama untuk *K* yang berbeda.

❖ Jika terjadi kolisi, cek elemen berikutnya yang kosong.

Contoh: $K = 74 \rightarrow h(74) = 74 \bmod 11 = 8$

132			102	15	5			558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Oleh karena elemen pada indeks 8 sudah berisi 558, maka 74 ditaruh pada elemen kosong berikutnya: 9

132			102	15	5			558	74	32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

❖ Fungsi *hash* juga digunakan untuk *me-locate* elemen yang dicari.

Kriptografi



- ✦ Dari Bahasa Yunani yang artinya “*secret writing*”
- ✦ **Kriptografi** adalah ilmu dan seni untuk menjaga keamanan pesan dengan cara menyandikannya menjadi bentuk lain yang tidak bermakna.
- ✦ Tujuan: agar pesan yang bersifat rahasia tidak dapat dibaca oleh pihak yang tidak berhak.

✦ **Pesan:** data atau informasi yang dapat dibaca dan dimengerti maknanya. Nama lain: **plainteks** (*plaintext*)

✦ **Cipherteks** (*ciphertext*): pesan yang telah disandikan sehingga tidak memiliki makna lagi.

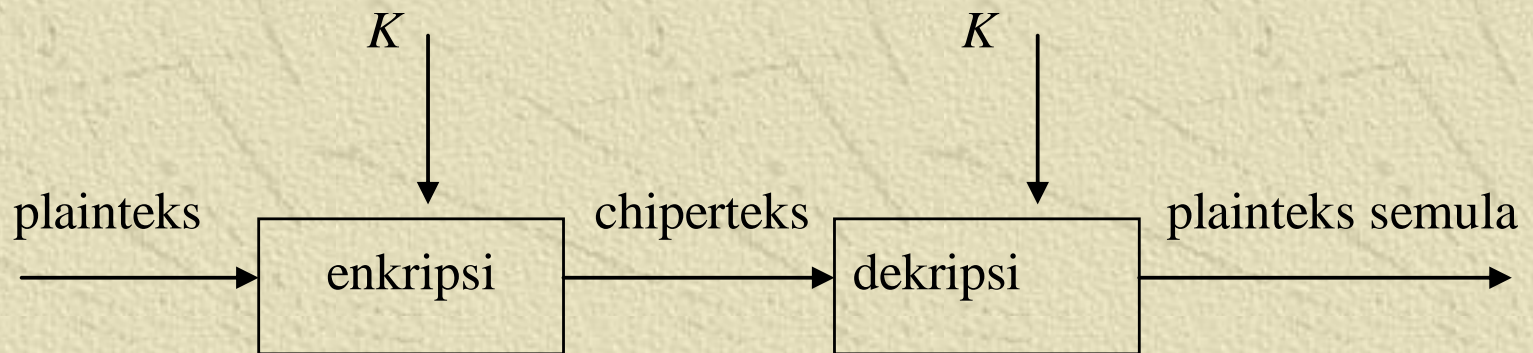
Contoh:

Plainteks: culik anak itu jam 11 siang

Cipherteks: t^\$gfUi9rewoFpfdWqL: [uTcxZy

✦ **Enkripsi** (*encryption*): proses menyandikan plainteks menjadi cipherteks.

✦ **Dekripsi** (*decryption*): Proses mengembalikan cipherteks menjadi plainteksnya.



Aplikasi Enkripsi-Dekripsi

1. Pengiriman data melalui saluran komunikasi (*data encryption on motion*).
→ pesan dikirim dalam bentuk cipherteks
2. Penyimpanan data di dalam *disk storage* (*data encryption at rest*)
→ data disimpan di dalam memori dalam bentuk cipherteks

-
- ✦ Data ditransmisikan dalam bentuk ciperteks. Di tempat penerima ciperteks dikembalikan lagi menjadi plainteks.
 - ✦ Data di dalam media penyimpanan komputer (seperti *hard disk*) disimpan dalam bentuk ciperteks. Untuk membacanya, hanya orang yang berhak yang dapat mengembalikan ciperteks menjadi plainteks.

Contoh enkripsi pada dokumen

Plainteks (plain.txt):

Ketika saya berjalan-jalan di pantai, saya menemukan banyak sekali kepiting yang merangkak menuju laut. Mereka adalah anak-anak kepiting yang baru menetas dari dalam pasir. Naluri mereka mengatakan bahwa laut adalah tempat kehidupan mereka.

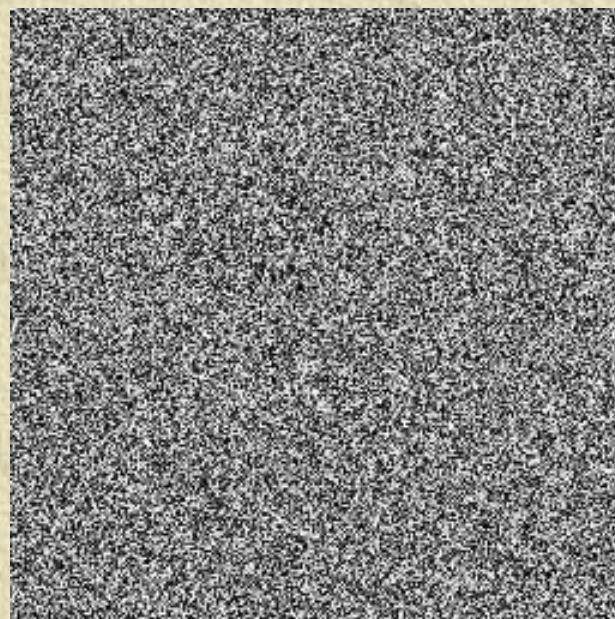
Cipherteks (cipher.txt):

```
Ztâxzp/épêp/qtüyp{p}<yp{p}/sx/□p}âpx;  
□□épêp/|t}t|âzp}/qp}êpz/étzp{x/zt□xâx  
}v□□ép}v/|tüp}vzpz/|t}âyä/{päâ=/\tütz  
p□□psp{pw/p}pz<p}pz/zt□xâx}v/êp}  
v/qpüä□□|t}tâpé/spüx/sp{p|/□péxü=/  
p{äüx□□|ttüzp/|t}vpâpzp}/qpwâp/{päâ  
/psp{pw□□ât|□pâ/ztwxsä□p}/|tützp=
```

Plainteks (lena .bmp):



Cipherteks (lena2 .bmp):



Plainteks (siswa.dbf):

NIM	Nama	Tinggi	Berat
000001	Elin Jamilah	160	50
000002	Fariz RM	157	49
000003	Taufik Hidayat	176	65
000004	Siti Nurhaliza	172	67
000005	Oma Irama	171	60
000006	Aziz Burhan	181	54
000007	Santi Nursanti	167	59
000008	Cut Yanti	169	61
000009	Ina Sabarina	171	62

Cipherteks (siswa2.dbf):

NIM	Nama	Tinggi	Berat
000001	tüp}vzpz/ t}äyâ/{ää	äzp}	épêp
000002	□□ t}tâpé/spüx/sp	péxü=	ztwxsä□
000003	□□ât □pâ/ztwxsä□p}/	}/ tü	spüx/
000004	épêp/ t}t äzp}/qpêpz	qp}êpz	wxsä
000005	étzp{x/zt□xâx}v□□êp}	pää/psp	étzp{
000006	spüx/sp{p /□péxü=/>]	xâx}v	ttüzp/
000007	Ztâxzp/épêp/qtüypp}<	äzp}	}äyâ/{
000008	qpwap/{pää/psp{pw□	Ztwxs	xâx}v□□
000009	}t äzp}/qp}êpz/ép{	qp}êp	äzp}/qp

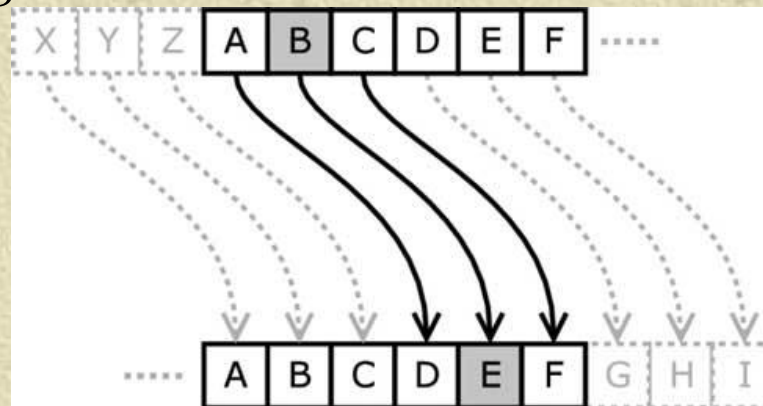
Keterangan: hanya *field* Nama, Berat, dan Tinggi yang dienkrpsi.

Caesar Cipher



✦ Algoritma enkripsi sederhana pada masa raja Julius Caesar

✦ Tiap huruf alfabet digeser 3 huruf ke kanan secara *wrapping*



Contoh: Plainteks: AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

 Cipherteks: **DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBA REHOLA**

Copyright (c) 1999 Les Editions Albert René / Goscinny-Uderzo



✦ Misalkan setiap huruf dikodekan dengan angka:

✦ $A = 0, B = 1, C = 2, \dots, Z = 25$

maka secara matematis enkripsi dan dekripsi pada Caesar *cipher* dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Enkripsi: } c_i = E(p_i) = (p_i + 3) \bmod 26$$

$$\text{Dekripsi: } p_i = D(c_i) = (c_i - 3) \bmod 26$$

Contoh:

Plainteks: AWASI ASTERIX DAN TEMANNYA OBELIX

Cipherteks: **DZDVL DVWHULA GDQ WHPDQQBD REHOLA**

$$p_1 = 'A' = 0 \rightarrow c_1 = E(0) = (0 + 3) \bmod 26 = 3 = 'D'$$

$$p_2 = 'W' = 22 \rightarrow c_2 = E(22) = (22 + 3) \bmod 26 = 25 = 'Z'$$

$$p_3 = 'A' = 0 \rightarrow c_3 = E(0) = (0 + 3) \bmod 26 = 3 = 'D'$$

$$p_4 = 'S' = 18 \rightarrow c_4 = E(18) = (18 + 3) \bmod 26 = 21 = 'V'$$

dst...

✦ Jika pergeseran huruf sejauh k , maka:

$$\text{Enkripsi: } c_i = E(p_i) = (p_i + k) \bmod 26$$

$$\text{Dekripsi: } p_i = D(c_i) = (c_i - k) \bmod 26$$

k = kunci rahasia

- Pada *Caesar Cipher*, $k = 3$
- Untuk alfabet ASCII 256 karakter,

$$\text{Enkripsi: } c_i = E(p_i) = (p_i + k) \bmod 256$$

$$\text{Dekripsi: } p_i = D(c_i) = (c_i - k) \bmod 256$$

```

program enkripsi;
{ Mengenkripsi berkas 'plain.txt'
  menjadi 'cipher.txt' dengan
  metode caesar cipher }
uses
  crt;
var
  F1, F2 : text;
  p : char;
  c : integer;
  k : integer;

begin
  assign(F1, 'plain.txt');
  reset(F1);

  assign(F2, 'cipher.txt');
  rewrite(F2);

  write('k = ?'); readln(k);
  while not EOF(F1) do
    begin
      while not EOLN(F1) do
        begin
          read(F1, p);
          c := (ord(p) + k) mod 256;
          write(F2, chr(c));
        end;
      readln(F1);
      writeln(F2);
    end;
  close(F1);
  close(F2);
end.

```

```

program dekripsi;
{ Mendekripsi berkas 'cipher.txt'
  menjadi 'plain2.txt' dengan
  metode caesar cipher }
uses
  crt;
var
  F1, F2 : text;
  p : char;
  c : integer;
  k : integer;

begin
  assign(F1, 'cipher.txt');
  reset(F1);

  assign(F2, 'plain2.txt');
  rewrite(F2);

  write('k = ?'); readln(k);
  while not EOF(F1) do
    begin
      while not EOLN(F1) do
        begin
          read(F1, p);
          c := (ord(p) - k) mod 256;
          write(F2, chr(c));
        end;
      readln(F1);
      writeln(F2);
    end;
  close(F1);
  close(F2);
end.

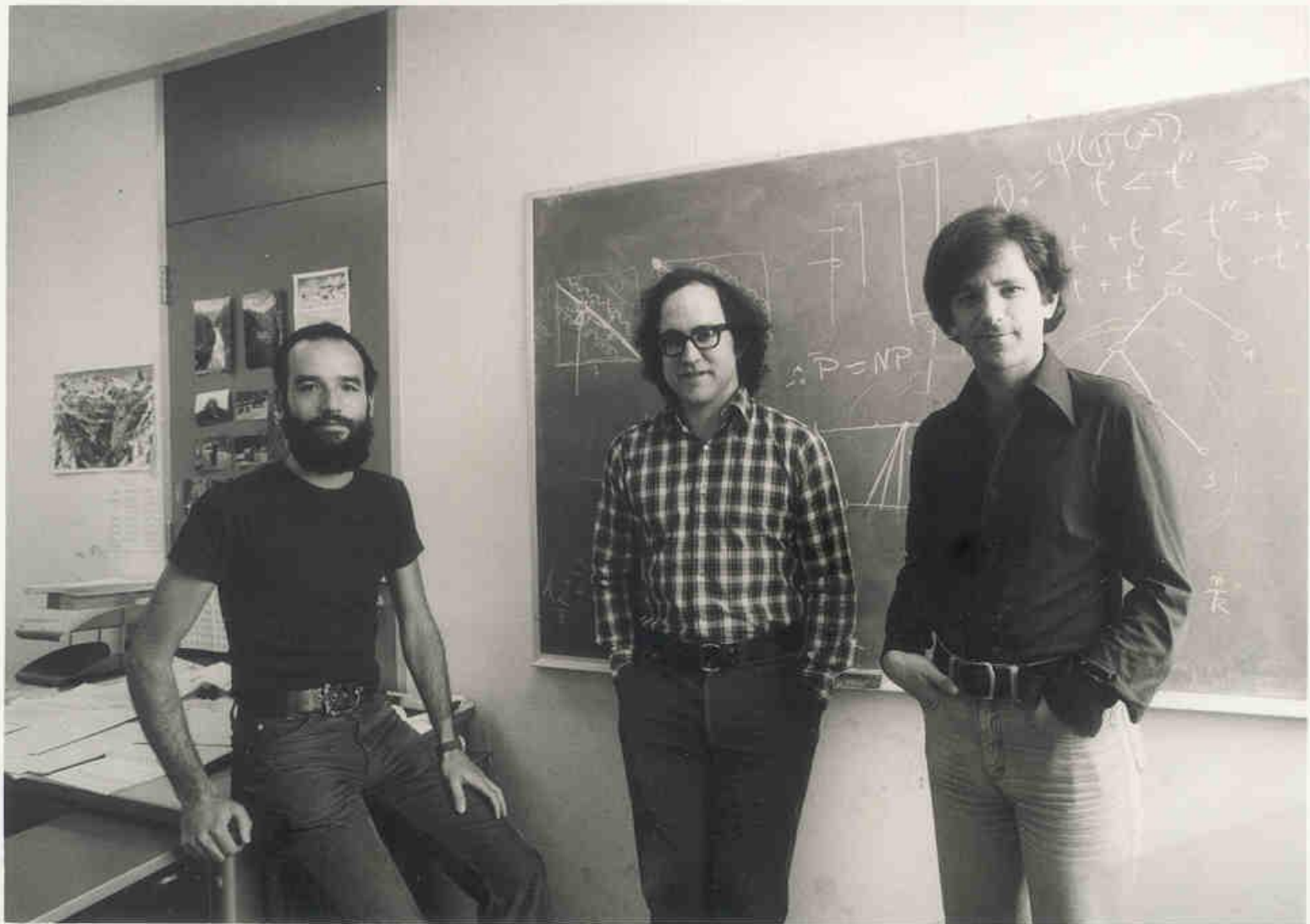
```

Algoritma RSA

-
- ✦ Dibuat oleh tiga peneliti dari *MIT (Massachusetts Institute of Technology)*, yaitu Ron Rivest, Adi Shamir, dan Len Adleman, pada tahun 1976.



- ✦ Termasuk algoritma **kriptografi asimetri**.
- ✦ Asimetri: kunci untuk enkripsi berbeda dengan kunci untuk dekripsi

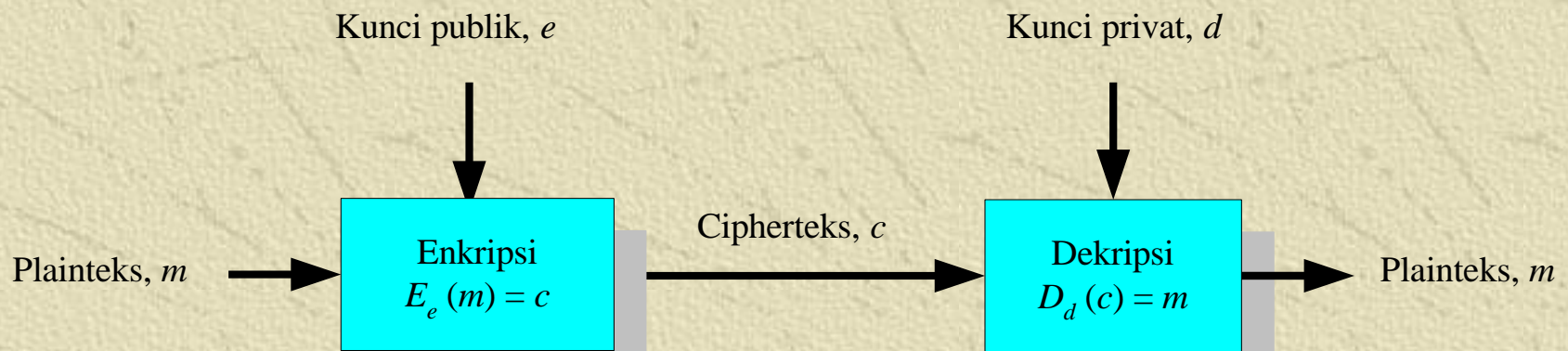


Rinaldi M/IF2120 Matematika
Diskrit

✦ Setiap pengguna memiliki sepasang kunci:

1. Kunci publik, e : untuk enkripsi pesan
2. Kunci privat, p : untuk dekripsi pesan

✦ Kunci publik tidak rahasia, kunci privat rahasia



Algoritma pembangkitan pasangan kunci

1. Pilih dua bilangan prima, p dan q (rahasia)
2. Hitung $n = pq$. Besaran n tidak perlu dirahasiakan.
3. Hitung $m = (p - 1)(q - 1)$.
4. Pilih sebuah bilangan bulat untuk kunci publik, e , relatif prima terhadap m .
5. Hitung kunci dekripsi, d , melalui kekongruenan $ed \equiv 1 \pmod{m}$.

✦ **Contoh.** Misalkan $p = 47$ dan $q = 71$ (keduanya prima), maka dapat dihitung

$$n = p \times q = 3337$$

$$m = (p - 1) \times (q - 1) = 3220.$$

Pilih kunci publik $e = 79$ (yang relatif prima dengan 3220).

Nilai e dan n dapat dipublikasikan ke umum.

✦ **Catatan:** Dalam praktek, nilai a , b , dan e adalah bilangan yang sangat besar (minimal 200 digit)

✦ Selanjutnya dihitung kunci dekripsi d dengan kekongruenan:

$$e \times d \equiv 1 \pmod{m}$$

$$d = \frac{1 + (k \times 3220)}{79}$$

Diperoleh nilai $d = 1019$. Ini adalah kunci dekripsi.



Algoritma enkripsi-dekripsi:

Enkripsi: $c_i = p_i^e \bmod n$

Dekripsi: $p_i = c_i^d \bmod n,$

✦ Misalkan plainteks: 'HARI INI'

atau dalam desimal ASCII: 7265827332737873

Pecah pesan menjadi blok yang lebih kecil (misal 3 digit):

$$p_1 = 726$$

$$p_2 = 582$$

$$p_3 = 733$$

$$p_4 = 273$$

$$p_5 = 787$$

$$p_6 = 003$$

✧ *Enkripsi setiap blok:*

$$c_1 = 726^{79} \bmod 3337 = 215$$

$$c_2 = 582^{79} \bmod 3337 = 776$$

dst untuk sisa blok lainnya

Keluaran: chiperteks $C = 215\ 776\ 1743\ 933\ 1731\ 158$.

✧ *Dekripsi (menggunakan kunci privat $d = 1019$)*

$$p_1 = 215^{1019} \bmod 3337 = 726$$

$$p_2 = 776^{1019} \bmod 3337 = 582$$

dst untuk sisi blok lainnya

Keluaran: plainteks = 7265827332737873

atau dalam kode ASCII karakternya adalah HARI INI.

Pembangkit Bilangan Acak

- ✦ Pembangkit bilangan acak yang berbasis kekongruenan lanjar adalah *linear congruential generator* atau *LCG*:

$$X_n = (aX_{n-1} + b) \bmod m$$

X_n = bilangan acak ke- n dari deretnya

X_{n-1} = bilangan acak sebelumnya

a = faktor pengali

b = *increment*

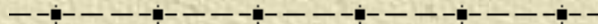
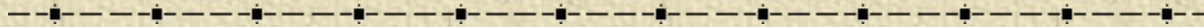
m = modulus

Kunci pembangkit adalah X_0 yang disebut **umpan** (*seed*).

Contoh: $X_n = (7X_{n-1} + 11) \bmod 17$, dan $X_0 = 0$

n	X_n
0	0
1	11
2	3
3	15
4	14
5	7
6	9
7	6
8	2
9	8
10	16
11	4
12	5
13	12
14	10
15	13
16	0
17	11
18	3
19	15
20	14
21	7
22	9
23	6
24	2

Latihan Soal Teori Bilangan



Soal 1

✦ Buktikan untuk setiap bilangan bulat positif n dan a , PBB($a, a + n$) habis membagi n .

✦ Jawaban:

Misalkan $\text{PBB}(a, a + n) = d$.

Maka:

$$d \mid a + n \rightarrow a + n = k_1 d$$

$$d \mid a \rightarrow a = k_2 d$$

$$\text{-----}$$
$$a + n - a = (k_1 - k_2)d$$

$$n = Kd \text{ (misal } k_1 - k_2 = K)$$

$$n = Kd \rightarrow d \mid n \text{ (terbukti)}$$

Soal 2

Perlihatkan bahwa bila $n \mid m$, yang dalam hal ini n dan m adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1, dan jika $a \equiv b \pmod{m}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat, maka $a \equiv b \pmod{n}$.

✦ Jawaban: -----

Diketahui bahwa $n \mid m$ atau dapat dituliskan sebagai :

$$m = k_1 \cdot n \dots(i)$$

Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka m habis membagi $a - b$ atau dapat dituliskan :

$$a = b + k_2 \cdot m \dots(ii)$$

Substitusikan (i) ke dalam (ii):

$$a = b + k_2 \cdot k_1 \cdot n$$

$$a = b + k_3 \cdot n \quad (\text{misalkan } k_3 = k_2 \cdot k_1)(iii)$$

$$a - b = k_3 \cdot n \quad \text{yang berarti bahwa } n \mid (a - b) \text{ atau}$$

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \blacksquare$$

Soal 3

✦ Salah satu program enkripsi di dalam sistem operasi *Linux* adalah rot13. Enkripsi dilakukan dengan mengganti sebuah huruf dengan huruf ke-13 berikutnya dari susunan alfabet.

(a) Nyatakan fungsi enkripsi dan dekripsi di dalam rot13 sebagai persamaan aritmetika modulo dalam p_i dan c_i .

(b) Jika enkripsi dilakukan dua kali berturut-turut terhadap plainteks, apa yang terjadi?

✦ Jawaban:

a) $c_i = E(p_i) = (p_i + 13) \bmod 26$

$p_i = D(c_i) = (c_i - 13) \bmod 26$

b) Jika dilakukan 2 kali enkripsi thd *plaintext*, maka hasilnya sama dengan *plaintext* awal.

Soal 4

✦ Buktikan dengan induksi matematika bahwa semua bilangan berbentuk $11\dots 1$ pasti kongruen dengan $0 \pmod{11}$ atau $1 \pmod{11}$ (misalnya $111 \equiv 1 \pmod{11}$ dan $111111 \equiv 0 \pmod{11}$)

✦ Jawaban:

(i) Basis: $1 \equiv 1 \pmod{11}$. Benar.

(ii) Rekurens:

✦ Jika $11\dots1$ (n suku) $\equiv 1 \pmod{11}$, maka

$$\begin{aligned}11\dots1 (n+1 \text{ suku}) &\equiv \{11\dots1 (n \text{ suku}) \times 10 + 1\} \pmod{11} \\ &\equiv \{1 \times 10 + 1\} \pmod{11} \\ &\equiv 0 \pmod{11}\end{aligned}$$

✦ Jika $11\dots1$ (n suku) $\equiv 0 \pmod{11}$, maka

$$\begin{aligned}11\dots1(n+1 \text{ suku}) &\equiv \{11\dots1 (n \text{ suku}) \times 10 + 1\} \pmod{11} \\ &\equiv \{0 \times 10 + 1\} \pmod{11} \\ &\equiv 1 \pmod{11}\end{aligned}$$

✦ Menurut PIM, benar.

Soal 5

✦ Carilah semua bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2 dan bersisa 2 jika dibagi 3

✦ Jawaban:

Misal bilangan tersebut adalah $x = 2k+1$

$$2k + 1 \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow 2k \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{3}$$

$$k \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow k = 3n+2$$

$$\text{Berarti } x = 2(3n+2)+1 = 6n+5$$

Jadi bilangan-bilangan yang memenuhi adalah

$$x = \{5, 11, 17, 23, \dots\}$$

Soal 6

-
- ✦ Tentukan x dan y bilangan bulat yang memenuhi persamaan $312x + 70y = 2$, lalu hitunglah nilai dari : $y \bmod x$.

Jawaban:

Dengan menggunakan algoritma Euclid, ditemukan bahwa : -----

$$312 = 4.70 + 32 \quad \text{(i)}$$

$$70 = 2.32 + 6 \quad \text{(ii)}$$

$$32 = 5.6 + 2 \quad \text{(iii)}$$

$$6 = 3.2 + 0 \quad \text{(iv)}$$

$$\text{Persamaan (iii) dapat dituliskan menjadi : } 2 = 32 - 5.6 \quad \text{(v)}$$

$$\text{Persamaan (ii) dapat dituliskan menjadi : } 6 = 70 - 2.32 \quad \text{(vi)}$$

Sulihkan persamaan (vi) ke persamaan (v) :

$$2 = 32 - 5.(70 - 2.32)$$

$$2 = 32 - 5.70 + 10.32$$

$$2 = 11.32 - 5.70 \quad \text{(vii)}$$

$$\text{Persamaan (i) dapat dituliskan menjadi : } 32 = 312 - 4.70 \quad \text{(viii)}$$



Sulihkan persamaan (viii) ke persamaan (vii) :

$$2 = 11.(312 - 4.70) - 5.70$$

$$2 = 11.312 - 44.70 - 5.70$$

$$2 = 11.312 - 49.70 \quad (\text{ix})$$

Dari persamaan (ix) diketahui x dan y yang memenuhi adalah

$$x = 11 \text{ dan } y = -49, \text{ sehingga } y \bmod x = -49 \bmod 11 = 6$$

Soal 7

Sebuah buku terbitan September 2008 memiliki ISBN 9X7-2309-97. Tentukan nilai X dan karakter uji dari nomor ISBN tersebut jika diketahui $3X \equiv 2 \pmod{5}$

✦ Jawaban:

$$X \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow X = \frac{2+5k}{3} \text{ untuk } k \text{ sebarang bilangan bulat}$$

Untuk nilai k =

$$k = 1 \rightarrow X = 2/3$$

$$k = 2 \rightarrow X = 4$$

$$k = 3 \rightarrow X = 17/3$$

$$k = 4 \rightarrow X = 22/3$$

$$k = 5 \rightarrow X = 9$$

$$k = 6 \rightarrow X = 32/3$$

$$k = 7 \rightarrow X = 37/3$$

$$k = 8 \rightarrow X = 14$$

...dst

- ✦ Dapat dilihat di atas, untuk $k = 2, 5, 8, \dots$ nilai X bulat, namun untuk kode ISBN di atas, nilai X haruslah dalam rentang bilangan bulat 0-9, jadi nilai X yang memenuhi adalah **4** dan **9**.

✧ Untuk mencari karakter uji, diketahui

$$\sum_{i=1}^9 ix_i \pmod{11} = \text{karakter uji}$$

Maka nilai karakter uji untuk :

kode ISBN 947-2309-97 dapat dicari sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^9 ix_i = 1(9) + 2(4) + 3(7) + 4(2) + 5(3) + 6(0) + 7(9) + 8(9) + 9(7) = 259$$

Jadi karakter uji untuk ISBN di atas = $259 \pmod{11} = 6$

kode ISBN 997-2309-97 dapat dicari sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^9 ix_i = 1(9) + 2(9) + 3(7) + 4(2) + 5(3) + 6(0) + 7(9) + 8(9) + 9(7) = 269$$

Jadi karakter uji untuk ISBN di atas = $269 \pmod{11} = 5$

Soal 8

- ✦ Sebuah area parkir mempunyai sejumlah *slot* atau *space* yang dinomori 0 sampai 25. Mobil yang hendak parkir di area tersebut ditentukan dengan sebuah fungsi *hash*. Fungsi *hash* tersebut menentukan nomor *slot* yang akan ditempati mobil yang hendak parkir berdasarkan 3 angka terakhir pada plat nomor polisinya.
- Tentukan fungsi *hash* yang dimaksudkan.
 - Tentukan nomor *slot* yang ditempati mobil yang datang berturut-turut dengan plat nomor polisinya adalah 423251, 76540, 17121, 2310, 4124, 1102, 1724

✦ Jawaban:

(a) $h = x \bmod 26$

(b) ~~$423251 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 251 \rightarrow 251 \bmod 26 = 17 \text{ (slot 17)}$~~

$76540 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 540 \rightarrow 540 \bmod 26 = 20 \quad (\text{slot } 20)$

$17121 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 121 \rightarrow 121 \bmod 26 = 17 \quad (\text{tetapi slot nomor } 17 \text{ sudah terisi, jadi isi slot kosong berikutnya, yaitu } 18)$

$2310 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 310 \rightarrow 310 \bmod 26 = 24 \quad (\text{slot } 24)$

$4124 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 124 \rightarrow 124 \bmod 26 = 20 \quad (\text{slot } 21 \text{ karena slot } 20 \text{ sudah terisi})$

$1102 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 102 \rightarrow 102 \bmod 26 = 24 \quad (\text{slot } 25 \text{ karena slot } 24 \text{ sudah terisi})$

$1724 \rightarrow 3 \text{ angka terakhir} = 724 \rightarrow 724 \bmod 26 = 22 \quad (\text{slot } 22)$

Jadi, mobil-mobil yang datang mengisi slot 17, 20, 18, 24, 21, 25, dan 22