

1. Tentukan dan beri penjelasan apakah fungsi di bawah ini merupakan fungsi bijektif, injektif, surjektif, atau tidak ketiganya untuk $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (pemetaan dari bilangan asli ke bilangan asli)!

- $f(n) = n!$
- $f(n) = n^2 - 4n + 10$
- $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
- $f(n) = (n \bmod 100) + 1$

Penyelesaian:

a. $f(n) = n!$

Karena $a > b \Rightarrow a! > b! \Rightarrow f(a) > f(b)$, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Fungsi tersebut injektif. Tidak ada n asli sehingga $f(n) = 3$. Fungsi tersebut tidak surjektif.

\therefore fungsi tersebut injektif saja.

b. $f(n) = n^2 - 4n + 10$

$$f(1) = 1 - 4 + 10 = 7 = 9 - 12 + 10 = f(3)$$

Fungsi tersebut tidak injektif.

$$f(n) = (n - 2)^2 + 6 \geq 6. \text{ Tidak ada } n \text{ asli sehingga } f(n) = 5.$$

Fungsi tersebut tidak surjektif.

\therefore fungsi tersebut tidak ketiganya.

c. $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$f(3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = f(4)$$

Fungsi tersebut tidak injektif.

$$\forall n \Rightarrow n = f(2n)$$

Fungsi tersebut surjektif.

\therefore fungsi tersebut surjektif saja.

d. $f(n) = (n \bmod 100) + 1$

$$f(2) = 3 = f(102)$$

Fungsi tersebut tidak injektif.

$$f(n) = (n \bmod 100) + 1$$

$$\leq 99 + 1 = 100$$

Jadi tidak ada n sehingga $f(n) = 120$.

Fungsi tersebut tidak surjektif.

\therefore fungsi tersebut tidak ketiganya.

2. Diberikan beberapa relasi berikut :

- (a) $\{(a, b) \mid \text{jika } a \text{ adalah pernyataan yang bernilai benar, maka pernyataan } b \text{ bernilai benar}\}$
- (b) $\{(a, b) \mid \text{jarak kota } a \text{ ke kota Jakarta sama dengan jarak kota } b \text{ ke kota Jakarta}\}$
- (c) $\{(a, b) \mid \text{jarak kota } a \text{ ke kota } b \text{ kurang dari 50 kilometer}\}$
- (d) $\{(a, b) \mid a \text{ dan } b \text{ adalah dua himpunan tidak kosong yang irisannya bukan himpunan kosong}\}$

Tentukan apakah relasi-relasi di bawah ini merupakan relasi kesetaraan atau bukan. Jika bukan, sebutkan dan jelaskan sifat-sifat yang tidak berlaku sehingga relasi tersebut tidak dapat dikatakan sebagai relasi kesetaraan.

Penyelesaian:

- a. Relasi $\{(a, b) \mid \text{jika } a \text{ adalah pernyataan yang bernilai benar, maka pernyataan } b \text{ bernilai benar}\}$
Tidak, karena sifat tolak setangkup tidak dipenuhi.
- b. Relasi $\{(a, b) \mid \text{jarak kota } a \text{ ke kota Jakarta sama dengan jarak kota } b \text{ ke kota Jakarta}\}$
Ya
- c. Relasi $\{(a, b) \mid \text{jarak kota } a \text{ ke kota } b \text{ kurang dari 50 kilometer}\}$ (5)
Tidak, karena sifat menghantar tidak dipenuhi.
- d. Relasi $\{(a, b) \mid a \text{ dan } b \text{ adalah dua himpunan tidak kosong yang irisannya bukan himpunan kosong}\}$
Tidak, karena sifat menghantar tidak dipenuhi.

3. (a) Gunakan algoritma Euclidean untuk menghitung PBB(1757,1631)

(b) Selesaikan persamaan linier $1757x - 1631y = 483$. Jika tidak dapat diselesaikan, jelaskan mengapa tidak terdapat solusi.

Penyelesaian:

Kekongruenan linear tersebut identik dengan persamaan $51x + 1008y = 177$, maka keduanya memiliki solusi yang sama.

Pertama, cari FPB(51, 1008) dengan menggunakan algoritma Euclidean.

$$1008 = 19 \times 51 + 39$$

$$51 = 1 \times 39 + 12$$

$$39 = 3 \times 12 + 3$$

$$12 = 4 \times 3 + 0$$

Maka FPB(51,1008) = 3. Karena $3 \mid 177$, maka persamaan $51x + 1008y = 177$ memiliki solusi.

Untuk mencari solusi tersebut, pertama harus menyelesaikan dahulu $51x + 1008y = 3$

$$3 = 39 - 3 \times 12$$

$$3 = 39 - 3(51 - 39)$$

$$3 = 39(4) + 51(-3)$$

$$3 = (1008 - 19 \times 51)(4) + 51(-3)$$

$$3 = 51(-79) + 1008(4)$$

$$\text{Karena } 177 = 3 \times 59, \text{ kita dapat } 51(-79 \times 59) + 1008(4 \times 59) = 3 \times 59 = 177$$

Maka salah satu nilai x yang memenuhi adalah -4661

4. Sebuah buku memiliki ISBN 0-1X026-690-Y. Tentukan nilai $X \times Y$ dari nomor ISBN tersebut jika diketahui $6X \equiv 3 \pmod{7}$!

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai X , perlu dicari dari kongruensi $6X \equiv 3 \pmod{7}$

$$\text{Ini berarti } X = \frac{7k+3}{6}$$

Untuk nilai k :

$$k = -1 \rightarrow X = -\frac{2}{3}$$

$$k = 0 \rightarrow X = \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow X = 1\frac{2}{3}$$

$$k = 2 \rightarrow X = 2\frac{5}{6}$$

$$k = 3 \rightarrow X = 4$$

$$k = 4 \rightarrow X = 5\frac{1}{6}$$

$$k = 5 \rightarrow X = 6\frac{1}{3}$$

$$k = 6 \rightarrow X = 7\frac{1}{2}$$

$$k = 7 \rightarrow X = 8\frac{2}{3}$$

$$k = 8 \rightarrow X = 9\frac{5}{6}$$

$$k = 9 \rightarrow X = 11$$

Nilai X haruslah bilangan bulat positif dan terdiri dari satu digit, ini berarti hanya $X = 4$ yang memenuhi.

Setelah mendapat nilai X , untuk mendapatkan nilai Y sama dengan mencari karakter uji, yaitu

$$\sum_{i=1}^{i=9} (i \times x_i) \bmod 11 = \text{karakter uji}$$

$$\sum_{i=1}^{i=9} (i \times x_i) = (1 \times 0) + (2 \times 1) + (3 \times 4) + (4 \times 0) + (5 \times 2) + (6 \times 6) + (7 \times 6) + (8 \times 9) + (9 \times 0)$$

$$\sum_{i=1}^{i=9} (i \times x_i) = 0 + 2 + 12 + 0 + 10 + 36 + 42 + 72 + 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=9} (i \times x_i) = 174$$

$$\text{Sehingga } Y = 174 \pmod{11}$$

$$Y = 9$$

Maka, nilai $X \times Y$ adalah $4 \times 9 = 36$

5. Jenika memiliki sejumlah coklat di rumahnya. Jika ia membagi seluruhnya secara merata ke 5 orang, tersisa 4 coklat. Jika ia membagi seluruhnya secara merata ke 8 orang, tersisa 6 coklat. Jika ia membagi seluruhnya secara merata ke 9 orang, tersisa 8 coklat. Berapa jumlah coklat paling sedikit yang Jenika miliki?

Penyelesaian:

Misal x adalah jumlah coklat, maka

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 6 \pmod{8}$$

$$x \equiv 8 \pmod{9}$$

Dari kongruensi $x \equiv 4 \pmod{5}$ didapat

$$x = 4 + 5x_1$$

Sulihkan ke kongruensi $x \equiv 6 \pmod{8}$

$$4 + 5x_1 \equiv 6 \pmod{8}$$

$$5x_1 \equiv 2 \pmod{8}$$

$$5 \times 5x_1 \equiv 5 \times 2 \pmod{8}$$

$$25x_1 \equiv 2 \pmod{8}$$

$$x_1 \equiv 2 \pmod{8}$$

Maka $x_1 = 2 + 8x_2$. Sulihkan ke persamaan $x = 4 + 5x_1$ menjadi

$$x = 4 + 5(2 + 8x_2)$$

$$x = 14 + 40x_2$$

Sulihkan ke kongruensi $x \equiv 8 \pmod{9}$

$$14 + 40x_2 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$40x_2 \equiv -6 \pmod{9}$$

$$4x_2 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$7 \times 4x_2 \equiv 7 \times 3 \pmod{9}$$

$$28x_2 \equiv 21 \pmod{9}$$

$$x_2 \equiv 3 \pmod{9}$$

Maka $x_2 = 3 + 9x_3$. Sulihkan ke persamaan $x = 14 + 40x_2$

$$x = 14 + 40(3 + 9x_3)$$

$$x = 134 + 360x_3$$

Nilai x terkecil akan didapat ketika nilai $x_3 = 0$, maka nilai x terkecil adalah **134**. Berarti jumlah coklat paling sedikit yang Jenika miliki adalah **134 coklat**.

6. Cari minimal sebuah bilangan bulat x yang memenuhi kongruensi berikut! (Petunjuk: gunakan algoritma Euclidean): $51x \equiv 177 \pmod{1008}$.

Penyelesaian:

Kekongruenan linear tersebut identik dengan persamaan $51x + 1008y = 177$, maka keduanya memiliki solusi yang sama.

Pertama, cari **FPB(51, 1008)** dengan menggunakan algoritma Euclidean.

$$1008 = 19 \times 51 + 39$$

$$51 = 1 \times 39 + 12$$

$$39 = 3 \times 12 + 3$$

$$12 = 4 \times 3 + 0$$

Maka **FPB(51, 1008) = 3**. Karena $3 \mid 177$, maka persamaan $51x + 1008y = 177$ memiliki solusi.

Untuk mencari solusi tersebut, pertama harus menyelesaikan dahulu $51x + 1008y = 3$

$$3 = 39 - 3 \times 12$$

$$3 = 39 - 3(51 - 39)$$

$$3 = 39(4) + 51(-3)$$

$$3 = (1008 - 19 \times 51)(4) + 51(-3)$$

$$3 = 51(-79) + 1008(4)$$

$$\text{Karena } 177 = 3 \times 59, \text{ kita dapat } 51(-79 \times 59) + 1008(4 \times 59) = 3 \times 59 = 177$$

Maka salah satu nilai x yang memenuhi adalah **-4661**

7. Temukan fungsi Boolean yang paling sederhana dalam bentuk *product of sum* (POS) dari fungsi berikut:

$$f(w, x, y, z) = \prod(0, 1, 2, 3, 7, 8, 11, 13) \text{ dan } d(w, x, y, z) = \sum(5, 9, 14, 15)$$

8. Rancanglah rangkaian logika untuk menghitung koin uang logam yang dimasukkan pada pengumpul bea otomatis sebagai pembayar jasa tol. Mesin penghitung ditempatkan pada gerbang tol. Tarif tol adalah 15 sen. Mesin hanya dapat menerima koin 5 sen dan koin 10 sen. Bila mesin telah menerima sejumlah koin senilai 15 sen, maka lampu hijau menyala (artinya boleh lewat gerbang tol), dan jika belum 15 sen, lampu merah tetap menyala (artinya belum boleh lewat gerbang tol). Gambarkan rangkaian logika yang dimaksud!

Catatan: Pembayaran dapat dilakukan dengan koin 5 sen saja atau koin 10 sen saja atau kombinasi keduanya. Karena biaya tol 15 sen, maka jumlah koin 5 sen yang digunakan maksimal 3 buah (= 15 sen), jumlah koin 10 sen yang digunakan maksimal 2 buah (= 20 sen). Di luar jumlah koin itu, keluaran mesin tidak penting nilainya (kondisi *don't care*). Anda terlebih dahulu harus menentukan berapa banyak peubah (*variable*) Boolean yang dibutuhkan.

Jawaban setiap soal ditulis di bawah ini. Gunakan halaman dibalik atau kertas tambahan jika diperlukan.

Pernyataan dan tanda tangani: Jawaban kuis ini saya kerjakan sendiri tanpa kerjasama dengan teman.

()