Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung

Nama :…………………………
NIM :…………………………
T.tangan:…………………………

Solusi Kuis ke-1 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Logika, Himpunan, Induksi Matematika
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 14 September 2015
Waktu: 50 menit

1. Apakah $p \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge \sim q$ merupakan tautologi atau kontradiksi? Tunjukkanlah dengan hukum-hukum logika (tanpa menggunakan tabel kebenaran)! Jangan lupa menyebutkan hukum logika yang dipakai!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge \sim q &\Leftrightarrow p \wedge ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \wedge \sim q && \text{(biimplikasi)}\\
&\Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge \sim q && \text{(implikasi)}\\
&\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) && \text{(hukum asosiatif)}\\
&\Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (q \rightarrow p) && \text{(hukum De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow F \wedge (q \rightarrow p) && \text{(hukum negasi)}\\
&\Leftrightarrow F && \text{(hukum nulitas)}
\end{aligned}$$

Kesimpulan: kontradiksi

2. Anda akan pergi ke kampus pagi ini dan menemukan bahwa Anda tidak membawa HP. Anda tahu pernyataan di bawah ini adalah benar:
   i. Jika saya membaca *chat line* di dapur, maka HP saya berada di atas meja makan.
   ii. Jika HP saya berada di atas meja makan, maka saya melihat HP saya saat sarapan.
   iii. Saya tidak melihat HP saya saat sarapan.
   iv. Saya membaca *chat line* di depan kamar atau saya membaca *chat line* di dapur.
   v. Jika saya membaca *chat line* di depan kamar maka HP saya berada di atas rak sepatu.

   Di mana HP tersebut? Turunkan kesimpulan dari penalaran anda dengan menggunakan campuran hukum-hukum logika dan metode penarikan kesimpulan yang sudah terbukti sahih (modus ponen, modus tollen, aturan transitif, dsb).

Penyelesaian:
Misalkan p : Saya membaca *chat line* di dapur, q : HP saya berada di atas meja makan, r : saya melihat HP saya saat sarapan, s : Saya membaca *chat line* di depan kamar, t : HP saya berada di atas rak sepatu.

Langkah 1
$p \rightarrow q$ *(a)*
$q \rightarrow r$ *(b)*
$\therefore p \rightarrow r$ *Aturan transitif*

Langkah 2
$p \rightarrow r$ *Solusi langkah 1*
$\sim r$ *(c)*
$\therefore \sim p$ *Modus tollen*

Langkah 3
$s \vee p$ *(d)*
$\sim p$ *Solusi langkah 2*
$\therefore s$ *Silogisme disjungtif/kontrapositif*

Langkah 4
$s \rightarrow t$ *(e)*
s *Solusi langkah 3*
$\therefore t$ *Modus ponen*

Maka HP saya berada di atas rak sepatu.

3. Diberikan himpunan $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\emptyset\}$, $C = \{1,2\}$, dan $D = \{3\}$. Tentukan :
   a. Himpunan kuasa dari A dan B
   b. Hubungan *proper subset* dan *improper subset* dari himpunan A dengan himpunan B, C, dan D
   c. Kardinal dari himpunan A dan B

Penyelesaian:

a. Himpunan kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan *A* merupakan suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari *A* termasuk himpunan kosong dan himpunan *A* sendiri. Maka untuk persoalan diatas :

- Untuk himpunan *A*

  A = {1,2,3} maka P(*A*) = {$\emptyset$, {1},{2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3} ,{1,2,3}}
- Untuk himpunan *B*

  B = {} maka P(*B*) = {$\emptyset$}

b. Hubungan *Proper subset* dan *Improper subset*

Suatu himpunan dikatakan *proper subset* atau himpunan bagian sebenarnya jika A $\subset$ B : A adalah himpunan bagian dari B tetapi A $\neq$ B. Maka :

Himpunan C dan himpunan D merupakan proper subset dari himpunan A ;
{1,2} dan {3} proper subset dari {1,2,3}

Jika $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$ maka $\emptyset$ dan A dikatakan *improper subset* atau himpunan bagian tak sebenarnya. Maka :

Himpunan B dan Himpunan A itu sendiri merupakan *improper subset* dari himpunan A; $\emptyset$ dan {1,2,3} *improper subset* dari {1,2,3}

c. Kardinal dari himpunan *A* dan *B*

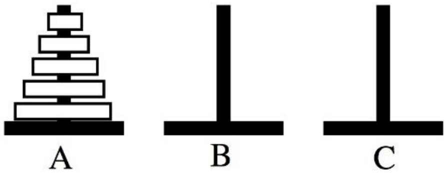
Kardinal merupakan jumlah elemen di dalam suatu himpunan. Untuk persoalan diatas $n(A) = |A| = 3$ dan $n(B) = |B| = 0$

4. Diberikan dua buah himpunan *A* dan *B*. Buktikan dengan hukum aljabar himpunan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

Penyelesaian:

$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A\,(B \cup \bar{B})$	*Hukum Distributif*
$= A \cap U$	*Hukum Komplemen*
$= A$	*Hukum Identitas*

5.



Permainan *Tower of Hanoi* adalah sebuah *puzzle* logika menggunakan 3 buah tiang dan sejumlah *n* piringan dengan ukuran yang berbeda-beda yang dapat dimasukkan ke setiap tiang. Tujuan dari permainan ini adalah memindahkan semua piringan dari tiang A ke tiang B melalui pertantara tiang C. Pada gambar ini kelima piringan harus dipindahkan dari tiang *A* ke tiang *B* atau ke tiang C. Aturan dari permainan ini adalah sebagai berikut.

a) Mula-mula semua piringan berada di satu tiang diurutkan berdasarkan ukurannnya terurut membesar ke bawah

b) Hanya boleh ada satu piringan yang dipindahkan setiap kali perpindahan

c) Setiap perpindahan piringan dilakukan dengan memindahkan satu piringan teratas dari satu tiang ke satu tiang lainnya

d) Tidak boleh ada piringan yang diletakkan di atas piringan yang lebih kecil

Dengan induksi matematika, buktikanlah bahwa untuk setiap $n \geq 1$ piringan pasti terdapat cara untuk memenangkan permainan!

Penyelesaian:

Misalkan *P*(*n*) adalah pernyataan bahwa permainan dapat dimenangkan dengan n piringan dan mula-mula semua piringan berada di tiang A dan akan dipindahkan ke tiang B.

Basis induksi: Untuk *n*=1, cukup pindahkan satu-satunya piringan ke tiang B. Semua piringan kini berada di tiang yang berbeda sehingga permainan berhasil dimenangkan. Jadi P(1) benar

Langkah induksi:

Asumsikan untuk *n* = *k*, *P*(*k*) benar (Hipotesis induksi). Harus dibuktikan bahwa untuk *n* = *k* + 1, *p*(*k*+1) juga benar. Caranya adalah sebagai berikut: Untuk *P*(*k*+1), pindahkan *k* piringan teratas ke tiang C. Hal ini dapat dilakukan berdasarkan hipotesis induksi. Lalu, pindahkan satu piringan tersisa (piringan ke-*k*+1) ke tiang B. Kemudian, pindahkan *k* piringan dari tiang C ke tiang *B*. Hal ini kembali dapat dilakukan berdasarkan hipotesis induksi. Dengan demikian, kini semua piringan berada di tiang B dan permainan berhasil dimenangkan.

Karena *P*(*k*+1) berhasil dibuktikan, maka *P*(*n*) benar untuk setiap n bilangan bulat dan $n \geq 1$.