

Penerapan Teori Graf untuk Menyelesaikan Teka-Teki Permainan *The Knight's Tour*

Micky Yudi Utama - 13514011

Program Studi Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

micky.yu@students.itb.ac.id

Abstrak—Makalah ini akan membahas penerapan teori Graf untuk menyelesaikan permainan *The Knight's Tour*. Permainan *The Knight's Tour* merupakan rangkaian permainan dimana kuda catur melewati semua kotak pada papan catur tepat satu kali. Jika permainan berhasil diselesaikan dengan kuda kembali ke tempat asal maka jalur yang terbentuk disebut sirkuit Hamilton. Sedangkan jika permainan berhasil diselesaikan dengan kuda tidak kembali ke tempat asal maka jalur yang terbentuk disebut lintasan Hamilton. Ada beberapa solusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permainan ini tergantung ukuran petak yang digunakan untuk bermain.

Kata Kunci: *The Knight's Tour*, sirkuit Hamilton, lintasan Hamilton

I. PENDAHULUAN

Catur merupakan permainan yang dimainkan oleh 2 orang. Permainan catur pertama kali berasal dari India dan Arab dengan nama "chaturanga" yang artinya "empat divisi ketentaraan". Awalnya, bidak pada catur hanya terdiri dari 4 jenis. Menurut mistisisme India Kuno, catur dianggap mewakili alam semesta ini, sehingga sering dihubungkan dengan empat unsur kehidupan, yaitu api, udara, tanah, dan air karena dalam permainannya, catur menyimbolkan cara-cara hidup manusia.



Gambar 1.1. Permainan catur (id.wikipedia.org)

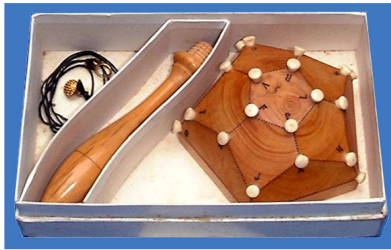
Perlahan-lahan permainan catur mulai berkembang dan tersebar ke seluruh dunia. Setelah melalui beberapa perubahan, akhirnya pada abad yang ke-12, bidak-bidak catur mulai ditetapkan menjadi raja, ratu, gajah, kuda, benteng, dan pion.

Pada zaman dahulu, permainan catur dapat berlangsung hingga berhari-hari lamanya. Kemudian pada tahun 1300, dibuatlah peraturan baru mengenai jangka waktu bermain serta diperkenalkan aturan melangkah bidak pion. Kemudian pada tahun 1475, terjadi perubahan lagi pada permainan catur dimana langkah pada ratu berubah menjadi semakin kuat serta pion yang bisa mendapatkan promosi menjadi ratu. Selain itu, bidak gajah berganti namanya menjadi bishop. Dengan demikian, skak mat menjadi lebih mudah terjadi pada permainan ini sehingga menyebabkan langkah-langkah dan waktu yang diperlukan dalam permainan menjadi berkurang drastis.

Perkembangan catur banyak terjadi dari abad ke abad mulai dari bentuk dan peraturan permainannya. Salah satu bentuk perkembangan dari permainan ini yaitu permainan *The Knight's Tour*. Permainan *The Knight's Tour* merupakan rangkaian permainan dimana kuda catur melewati semua kotak pada papan catur tepat satu kali. Beberapa solusi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah dengan menggunakan algoritma *Backtracking*, algoritma *Divide and Conquer*, aturan Warnsdorff, dan metode De Moivre.

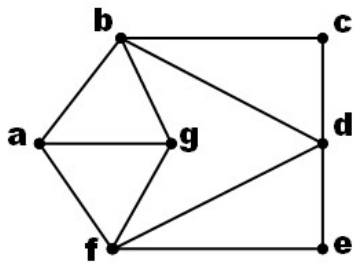
II. GRAF HAMILTON

Pada tahun 1859, Matematikawan dari Irish yang bernama Sir William Rowan Hamilton mengembangkan permainan yang ia beli dari perusahaan mainan di Dublin. Permainan yang ia kembangkan dinamakan *Icosian Game*. Tujuan dari permainan tersebut adalah mencari sirkuit atau membentuk jalur sehingga melewati setiap titik tepat satu kali. Masalah ini kemudian diselesaikan dengan menggunakan teori Graf dengan setiap titik tersebut diibaratkan sebagai simpul dan hubungan antar titik diibaratkan sebagai simpul.

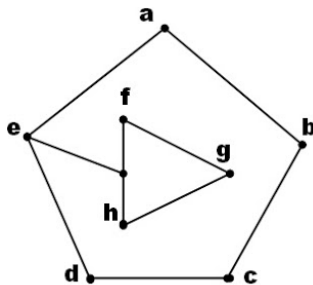


Gambar 2.1. Icosian Game (en.wikipedia.org)

Lintasan Hamilton merupakan lintasan yang melalui simpul di dalam graf tepat satu kali. Sirkuit Hamilton merupakan sirkuit yang melalui simpul di dalam graf tepat satu kali kecuali simpul awal (juga merupakan simpul akhir) dilalui 2 kali. Graf yang memiliki lintasan Hamilton disebut graf semi Hamilton, sedangkan graf yang memiliki sirkuit Hamilton disebut graf Hamilton.



Gambar 2.2. Sirkuit Hamilton (kuliahmsi.blogspot.com)



Gambar 2.3. Lintasan Hamilton (kuliahmsi.blogspot.com)

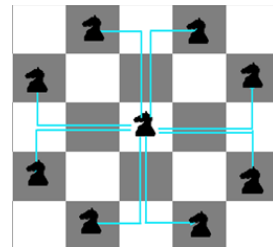
Teorema pada lintasan dan sirkuit Hamilton:

1. Syarat cukup (bukan syarat perlu) agar graf sederhana G dengan n buah simpul ($n \geq 3$) dikatakan graf Hamilton ialah jika derajat tiap simpul paling sedikit $n/2$.
2. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton
3. Dalam graf lengkap dengan n buah simpul ($n \geq 3$), terdapat $(n-1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

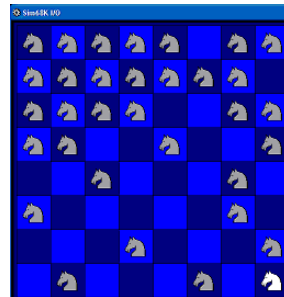
4. Dalam graf lengkap dengan n buah simpul ($n \geq 3$) dan n ganjil, terdapat $(n-1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.
5. Dalam graf lengkap dengan n buah simpul ($n \geq 4$) dan n genap, terdapat $(n-2)/2$ buah sirkuit Hamilton.

III. THE KNIGHT'S TOUR

Permainan *The Knight's Tour* merupakan permainan yang dimainkan oleh satu orang. Peraturan dari permainan ini sederhana. Pemain hanya perlu memindahkan bidak kuda sehingga bidak tersebut tepat menempati semua petak pada papan tepat satu kali dengan gerak kuda sama seperti pada permainan catur yaitu berbentuk L.

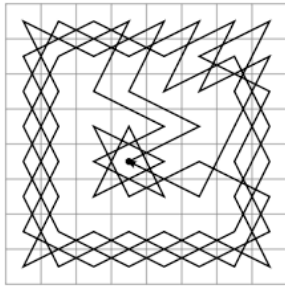


Gambar 3.1. Langkah bidak kuda (yunikemath28.wordpress.com)

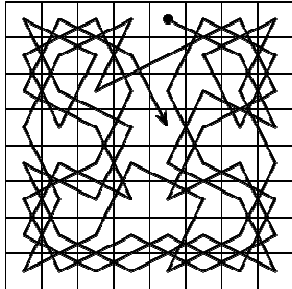


Gambar 3.2. Permainan *The Knight's Tour* (www.easy68k.com)

Ada dua jenis permainan *The Knight's Tour*. Yang pertama yaitu *Closed Tour* yaitu kondisi dimana posisi awal bidak kuda juga harus menjadi posisi akhir bidak kuda setelah menempati semua petak 1 kali. Yang kedua yaitu *Open Tour* yaitu kondisi dimana posisi awal bidak kuda dan posisi akhir bidak kuda tidak harus sama.



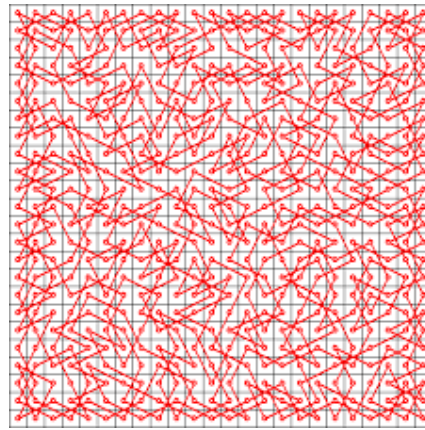
Gambar 3.3. *Closed Knight's Tour*
(kairos.laetusinpraesens.org)



Gambar 3.4. *Open Knight's Tour*
(threesixty360.wordpress.com)

Cara memainkan permainan *The Knight's Tour* sama seperti cara menentukan graf/sirkuit Hamilton. Petak pada papan catur dapat diibaratkan sebagai simpul, sedangkan pilihan jalannya kuda dapat diibaratkan sebagai sisi. Permasalahan graf/sirkuit Hamilton adalah bagaimana melewati semua simpul tepat satu kali, sama seperti permainan *The Knight's Tour* yaitu menempati setiap petak tepat satu kali.

Banyak cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permainan *The Knight's Tour* ini. Apabila digunakan konsep matematika secara umum, yaitu dengan konsep faktorial, maka kemungkinan yang dapat terjadi sebanyak $64! = 1.27 \times 10^{89}$ untuk papan 8×8 . Sedangkan dengan konsep eksponensial, maka kemungkinan yang terjadi sebanyak 64×4^{63} . Dengan menggunakan konsep simetri maka kemungkinan paling sedikit yang didapatkan yaitu 8.5×10^{38} . Dari ketiga konsep matematika di atas, langkah yang dibutuhkan untuk menyelesaikan permainan ini sangatlah banyak dan jelas tidak mungkin dilakukan pengetesan satu-satu sebanyak itu. Oleh karena itu, dibuatlah beberapa cara yang mangkus untuk menyelesaikan permasalahan ini diantaranya yaitu algoritma *Backtracking*, algoritma *Divide and Conquer*, aturan Warnsdorff, dan metode De Moivre.



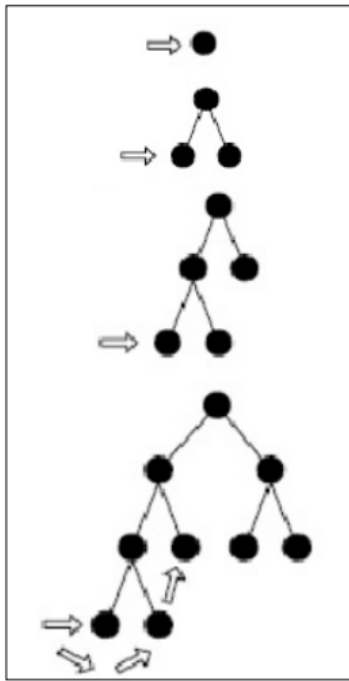
Gambar 3.5. Solusi untuk *The Knight's Tour 24x24*
(dmitrybriant.com)

IV. ALGORITMA BACKTRACKING

Secara umum, algoritma *backtracking* merupakan pengembangan dari algoritma *brute force* dimana algoritma *brute force* mencoba semua kemungkinan yang dapat terjadi yaitu sebanyak 1.2688693×10^{89} . Di dalam semua kemungkinan tersebut sebenarnya banyak kemungkinan yang tidak perlu atau tidak mungkin terjadi. Oleh karena itu, terbentuklah algoritma *backtracking* dimana algoritma ini membuang semua kemungkinan yang tidak perlu pada algoritma *brute force*. Algoritma *backtracking* pertama kali diperkenalkan oleh D. H. Lehmer pada tahun 1950.

Algoritma *backtracking* banyak sekali digunakan dalam berbagai hal seperti menyelesaikan permasalahan *tic-tac-toe*, *mazeMath*, *Knight's Tour*, *8 Queen*, dan permasalahan *artificial intelligence*.

Solusi dari algoritma *backtracking* dicari dengan membentuk lintasan dari akar ke daun. Aturan yang digunakan adalah aturan DFS (*Depth First Search*). Simpul-simpul yang telah dihasilkan dinamakan simpul hidup (*live node*), sedangkan simpul yang diperluas dinamakan simpul E (*expand node*). Simpul yang sudah tidak dipakai lagi dinamakan simpul mati (*dead node*). Algoritma *backtracking* dilakukan dengan mencari solusi parsial pada sebuah simpul tertentu dan kemudian simpul tersebut diperluas dan dianalisis. Jika lintasan yang terbentuk tidak mengarah kepada solusi, maka simpul tersebut akan dibuang dan menjadi simpul mati. Untuk membuang simpul tersebut digunakan fungsi pembatas (*bounding function*). Jika pada saat pencarian berakhir pada simpul mati, maka pencarian akan dilakukan pada simpul anak lainnya. Akan tetapi, jika sudah tidak ada lagi simpul anak yang belum dicari, maka akan dilakukan *backtracking* ke simpul sebelumnya. Pencarian akan berhenti dilakukan ketika sudah didapatkan solusi atau jika sudah tidak bisa melakukan *backtracking* lagi.



Gambar 4.1. Ilustrasi pembentukan simpul pada algoritma *backtracking*

Algoritma *backtracking* pada permainan *The Knight's Tour*:

1. Dari petak awal kuda ditempatkan, mendata semua langkah-langkah yang mungkin dilalui oleh kuda.
2. Memilih salah satu langkah lalu langkah tersebut diperluas lagi.
3. Menempatkan kuda pada petak yang telah dipilih.
4. Mengulangi langkah pertama sampai ketiga untuk petak yang sedang ditempati.
5. Jika belum ditemukan solusi maka kembali ke langkah sebelumnya (*backtracking*). Pencarian dihentikan ketika solusi telah ditemukan atau tidak ada lagi langkah yang memungkinkan.

Berikut adalah contoh *pseudocode* untuk algoritma *backtracking* untuk permainan *The Knight's Tour*:

- Ukuran dari papan adalah $n \times n$
- (x,y) adalah koordinat letak petak
- *move* adalah nomor kotak yang telah dilewati
- *ok* adalah boolean untuk menentukan apakah berhasil atau tidak

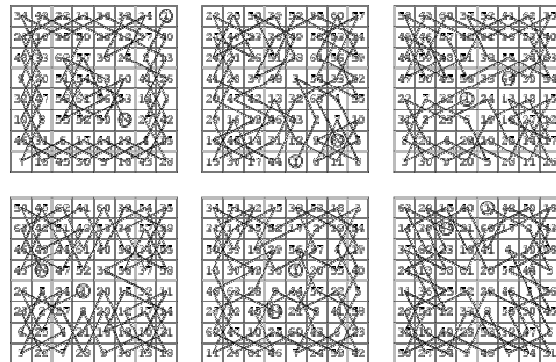
```

type chess_board is array
  (1..n,1..n) of integer;
procedure knight (board : in out
chess_board;
x,y,move : in out integer;
ok : in out Boolean) is
w, z : integer;

begin
  if move = n^2+1 then
    ok := ( (x,y) =
      (1,1) );
  elsif board(x,y) /= 0 then
    ok := false;
  else
    board(x,y) := move;
    loop
      (w,z) := Next position
        from (x,y);
      knight(board, w, z,
        move+1, ok );
      exit when (ok or No
        moves remain);
    end loop;
    if not ok then
      board
        ( x,y ) :=
        0;
      Backtracking
    end if;
  end if;
end knight;

```

Gambar 4.2. Algoritma *backtracking* dalam permainan *The Knight's Tour* (<https://gamatika.wordpress.com>)



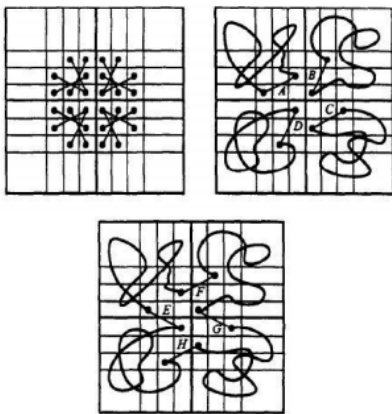
Gambar 4.3. Beberapa solusi untuk *The Knight's Tour* 8x8 (mathworld.wolfram.com)

V. ALGORITMA *DIVIDE AND CONQUER*

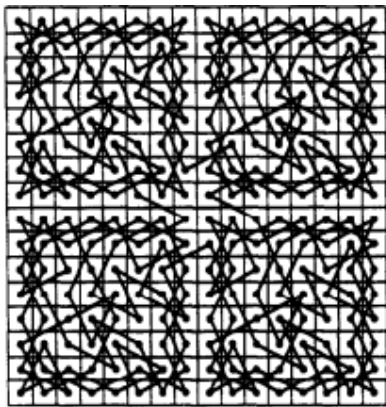
Algoritma *Divide and Conquer* merupakan algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan *The Knight's Tour* dengan papan yang lebih besar. Metode yang digunakan yaitu membagi papan tersebut menjadi bagian yang lebih kecil sehingga lebih mudah diselesaikan.

Pada papan berukuran $n \times n$ dengan n genap, papan dibagi menjadi 4 bagian yang sama yang lebih kecil. Masing-masing bagian tersebut dinamakan basis. Pada basis tersebut diterapkan metode *backtracking* ataupun jika basis masih berukuran besar maka akan digunakan kembali metode *divide and conquer* pada basis tersebut. Setelah itu, masing-masing basis tersebut dihubungkan dengan melakukan rotasi.

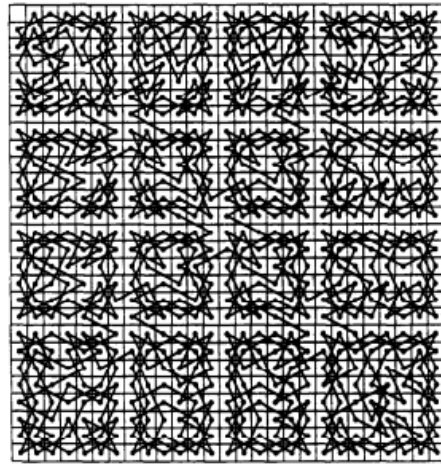
Pada papan dengan ukuran $m \times n$, basis ditentukan secara bebas dan kemudian dicari solusi pada setiap basis dengan menggunakan metode *backtracking* ataupun metode *divide and conquer*. Kemudian masing-masing basis tersebut dihubungkan.



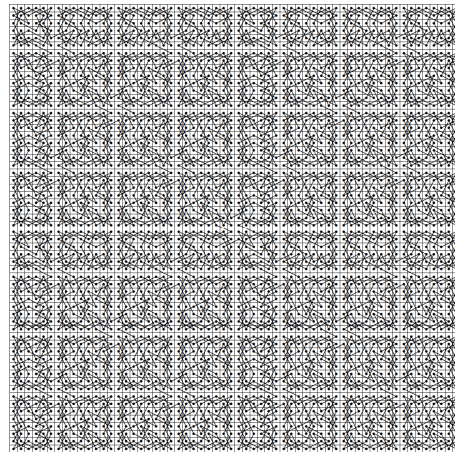
Gambar 5.1. Cara menghubungkan basis (Ian Parbery, *Discrete Applied Mathematics*)



Gambar 5.2. Solusi untuk *The Knight's Tour* 16×16 dengan basis 8×8 (Ian Parbery, *Discrete Applied Mathematics*)



Gambar 5.3. Solusi untuk *The Knight's Tour* 27×27 (Ian Parbery, *Discrete Applied Mathematics*)



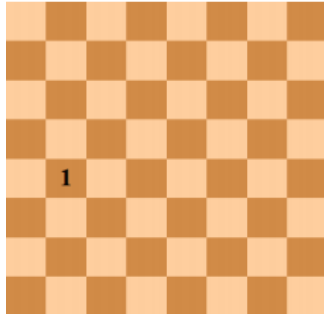
Gambar 5.4 Solusi untuk *The Knight's Tour* 60×60 (larc.unt.edu)

VI. ATURAN WARNSDOFF

Metode Warnsdoff merupakan metode yang ditemukan oleh seorang matematikawan bernama H. C. von Warnsdoff pada tahun 1823 dalam karyanya yang berjudul "*Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung*" yang berarti *The Knight's Simplest and Most General Move Solution*.

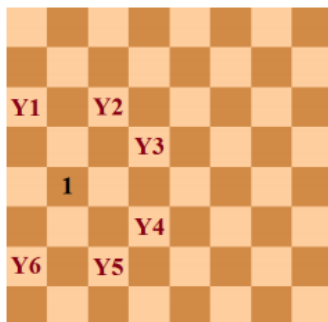
Langkah-langkah yang digunakan oleh aturan Warnsdoff dalam menyelesaikan permainan *The Knight's Tour*:

1. Pilih salah satu petak pada papan secara acak dan tandai petak tersebut sebagai posisi awal. (pada contoh berikut ditandai dengan angka 1)



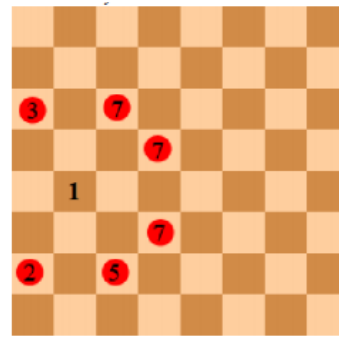
Gambar 6.1. Ilustrasi langkah 1

2. Mendata langkah-langkah yang dapat dilakukan oleh kuda dan kemudian disimpan dalam sebuah *array* Y. Pada contoh berikut, langkah-langkah yang bisa dilakukan oleh kuda yaitu Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6.



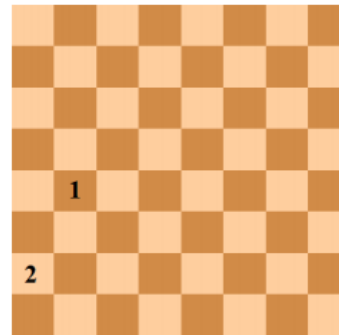
Gambar 6.2. Ilustrasi langkah 2

3. Untuk setiap langkah yang tersimpan dalam *array* Y, hitung semua langkah yang mungkin dilakukan oleh kuda ketika berada pada posisi tersebut. Posisi yang dihitung haruslah posisi yang belum pernah dilewati sebelumnya. Pada contoh berikut, langkah yang dapat dilakukan oleh masing-masing posisi dari Y1-Y6 adalah:
 - Y1: 3 langkah
 - Y2: 7 langkah
 - Y3: 7 langkah
 - Y4: 7 langkah
 - Y5: 5 langkah
 - Y6: 2 langkah



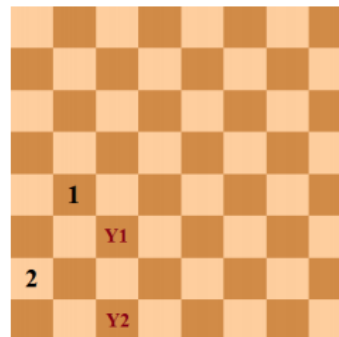
Gambar 6.3. Ilustrasi langkah 3

4. Posisi selanjutnya dipilih berdasarkan jumlah langkah yang paling sedikit yang bisa dilakukan pada posisi Y tertentu. Pada contoh berikut, posisi yang dipilih yaitu Y6 dengan jumlah langkah maksimal 2 langkah.

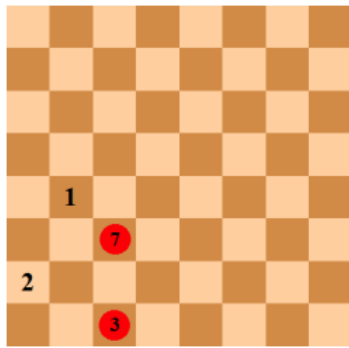


Gambar 6.4. Ilustrasi langkah 4

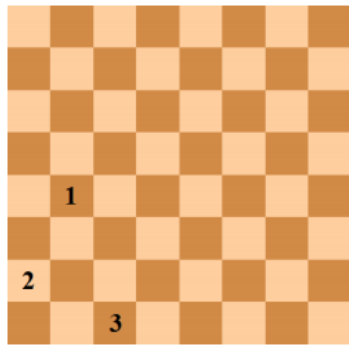
5. Pencarian dilakukan dengan mengulangi langkah nomor 2-4 sampai seluruh papan permainan terisi. Berikut adalah langkah untuk memilih posisi nomor 3.



Gambar 6.5. Ilustrasi langkah 5 (pendataan *array* Y)



Gambar 6.6. Ilustrasi langkah 5 (pencarian langkah maksimal untuk masing-masing Y)



Gambar 6.7. Ilustrasi langkah 5 (penentuan posisi berikutnya)

14	27	16	51	12	29	34	63
17	52	13	28	55	62	11	30
26	15	54	59	50	33	64	35
53	18	25	56	61	58	31	10
24	1	60	49	32	45	36	47
19	40	21	44	57	48	9	6
2	23	42	39	4	7	46	37
41	20	3	22	43	38	5	8

Gambar 6.8. Solusi untuk *The Knight's Tour* 8x8 dengan menggunakan aturan Warnsdoff

Dengan menggunakan aturan Warnsdoff, simpul yang dipilih untuk mencapai solusi akan semakin optimal dan kemungkinan terjadinya kesalahan semakin kecil. Hal ini dikarenakan peluang sebuah langkah di Y benar dinyatakan dengan rumus sebagai berikut:

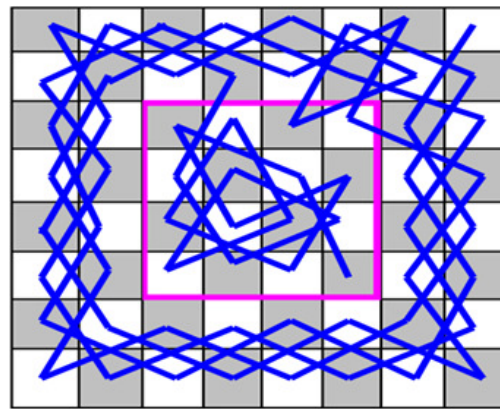
$$P(Y) = \frac{1}{\text{jumlah_langkah_maksimum}}$$

Oleh karena itu, semakin besar jumlah langkah yang dapat dilakukan oleh Y maka semakin kecil kemungkinan untuk Y benar.

VII. METODE DE MOIVRE

Langkah-langkah yang digunakan pada metode De Moivre untuk menyelesaikan permainan *The Knight's Tour*:

1. Solusi hanya bisa dilakukan untuk permainan *The Knight's Tour* dengan ukuran papan umum yaitu ukuran 8x8.
2. Bagi papan menjadi 2 bagian, 1 bagian berukuran 4x4 pada bagian tengah papan, dan 1 bagian lagi sisanya.
3. Petak pertama untuk memulai permainan dapat dipilih secara acak naik di bagian dalam kotak maupun di bagian luar kotak
4. Jika petak yang dipilih sebagai petak pertama adalah pada bagian luar kotak, maka kuda harus melangkahi semua petak pada bagian luar kotak 4x4 terlebih dahulu dan kemudian masuk ke dalam kotak 4x4 dan mengisi semua petak pada kotak tersebut.
5. Sebaliknya jika petak yang dipilih sebagai petak pertama adalah pada bagian dalam kotak, maka kuda harus melangkahi semua petak pada bagian dalam kotak 4x4 terlebih dahulu dan kemudian keluar dari kotak 4x4 dan mengisi semua petak di luar kotak tersebut.



Gambar 7.1. Solusi untuk *The Knight's Tour* 8x8 dengan menggunakan metode De Moivre (gamatika.wordpress.com)

VII. KESIMPULAN

Teori Graf merupakan salah satu cabang ilmu Matematika yang memiliki banyak aplikasi. Salah satu aplikasinya yaitu menentukan solusi untuk teka-teki permainan *The Knight's Tour*. Untuk menyelesaikan permainan ini dapat digunakan berbagai metode yaitu, algoritma *backtracking*, algoritma *Divide and Conquer*, aturan Warnsdoff, dan metode De Moivre.

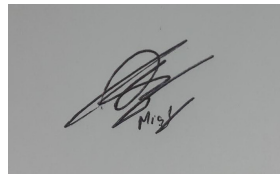
REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi, "Matematika Diskrit", Informatika, Bandung: 2015.
- [2] Munir, Rinaldi, "Strategi Algoritma", Informatika, Bandung: 2010.
- [3] <http://asalmula-permainancatur.blogspot.co.id/> diakses pada tanggal 5 Desember 2015
- [4] https://id.wikipedia.org/wiki/Lintasan_Hamilton diakses pada tanggal 5 Desember 2015
- [5] <https://gamatika.wordpress.com/2011/04/26/knight%E2%80%99s-tour/> diakses pada tanggal 5 Desember 2015
- [6] http://rosettacode.org/wiki/Knight%27s_tour#Haskell diakses pada tanggal 5 Desember 2015
- [7] Parberry, Ian. "Discrete Applied Mathematics" . NH Elsevier, Texas : 1997
- [8] <http://mathworld.wolfram.com/KnightsTour.html> diakses pada tanggal 5 Desember 2015

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 5 Desember 2015

A rectangular box containing a handwritten signature in black ink. The signature is stylized and appears to read 'Micky Yudi Utama'.

Micky Yudi Utama - 13514011