Penerapan Kombinatorial dalam Permainan Sudoku

Dendy Suprihady /13514070
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*author@itb.ac.id*

***Abstract*—Pada makalah ini akan dibahas mengeneai penerapan kombinatorial dalam permainan sudoku, khususnya mengenai algoritma cara penyelesaian permainan ini yang dimana sebagian besar orang berpikir bahwa hanya orang dengan IQ tinggi atau orang pintar saja yang dapat menyelesaikan permainan ini dengan cepat.**

Kata Kunci—Sudoku ,Kombinatorial ,Latin Square.

I. PENDAHULUAN

Permainan sudoku merupakan permainan yang sudah lama dikenal terutama semenjak pertama kali diperkenalkan di surat kabar *Monthly Nikolist* yang beredar di jepang pada tahun 1984. Permainan ini sampai sekarang masih banyak diminati oleh orang – orang baik dari kalangan anak-anak hingga dewasa. Permainan sudoku adalah permainan logika berbasis kombinasi penempatan angka dalam puzzle. Tujuan permainan ini adalah mengisi 9 x 9 kotak dengan angka-angka yang tidak boleh sama dalam satu baris dan dalam satu kolom.
Kotak 9 x 9 akan dibagi menjadi 9 bagian kotal kecil berukuran 3x3 dimana dalam 1 kotak tersebut tidak boleh ada angka yang sama juga.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

A typical sudoku puzzle
Gambar 1.1

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

The same puzzle with solution numbers marked in red
Gambar 1.2

Permainan sudoku sendiri berasal dari bahasa jepang *"Sūji wa dokushin ni kagiru"* yang bisa diartikan sebagai "*angka-angkanya harus tetapa tunggal*".
Permainan sudoku memiliki berbagai macam variasi puzzle seperti *Mini sudoku, Killer sudoku, Aphabetical sudoku, Hyper sudoku* dan lainnya.Namun pada pokok bahasan kali ini hanya akan dibahas sudoku dengan puzzle biasa seperti pada gambar 1.1 dan gambar 1.2.

II. LANDASAN TEORI

2.1. Kombinatorial

Kombinatorial adalah cabang matematika untuk menghitung jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Dengan menghitung secara kombinatorial maka dapat diperoleh jumlah kemungkinan pengaturan dari sejumlah objek dalam suatu himpunan tanpa harus mengenumerasi kemungkinan tersebut satu persatu. Meskipun demikian kombinatorial menjadi sangat membantu dalam melakukan pemecahan masalah untuk menghitung banyaknya kombinasi yang memungkinkan dari nomor yang unik seperti pada permainan sudoku ini.

Dua kaidah dasar yang digunakan dalam menghitung pengaturan objek dalam kombinatorial adalah kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan.

1. Kaidah perkalian (*rule of product*)
   Bila suatu kejadian A memiliki i hasil percobaan yang mungkin terjadi dan suatu kejadian B memiliki j hasil percobaan yang mungkin terjadi, maka bila kejadian A dan kejadian B terjadi bersamaan, akan terdapat $i \times j$ hasil percobaan.

2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)
   Bila suatu kejadian A memiliki i hasil percobaan yang mungkin terjadi dan suatu kejadian B memiliki j hasil percobaan yang mungkin terjadi, maka bila hanya kejadian A atau kejadian B yang terjadi, akan terdapat $i + j$ hasil percobaan.

Terdapat pula metode pencacahan dimana metode dalam mencacah dapat dilakukan dengan berbagai cara, diantaranya adalah dengan aturan pengisian tempat kosong (*filling slots*) , permutasi, kombinasi dan peluang.

A.Pengisian tempat kosong (*filling slots*).

Jika terdapat n buah tepat tersedia dengan:

K_1 adalah banyak cara atau pilihan untuk mengisi tempat pertama, K_2 adalah banyak cara atau pilihan untuk mengisi tempat kedua, setelah tempat-tempat sebelumnya terisi. K_3 adalah banyak cara atau pilihan untuk mengisi tempat ketiga, setelah tempat-tempat sebelumnya terisi sampai K_n dimana K_n adalah banyak cara atau pilihan untuk mengisi tempat ke-n, setelah tempat-tempat sebelumnya terisi.

Maka banyak cara mengisi n tempat yang tersedia secara keseluruhan adalah

$$k_1 \text{ x } k_2 \text{ x } k_3 \text{ x } \dots \text{ x } k_n$$

B.Permutasi

Permutasi adala jumlah urutan yang berbeda dari pengaturan objek-objek. Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah:

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\dots(2)(1)=n!$$

Rumus permutasi-q (jumlah dari penyusunan berbeda objek q yang diambil dari n objek) dilambangkan dengan P(n,q):

$$P(n,q) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\dots(n - (q - 1))$$
$$= n!/(n-q)$$

C.Kombinasi

Kombinasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Kombinasi tanpa pengulangan :

C(n,r) =

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Kombinasi dengan pengulangan:

C(n,r) =

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

D.Peluang

Ada beberapa istilah yang perlu diketahui untuk memahami teori peluang. Istilah-istilah tersebut adalah percobaan, ruang sampel, titik sampel, dan kejadian. Percobaan adalah kegiatan yang dilakukan berulang untuk mendapatkan suatu hasil percobaan tertentu. Ruang sampel atau ruang contoh adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin pada sebuah percobaan. Titik sampel atau titik contoh adalah anggota-anggota dari ruang sampel. Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang contoh. Ada dua macam kejadian :

1. Kejadian sederhana, yaitu kejadian yang hanya memiliki satu titik sampel
2. Kejadian majemuk, yaitu kejadian yang memiliki titik sampel lebih dari satu.

Peluang adalah perbandingan antara banyaknya anggota kejadian (titik sampel) dengan anggota ruang sampel. Peluang suatu kejadian A adalah :

P(A) = n(A) /n(S)

n(A) : banyak anggota kejadian A
n(S) : banyak anggota ruang sampel

Kisaran nilai peluang adalah antara 0 (kemustahilan) sampai dengan 1 (kepastian), atau dapat ditulis dengan notasi $0 \leq P(A) \leq 1$.

2.2 Latin Square

Dalam kombinatorika dan desain eksperimental , Persegi Latin adalah $n \times n$ kotak yang diisi dengan n simbol yang berbeda , masing-masing simbol hanya ada sekali dalam setiap baris dan tepat sekali dalam setiap kolom . Berikut adalah contoh persegi Latin /*Latin Square*:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Jika setiap kotak dari n x n Latin Persegi ditulis sebagai triple (r,c,s) , di mana r adalah baris , c adalah kolom , dan s adalah simbol , kita memperoleh satu set tiga kali lipat n^2 yang disebut susunan orthogonal representasi dari Persegi Latin tersebut .Sebagai contoh , representasi susunan orthogonal dari Persegi Latin diatas :

{ (1,1,1) , (1,2,2) , (1,3,3) , (2,1,2) , (2,2,3) , (2,3,1) , (3,1,3) , (3,2,1) , (3,3,2) } ,

di mana misalnya triple (2,3,1) berarti bahwa dalam baris 2 dan kolom 3 ada simbol 1. Definisi persegi Latin dapat ditulis dalam hal susunan ortogonal :

Sebuah persegi Latin adalah himpunan dari semua triple (r , c , s) , di mana 1 ≤ r , c , s ≤ n , sehingga semua pasangan yang menuturkan (r , c) adalah berbeda , semua pasangan yang menuturkan (r , s) adalah berbeda , dan semua pasangangan yang menuturkan (c , s) adalah berbeda .

III. PEMBAHASAN

Dalam permainan Sudoku yang sudah dijelaskan pada bagian sebelumnya bahwa dalam perkembangan permainan ini dipengaruhi oleh Latin Square. Dalam kombinatorial dan statistik, sebuah Latin Square adalah tabel n × n diisi dengan n simbol berbeda sedemikian rupa sehingga masing-masing simbol terjadi tepat satu kali di setiap baris dan tepat sekali dalam setiap kolom. Tidak ada rumus yang mudah menghitung nomor L (n) × n, n kotak Latin dengan simbol 1,2 ,..., n. Batas atas dan bawah paling akurat dikenal untuk n besar berjauhan adalah dengan rumus berikut[3] :

$$\prod_{k=1}^{n} (k!)^{n/k} \geq L(n) \geq \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}}$$

Rumus diatas dikenalkan oleh *Van Lint* dan *Wilson*.
Contoh dari *latin square* sederhana:

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Latin Square berdasarkan ordenya.

Orde	Latin Square
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

Setiap Sudoku merupakan latin square berorde 9, tetapi latin square belum tentu Sudoku karena ada kondisi tambahan 9 buah sub kisi berukuran 3 x 3.

Dalam menyelesaikan permainan Sudoku ini ada banyak cara yang dapat digunanakan mulai cara yang mudah hinggga yang rumit, tapi kebanyakan orang menganggap bahwa permaian Sudoku ini sangatlah rmit dan hanya orang yang ber ***IQ*** tinggilah yang bias menyelesaikan permaian ini dengan mudah dan cepat. Padahal tidak demikian jika seorang sering berlatih dan belajar pasti bias dengan mudah mengerjakan teka-teki Sudoku ini. Dalam menyelesaikan permaian Sudoku ini banyak sekali kombinasi yang ada pada setiap baris dan kolom, serta kombinasi pada 1 grid/kotak/blok yang harus diisi dengan kombinasi angka 1 sampai dengan 9. Hanya bersandar pada logika dan sebab-akibat. Ada yang menghitung untuk sudoku ukuran 9 x 9, variasi dengan satu solusi berjumlah 6.670.903.752.021.072.936.960 kombinasi untuk solusi penyelesaiannya. Andai solusinya disusun secara simetris, diperoleh 5.472.730.538 variasi.

				6	1			5
	3							9
	4				3			
7	8		3				5	2
		2				9		
5	9				8		1	6
			1				9	
6							7	
9			6	2				

pada ***grid*** (yang berwarna merah) seperti pada gambar tabel diatas dapat diisi dengan kombinasi angka 1 sampai 9. Sedangkan pada baris dan kolomnya juga demikian harus diisi angka 1 sampai 9 dengan syarat antara angka yang diisikan pada baris dan kolom serta pada masing-masing grid/kotak/blok tidak boleh ada yang sama. Contoh pengisian Sudoku yang benar. Dalam menyelesaikan Sudoku dapat dilihat dari langkah-langkahnya sebagai berikut :

		8					3	6	
	3				4	2			
9				8					
7	8		9				6	4	
		2				8			
5	9				6				- a
		3						5	- b
		4	5		2		7		- c
2	9								

Beberapa ***langkah-langkah dalam menyelesaikan permainan Sudoku*** diatas:

Ke Bawah : Dari angka yang disediakan, perhatikan 3 kotak pertama dari samping kiri yang telah diberi nomor 1, 2 dan 3 (ini merupakan 3 kotak parsial) dari sebelah kiri gambar di atas. Kita mulai dari angka yang paling sering muncul dari 3 kotak tersebut, ada angka 9, 3 dan 2. Kita pilih satu angka, misalkan angka 3. Jika : di kotak 1, angka 3 berada di kolom ke 2, di Kotak 2, angka 3 berada di kolom ke-1, maka di kotak 3, angka 3 pasti berada berada di kolom ke-3, dengan terlebih dahulu melihat kotak di samping, dimana angka 3 yang lain berada di baris 1 dan 2 dari bawah.

Ke Samping : Perhatikan kotak 3, 6 dan 9. Kita mulai dari angka yang paling sering muncul dari 3 kotak tersebut, ada angka 5 dan 2. Kita pilih satu angka, misalkan angka 5. Jika :di kotak 9, angka 5 berada di baris a, di kotak 6, angka 5 berada di baris b, maka pastilah pada kotak 3, angka 5 berada di baris c, dan satu-satunya kotak yang tersisa adalah disamping angka 9. Dengan mengikuti langkah diatas maka kita dapat menyelesaikan permainan Sudoku dengan mudah.

Dalam menyelesaiakan Sudoku juga bisa mengeceknya satu persatu dari setiap grid yang ada, tapi ini membutuhkan sebuah ketelitian yang lebih, karena banyak kombinasi yang ada. Menggunakan cara yang kedua yaitu dengan cara membandingkan setiap kotak agar diperoleh kombinasi yang cocok dan tidak ada angka yang sama. Berikut adalah cara menyelesaikan permaian Sudoku dengan cara cek satu persatu kotak :

				8	3	4		
3					4	8	2	1
7								
		9	4		1		8	3
4	6		5		7	1		
								7
1	2	5	3					9
		7	2	4				

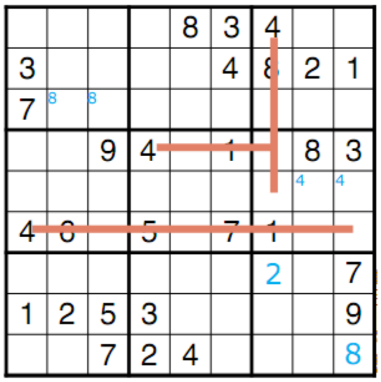
Dalam Sudoku ini memiliki solusi yang unik dan logis, untuk teka-teki, setiap baris, kolom dan kotak harus berisi masing-masing angka 1 sampai 9, pada Sudoku ini memiliki grid 3x3 kecil sebagai kotak dan sel yang berisi nomor sebagai persegi. Baris dan kolom yang dimaksud dengan nomor baris pertama, diikuti dengan kolom nomor: 4,5 adalah baris 4, kolom 5; 2,8 adalah baris 2, kolom 8. Kotak diberi nomor 1-9 dalam rangka membaca,, yaitu 123 456, 789. Untuk memecahkan teka-teki sudoku Anda akan menggunakan logika. Anda akan mengajukan pertanyaan diri sendiri seperti:
“jika 1 dalam kotak ini akan pergi dalam kolom ini 'atau'? jika 9 sudah di baris ini, bisa sebuah 9 masuk kotak ini?. Untuk memulai, lihat setiap kotak dan melihat kotak yang kosong,
pada saat yang sama memeriksa kolom yang persegi dan baris untuk nomor yang hilang.

				8	3	4		
3					4	8	2	1
7								
		9	4		1		8	3
4	6		5		7	1		
								7
1	2	5	3					9
		7	2	4				8

Dalam contoh ini, lihat kotak 9. Tidak ada 8 di dalam kotak, tapi ada adalah kolom 8 dalam kolom 7 dan di 8. Satu-satunya tempat untuk 8 adalah kolom 9, dan dalam kotak ini hanya persegi tersedia dalam baris 9. Jadi menempatkan 8 di persegi itu. Melanjutkan untuk berpikir tentang 8, tidak ada 8 dalam kotak 1, tetapi Anda dapat melihat 8 di baris 1 dan 2.

				8	3	4		
3					4	8	2	1
7	8	8						
		9	4		1		8	3
4	6		5		7	1		
								7
1	2	5	3					9
		7	2	4				8

Jadi, dalam kotak 1, 8 hanya dapat masuk baris 3, tapi ada 2 kotak tersedia. Membuat catatan ini oleh penciling di 8 kecil di kedua kuadrat. Kemudian, ketika kita memiliki menemukan posisi 8 di kotak 4 atau 7 kita akan dapat membantah salah satu 8 yang ada di kotak 1. Ada situasi yang sama dengan 4s dalam kotak-kotak 4 dan 5, tapi di sini hasilnya tidak begitu akurat. Bersama dengan 4 dalam kolom 7 4 yang sama ini menghilangkan semua yang tersedia dikotak dalam kotak 6 terpisah dari dua. Pensil 4 kecil dikedua kotak. Kemudian, satu atau lain dari tanda pensil Anda akan dibuktikan benar atau disalahkan.



Kami melihat kotak 9. Ketika Anda dapat melihat, ada 2 di kotak 7 dan 8, tapi tidak ada di dalam kotak 9. Angka 2 di baris 8 dan baris 9 berarti hanya tempat untuk 2 dalam kotak 9 muncul berada di baris 7, dan karena ada sudah menjadi 2 pada kolom 8, ada hanya satu persegi lagi di kotak yang selama 2 untuk pergi. Anda dapat memasukkan 2 untuk kotak 9 di 7,7. Seterusnya dapat dicek seperti pada cara diatas, sehingga dapat diperoleh hasil akhir menjadi seperti berikut :

9	1	2	6	8	3	4	7	5
3	5	6	7	9	4	8	2	1
7	8	4	1	5	2	9	3	6
2	7	9	4	1	6	5	8	3
5	3	1	8	2	9	7	6	4
4	6	8	5	3	7	1	9	2
8	4	3	9	6	5	2	1	7
1	2	5	3	7	8	6	4	9
6	9	7	2	4	1	3	5	8

IV. KESIMPULAN

Jadi pada pembahasan dalam makalah ini proses penyelesaian permainan sudoku dapat dilakukan dengan pemanfaatan kombinatorial untuk memudahkan pengisian puzzle dengan mencari kombinasi kemungkinan yang akan diisi dan menghitung kemungkinan yang paling besar frekuensinya.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama saya ucapkan terimakasih kepada Tuhan, karena dengan rahmatnya lah saya bisa menyelesaikan makalah ini. Kemudian saya juga mengucapkan terimakasih kepada Ibu Harlili dan Bapak Rinaldi Munir selaku dosen mata kuliah IF 2120 Matematika Diskrit yang telah banyak membagi ilmunya selama semester ini. Dan juga pihak-pihak lain yang telah membantuk penulis dalam penulisan makalah ini.

REFRENSI

[1]Sudoku http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku.

[2]SU berarti angka dan DOKU berarti tunggal. http://universologi.blogspot.com/2010/03/permainan-seperti-sudoku-sudah-dikenal.html

[3]Latin Square http://en.wikipedia.org/wiki/Latin_square

[4]Stirling's approximation http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling's_approximation

[5]Angelina, Lea. Penerapan Perwarnaan Graf dalam Teka-Teki Sudoku. 2006/2007

[6]Manfaat permainan Sudoku http://universologi.blogspot.com/2010/03/permainan-seperti-sudoku-sudah-dikenal.html

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2015

Dendy Suprihady /13514070