

# Representasi Kalimat Logika ke dalam Matriks Trivia

Rio Chandra Rajagukguk  
13514082

Program Studi Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganेशha 10 Bandung 40132, Indonesia  
riochandra@students.itb.ac.id

**Abstract**—Dalam logika komputasi (*computational logic*) dikenal satu istilah *proof method*, yaitu cara membuktikan sebuah kalimat logika benar atau salah. *Propositional resolution* adalah salah satu metode dari *proof method* yang paling sederhana untuk mencari kebenaran kalimat logika. Untuk menggunakan metode *propositional resolution*, kalimat logika harus diubah dahulu ke dalam bentuk klausa. *Implication, negation, distribution, negation* atau dikenal dengan sebutan *INDO* adalah cara yang biasa digunakan untuk mengubah kalimat logika ke bentuk klausanya.

Pernah terpikir bagaimana jika kalimat logika direpresentasikan ke dalam matriks. Kalimat logika ternyata bisa direpresentasikan ke dalam matriks. Disini akan dibahas cara merepresentasikan kalimat logika ke dalam matriks yang disebut matriks trivia dan apa keuntungan dari merepresentasikan kalimat logika ke dalam matriks trivia dan bagaimana menghasilkan bentuk klausa dari kalimat logika menggunakan matriks trivia.

**Keywords**—representasi kalimat logika, matriks trivia, logika proposisional, kalimat logika ke matriks.

## I. Pendahuluan

Logika komputasi (*computational logic*), salah satu cabang ilmu komputer ini mempelajari tentang logika proposisional (*propositional logic*). Pada logika proposisional dipelajari cara untuk membuktikan kalimat logika bernilai benar atau tidak. Beberapa cara yang digunakan seperti *semantic reasoning* dan *proof method*. *Semantic reasoning* menggunakan *truth table, validity checking*, dan *unsatisfiability checking* yang semuanya menggunakan table kebenaran dalam metode pembuktiannya. *Proof method* menggunakan *rules of inference, axiom schemata*, dan *propositional resolution* yang hanya memanfaatkan hukum dasar logika tanpa menggunakan tabel kebenaran.

Pada metode *proof method*, bahasa alami (*natural language*) harus diubah dahulu ke dalam bentuk kalimat logika agar bisa diolah. Kalimat logika yang didapat dari bahasa alami (*natural language*) akan diturunkan satu per-satu menggunakan hukum-hukum logika hingga akhirnya dihasilkan kebenaran dari kalimat logika tersebut.

Disisi lain, kalimat logika yang didapat dari bahasa alami (*natural language*) ternyata dapat direpresentasikan ulang dalam bentuk matriks baris dan kolom. Baris menyatakan disjungsi dan kolom menyatakan konjungsi. Sebut saja nama matriks ini matriks trivia. Angka yang ada pada matriks trivia hanya terdiri dari -1, 0, dan 1 saja. -1 menyatakan negasi dari variabel, 0 menyatakan tidak ada variabel, dan 1 menyatakan variabel berbentuk normal tanpa negasi.

Ada hal yang menarik dari representasi kalimat logika pada matriks trivia ini. Tidak hanya sekedar merepresentasikan saja, namun dengan matriks trivia dapat juga digunakan untuk membuktikan tautologi, kontradiksi, dan menghasilkan bentuk klausa dari kalimat logika tersebut. Matriks trivia sama sekali tidak menentang hukum logika, bahkan menggunakan hukum logika sebagai dasar teorinya.

Untuk mendapatkan bentuk klausa dari kalimat logika biasanya digunakan cara *INDO (implication, negation, distribution, operators)*. Dengan matriks trivia, kalimat logika akan langsung diarahkan ke bentuk klausa, tetapi jika kalimat logika tersebut merupakan tautologi, maka secara alami langsung menjadi tautologi tanpa menghasilkan bentuk klausanya, begitu juga dengan kontradiksi.

## II. Teori Dasar

### A. Hukum Dasar Logika

Dalam ilmu logika dikenal beberapa hukum dasar sebagai berikut:

1. Hukum identitas:

$$p \wedge T = p$$

$$p \vee F = p$$

2. Hukum null/dominasi:

$$p \vee T = T$$

$$p \wedge F = F$$

3. Hukum negasi:  
 $p \wedge \sim p = F$   
 $p \vee \sim p = T$
4. Hukum idempoten:  
 $p \wedge p = p$   
 $p \vee p = p$
5. Hukum involusi(negasi ganda):  
 $\sim(\sim p) = p$
6. Hukum komutatif  
 $p \wedge q = q \wedge p$   
 $p \vee q = q \vee p$
7. Hukum asosiatif:  
 $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$   
 $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
8. Hukum distributif:  
 $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$   
 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
9. Hukum de morgan:  
 $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$   
 $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

### III. Matriks Trivia

#### A. Aturan Dasar

Berikut beberapa aturan yang berlaku pada matriks trivia.

##### 1. Aturan Penulisan

Sebuah premis p ditulis dalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{matrix} p \\ [1] \end{matrix}$$

dan premis  $\sim p$  ditulis sebagai berikut:

$$\begin{matrix} p \\ [-1] \end{matrix}$$

Semua premis diawali dengan huruf kecil.

##### 2. Aturan Konjungsi dan Disjungsi

premis  $p \vee q$  ditulis sebagai berikut:

$$\begin{matrix} p & q \\ [1 & 1] \end{matrix}$$

dan premis  $p \wedge q$  ditulis sebagai berikut:

$$\begin{matrix} p & q \\ [1 & 0] \\ [0 & 1] \end{matrix}$$

begitu juga dengan  $\sim p$  atau  $\sim q$  cukup mengganti 1 menjadi -1

#### 3. Aturan Parenthesis

Aturan ini menyatakan, setiap kalimat logika harus disederhakan ke bentuk paling sederhana (bentuk disjungsi atau konjungsi) ke dalam sub kalimat logika sebelum di masukkan ke dalam matriks trivia. Penyederhanaan ini juga berlaku untuk operator selain disjungsi dan konjungsi. Setiap kali dilakukan penyederhanaan, sub kalimat logika digantikan dengan variabel baru yang diawali huruf besar.

Contoh: kalimat logika

$$(\sim p \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim(q \vee r \vee s)$$

harus disederhanakan menjadi

$$(\sim p \vee A) \wedge \sim B$$

disederhanakan lagi menjadi

$$C \wedge \sim B$$

lalu ditulis dalam matriks trivia sebagai berikut:

$$\begin{matrix} C & B \\ [1 & 0] \\ [0 & -1] \end{matrix}$$

Contoh lain:

$$\sim(p \rightarrow q) \vee (r \wedge (s \leftrightarrow b))$$

dengan  $A = p \rightarrow q$  dan  $B = s \leftrightarrow b$ , maka

$$\sim A \vee (r \wedge B)$$

dengan  $C = r \wedge B$ , maka

$$\sim A \vee C$$

#### 4. Aturan Operator Lain

Jika terdapat operator lain seperti implikasi, biimplikasi, disjungsi eksklusif, dan lain lain maka operator tersebut harus diubah dahulu ke bentuk disjungsi atau konjungsi sebelum disubstitusikan ke dalam matriks trivia.

Contoh: kalimat logika

$$p \rightarrow q$$

kalimat  $p \rightarrow q$  diubah menggunakan identitas logika menjadi  $\sim p \vee q$ , lalu ditulis ke dalam matriks trivia

$$\begin{matrix} p & q \\ [-1 & 1] \end{matrix}$$

#### 5. Aturan De Morgan

Premis  $\sim(p \vee q)$  ditulis:

$$\begin{matrix} p & q \\ [-1 & 1] \end{matrix}$$

dikembangkan menjadi  $\sim p \wedge \sim q$  ditulis:

$$\begin{matrix} p & q \\ [-1 & 0] \\ [0 & -1] \end{matrix}$$

begitu juga sebaliknya,  $\sim(p \wedge q)$  ditulis:

$$\begin{matrix} p & q \\ [-1 & 0] \\ [0 & 1] \end{matrix}$$

disederhanakan menjadi  $\sim p \vee \sim q$  ditulis:

$$\begin{array}{cc} p & q \\ [-1 & -1] \end{array}$$

Catatan: Hukum de Morgan berlaku tidak hanya pada dua premis saja, tetapi juga berlaku untuk n premis dengan  $n \geq 2$ .

### 6. Aturan Dominasi

Jika ada dua variabel yang sama pada matriks sebaris memenuhi hukum dominasi disjungsi, maka baris tersebut dapat dihapus karena memenuhi hukum identitas konjungsi.

Contoh: kalimat logika

$$(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee q \vee \sim r \vee \sim q) \wedge (q)$$

ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{cccc} p & q & r & q \\ [-1 & 1 & -1 & 0] \\ [1 & 1 & -1 & -1] \\ [0 & 1 & 0 & 0] \end{array}$$

dengan hukum dominasi disjungsi  $(p \vee q \vee \sim r \vee \sim q)$  bernilai true sehingga kalimat tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccc} p & q & r \\ [-1 & 1 & -1] \\ [true & & ] \\ [0 & 1 & 0] \end{array}$$

dengan hukum identitas konjungsi, kalimat tersebut menjadi  $(\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge true \wedge (q) = (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (q)$

$$\begin{array}{ccc} p & q & r \\ [-1 & 1 & -1] \\ [0 & 1 & 0] \end{array}$$

### 7. Aturan idempoten

Jika ada dua variabel yang sama sebaris memenuhi hukum idempoten, maka salah satu kolom variabel tersebut bisa dihapus sehingga menyisakan satu kolom variabel saja.

Contoh: kalimat logika

$$(\sim p \vee q \vee \sim p) \wedge (q \vee r \vee r)$$

ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc} p & q & r & p & r \\ [-1 & 1 & 0 & -1 & 0] \\ [0 & 1 & 1 & 0 & 1] \end{array}$$

karena  $\sim p \vee \sim p$  dan  $r \vee r$  memenuhi hukum idempoten, maka cukup ditulis dalam satu kolom variabel saja, menjadi:

$$\begin{array}{ccc} p & q & r \\ [-1 & 1 & 0] \\ [0 & 1 & 1] \end{array}$$

### 8. Aturan Komutatif

Pada matriks trivia, hukum komutatif juga berlaku mengikuti hukum dasar logika

$$\begin{array}{ccc} p & q & r \\ [-1 & 1 & 0] \\ [0 & 1 & 1] \end{array}$$

memiliki makna yang sama walaupun posisi p, q, r diubah-ubah seperti dibawah

$$\begin{array}{ccc} q & p & r \\ [1 & -1 & 0] \\ [1 & 0 & 1] \end{array}$$

### 9. Aturan Substitusi dan Distribusi

Karena terdapat aturan parenthesis yang menyederhakan kalimat logika, maka harus ada aturan substitusi untuk mengembalikan premis-premis yang disederhanakan sebelumnya. Pada aturan substitusi, terdapat dua kemungkinan yaitu penambahan baris atau penambahan kolom. Substitusi yang mengandung disjungsi akan menambah kolom, sedangkan substitusi yang mengandung konjungsi akan menambah baris. Substitusi dilakukan hingga tidak ada lagi bentuk *sub* kalimat logika.

Contoh pada aturan parenthesis

$$(\sim p \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim (q \vee r \vee s)$$

disederhanakan menjadi

$$C \wedge \sim B$$

ditulis

$$\begin{array}{cc} C & B \\ [1 & 0] \\ [0 & -1] \end{array}$$

substitusi C menjadi  $\sim p \vee A$  seperti hukum distribusi pada hukum logika, ditulis

$$\begin{array}{ccc} p & A & B \\ [-1 & 1 & 0] \\ [0 & 0 & -1] \end{array}$$

lalu substitusi A menjadi  $q \wedge \sim r$ , ditulis

$$\begin{array}{cccc} p & q & r & B \\ [-1 & (1 & 0) & 0] \\ & (0 & -1) & \\ [0 & 0 & 0 & -1] \end{array}$$

Catatan: substitusi cukup dilakukan pada baris yang bernilai 1 atau -1, karena pada baris yang bernilai 0 menyatakan tidak ada premis pada baris tersebut.

ditulis ulang mengikuti premis diatasnya menjadi

$$\begin{array}{cccc} p & q & r & B \\ [-1 & 1 & 0 & 0] \\ [-1 & 0 & -1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & -1] \end{array}$$

hal ini sesuai dengan hukum distribusi logika,

$$\begin{aligned} & (\sim p \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim B \\ & = (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge \sim B \end{aligned}$$

kemudian substitusi B menjadi  $q \vee r \vee s$

p	q	r	q	r	s
[-1	1	0	0	0	0]
[-1	0	-1	0	0	0]
[0	0	0	-(1	1	1)]

dengan hukum de Morgan ditulis ulang sebagai berikut:

p	q	r	q	r	s
[-1	1	0	0	0	0]
[-1	0	-1	0	0	0]
[0	0	0	-1	0	0]
			0	-1	0]
			0	0	-1]

ditulis ulang lagi mengikut premis-premis di atasnya

p	q	r	q	r	s
[-1	1	0	0	0	0]
[-1	0	-1	0	0	0]
[0	0	0	-1	0	0]
[0	0	0	0	-1	0]
			0	0	-1]

menjadi

p	q	r	q	r	s
[-1	1	0	0	0	0]
[-1	0	-1	0	0	0]
[0	0	0	-1	0	0]
[0	0	0	0	-1	0]
[0	0	0	0	0	-1]

kemudian lakukan penyederhanaan menggunakan hukum idempoten dan hukum dominasi, menjadi

p	q	r	s
[-1	1	0	0]
[-1	0	-1	0]
[0	-1	0	0]
[0	0	-1	0]
[0	0	0	-1]

Perlu diperhatikan pada operator selain disjungsi dan konjungsi, substitusi dapat dilakukan setelah operator tersebut diubah ke bentuk disjungsi atau konjungsi.

Contoh: kalimat logika

$$\sim A \vee p$$

$$\text{dengan } A = p \rightarrow q$$

ditulis

A	p
[-1	1]

substitusi  $A = p \rightarrow q = \sim p \vee q$

p	q	p
[-(-1	1)	1]

menjadi

p	q	p
[1	0	1]
[0	-1	1]

disederhanakan menjadi

p	q
[1	0]
[1	-1]

## B. Tautologi, Kontradiksi, dan Klausa

Pada akhir substitusi matriks trivia, terdapat tiga hal yang mungkin terjadi, yaitu hasil akhir berupa tautologi, kontradiksi, atau klausa.

Tautologi dapat terjadi jika pada akhir substitusi tidak ada baris yang tersisa (baris kosong) dan bernilai true. Perhatikan contoh dibawah:

$$(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$$

disederhanakan menjadi  $A \wedge B$ , ditulis

A	B
[1	0]
[0	1]

substitusi A menjadi  $p \vee \sim p$

p	p	B
[1	-1	0]
[0	0	1]

disederhanakan menjadi

p	B
[true	]
[0	1]

baris 1 dihapus, menjadi

p	B
[0	1]

substitusi B menjadi  $q \vee \sim q$ , ditulis

p	q	q
[0	1	-1]

disederhanakan menjadi

p	q
[true	]

baris 1 dihapus, menjadi

p	q
true	

matriks kosong bernilai true menyatakan kalimat logika tersebut adalah tautologi

Kontradiksi dapat terjadi jika pada saat substitusi terdapat satu baris yang bernilai false. Kondisi false terjadi saat ada dua baris yang mengandung hanya satu variabel yang sama dan memiliki nilai saling berlawanan -1 dan 1. Perhatikan contoh dibawah:

$$(p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim q) \wedge C$$

disederhanakan menjadi  $A \wedge B$ , ditulis

A	B	C
[1	0	0]
[0	1	0]
[0	0	1]

substitusi A menjadi  $p \vee \sim p$

p	p	B	C
[1	-1	0	0]
[0	0	1	0]
[0	0	0	1]

sederhanakan

B	C
[1	0]
[0	1]

substitusi B dengan  $q \wedge \sim q$

q	q	C
[1	0	0]
[0	-1	0]
[0	0	1]

sederhanakan

q	C
[1	0]
[-1	0]
[0	1]

baris 1 dan 2 hanya memiliki satu variabel dengan variabel yang sama dan saling berlawanan, jika disederhanakan menjadi

q	C
[false	]
[0	-1]

karena salah satu baris bernilai false, maka sesuai dengan hukum null, hasil akhir akan bernilai false, sehingga dihasilkan kontradiksi.

Tautologi dan kontradiksi dihasilkan pada matriks trivia dengan hasil akhir tidak ada baris yang tersisa. Jika ada baris yang tersisa maka baris yang tersisa tersebut menjadi akan menjadi bentuk klausa dari kalimat logika tersebut. Misalnya pada penjelasan aturan substitusi dan distribusi, dihasilkan matriks akhir sebagai berikut:

p	q	r	s
[-1	1	0	0]
[-1	0	-1	0]
[0	-1	0	0]
[0	0	-1	0]
[0	0	0	-1]

dengan matriks tersebut dapat diambil bentuk klausanya dengan cara mengalikan matriks trivia tersebut dengan matriks  $n \times 1$  yang berisi variabel-variabel yang ada di atasnya

[-1	1	0	0]	[p]	[- p + q ]
[-1	0	-1	0]	[q]	[- p - r ]
[0	-1	0	0]	[r]	[- q ]
[0	0	-1	0]	[s]	[- r ]
[0	0	0	-1]		[- s ]

sehingga didapatkan bentuk klausa dari

$$(\sim p \vee (q \wedge \sim r)) \wedge \sim (q \vee r \vee s)$$

sebagai berikut:

- $\sim p, q$
- $\sim p, \sim r$
- $\sim q$
- $\sim r$
- $\sim s$

### C. Keuntungan dan Kerugian Matriks Trivia

Mencari kebenaran suatu kalimat logika sangat mudah dilakukan dengan hanya menggunakan dasar hukum logika, termasuk melakukan resolusi dengan cara biasa menggunakan *INDO*. Namun kemudahan ini tidak terlihat ketika kalimat logika yang ingin diolah sangat panjang dan kompleks. Penulisan variabel yang berulang-ulang dan operator yang sangat banyak terkadang membuat bingung dan silap.

Matriks trivia menggunakan metode berpikir secara rekursif dengan menyelesaikan masalah paling sederhana satu per-satu hingga dicapai kesimpulan berupa tautologi, kontradiksi, atau bentuk klausa. Matriks trivia terlihat kompleks jika digunakan untuk menyelesaikan kasus sederhana seperti pada contoh-contoh sebelumnya, namun matriks ini lebih mudah digunakan dalam menyelesaikan kalimat-kalimat logika yang panjang dan kompleks.

## IV. Simpulan dan Saran

Dari beberapa hal yang telah dijelaskan diatas, representasi kalimat logika ke dalam matriks yang disebut matriks trivia hanyalah sebuah ide semata. Matriks trivia sebagai salah satu alat (*tools*) dalam menyelesaikan permasalahan logika diharapkan dapat membantu mempermudah penyelesaian permasalahan logika proposisional.

Saat ini kegunaan matriks trivia hanya sebatas pengecekan tautologi, kontradiksi dan mendapatkan bentuk klausa dari kalimat logika. Bisa jadi matriks trivia berguna untuk hal lain dalam ilmu logika komputasi selain tiga hal diatas, maka dari itu dibutuhkan penelitian lanjutan dari makalah ini.

## References

- [1] Munir, Rinaldi, Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit, Teknik Informatika ITB, 2006.
- [2] -, Computational Logic Lecture Notes, Stanford University, 2009

## **PERNYATAAN**

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2015

Rio Chandra Rajagukguk  
13514082