

# Pemanfaatan Graf dalam Skema Subdivisi Permukaan Bangun Dimensi Tiga

Muhammad Reifiza 13514103  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13514103@std.stei.itb.ac.id

**Abstrak**—Graf merupakan cabang ilmu Matematika Diskrit yang memiliki banyak pengaplikasian dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah merepresentasikan bentuk bangun geometri, meskipun aplikasi ini sekilas kurang lazim dibandingkan dengan vektor. Namun, walaupun analisis ruang dimensi tiga melibatkan lebih banyak penghitungan menggunakan analisis vektor dan kalkulus lanjut, penggunaan graf untuk menyimbolkan topologi bangun geometri sangatlah masuk akal, terlebih dalam hal struktur data. Subdivisi bangun dengan representasi graf menjadi penting salah satunya untuk urusan estetika.

**Keywords**—Graf, Subdivisi, Catmull, Clark, Doo, Sabin, Loop

## I. PENDAHULUAN

Banyak permasalahan dalam berbagai masalah praktis juga di bidang matematika dan teknik infomatika dapat diselesaikan dengan menggunakan skema graf[1]. Salah satu permasalahan yang muncul ketika berurusan dengan bangun dimensi tiga adalah membuat bangun tersebut tampak lembut (*smooth*). Topologi sebuah bangun dimensi tiga dapat dipandang sebagai sebuah graf yang berada di dimensi tiga. Solusi untuk membuat graf ini tampak lembut adalah dengan “membagi-membagi” graf ini, atau lebih dikenal dengan istilah subdivisi.

Dalam hal ini, posisi simpul dalam sebuah graf menjadi penting karena graf merepresentasikan bentuk geometri sebuah bangun. Subdivisi elementer tidak cukup dalam kasus ini karena tidak akan mengubah bentuk yang direpresentasikan graf.

Ada banyak skema subdivisi yang dapat digunakan dan sudah banyak diaplikasikan dalam aplikasi grafis komputer berbasis tiga dimensi. E. Catmull dan J. Clark pada tahun 1978 memublikasikan sejumlah aturan untuk skema subdivisi yang dikenal dengan skema Catmull-Clark[3], dan pada saat yang hampir sama D.Doo dan M.Sabin memublikasikan skema subdivisi Doo-Sabin[4] yang hampir mirip dengan skema Catmull-Clark[6]. Pada tahun 1987, C. Loop memublikasikan skema subdivisi[6] yang dikenal dengan skema Loop dan kemudian disempurnakan bersama J. Stam[5].

Skema-skema di atas menggunakan banyak teori matematika lanjut yang berada diluar cakupan makalah ini.

Dalam makalah ini penulis hanya akan membahas skema-skema di atas tanpa melakukan penurunan matematis. Skema-skema di atas sudah terbukti menjamin kontinuitas topologi bangun.

Skema-skema subdivisi di atas dapat menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang timbul dalam komputer grafis: topologi acak, *scalability*, kesatuan representasi, stabilitas numerikal, dan simplisitas kode.[7]

## II. TEORI GRAF

Sebuah graf  $G$  adalah pasangan terurut  $(V, E)$ , di mana  $V$  adalah beberapa himpunan dan  $E$  adalah himpunan dari 2 titik upahimpunan  $V$ . Anggota himpunan  $V$  disebut simpul graf  $G$  dan anggota himpunan  $E$  disebut sisi dari graf  $G$ [1]. Setiap sisi  $G$  terasosiasi dengan sebuah atau 2 buah simpul *endpoint*[9]

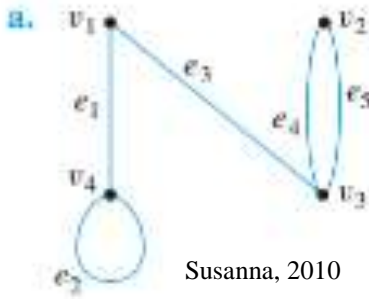
Sebuah sisi  $G$  dengan sebuah *endpoint* disebut kalang, dan 2 atau lebih sisi berbeda yang memiliki *endpoint* yang sama disebut sisi paralel[9]. Berdasarkan ada tidaknya kalang dan sisi ganda, graf dapat dikelompokkan menjadi graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana (*unsimple graph*)[8].

Dua buah simpul  $G$  disebut bertetangga apabila keduanya terhubung langsung oleh satu atau lebih sisi[8] dan simpul-simpul tersebut disebut bersisian dengan sisi-sisi tersebut[8, 9]. Sisi-sisi pada graf  $G$  membagi bidang menjadi beberapa muka (*faces*)[8].

Graf memiliki beberapa tipe khusus:

1. Graf Lengkap, yaitu graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Jumlah sisi pada graf lengkap adalah  $n(n-1)/2$  [8].
2. Graf lingkaran, yaitu graf yang setiap simpulnya berderajat dua. [8]
3. Graf teratur, yaitu graf yang setiap simpulnya berderajat sama.

Misalkan  $G_1$  adalah sebuah graf berikut



Susanna, 2010

Operasi subdivisi elementer pada  $G_1$  di sisi  $e_3$  merupakan serangkaian operasi sebagai berikut:

1. Tambahkan sebuah simpul baru (misalnya simpul  $v_5$ ) di tengah sisi  $e_3$ .
2. Hilangkan sisi  $e_3$
3. Tambahkan 2 buah sisi baru, masing-masing

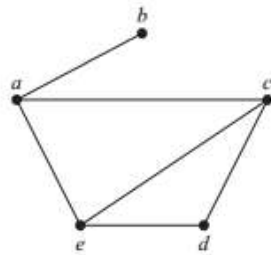


FIGURE 1 A Simple Graph.

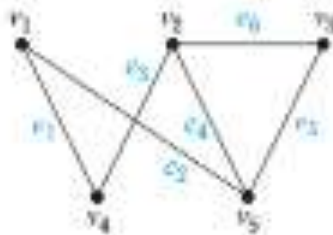
TABLE 1 An Adjacency List for a Simple Graph.

Vertex	Adjacent Vertices
$a$	$b, c, e$
$b$	$a$
$c$	$a, d, e$
$d$	$c, e$
$e$	$a, c, d$

Contoh Adjacency List (Rosen 2007)

menghubungkan simpul  $v_1$  dengan  $v_5$  dan  $v_5$  dengan  $v_3$

Pada dasarnya, operasi ini digunakan untuk membagi sebuah sisi menjadi dua buah sisi[2].



$$\begin{matrix}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
 \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 
 \end{matrix}$$

Contoh Incidence Matrix (Rosen 2007)

### III IMPLEMENTASI GRAF DALAM STRUKTUR DATA

Dalam struktur data, graf dapat diimplementasikan sebagai berikut:

1. *Adjacency Matrix*. Graf disimpan dalam sebuah matriks  $n \times n$  yang menyimpan jumlah sisi yang bersisian dengan sebuah simpul[2]. Berikut ini adalah contoh *adjacency matrix* dari graf  $G_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

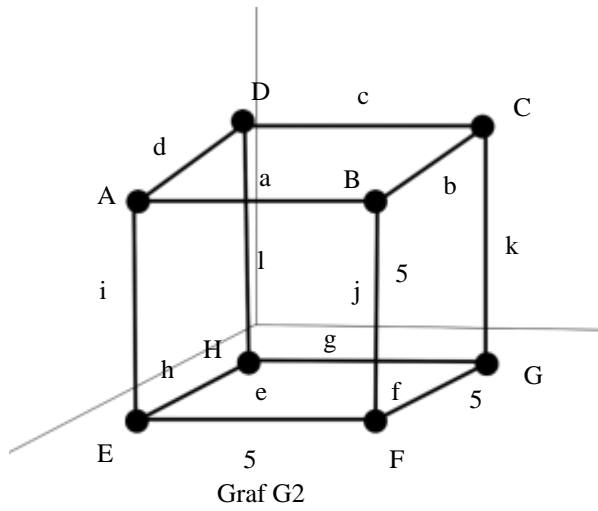
2. *Adjacency List*. Jika sebuah graf tidak memiliki sisi ganda, semua sisi graf dapat dimasukkan ke

sebuah daftar yang disebut *adjacency list*, yaitu daftar simpul dengan simpul-simpul tetangganya[2].

3. *Incidence Matrix*. Misalkan  $G$  adalah sebuah graf tak berarah dengan  $G = (V, E)$ . Misalkan  $v_1, v_2, \dots, v_n$  adalah simpul dan  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$  adalah sisi-sisi graf tersebut. *Incidence matrix* dengan susunan  $V$  dan  $E$  ini adalah matriks  $M = [m_{ij}]$  dengan ukuran  $n \times m$  dimana  $m_{ij} = 1$  jika  $e_j$  bersisian dengan  $v_i$ , 0 jika tidak[2].
4. *Incidence List*. Mirip seperti *Adjacency List*, tetapi yang ada dalam daftar adalah pasangan sisi dengan simpul yang bertetangga dengannya [10].

### IV GRAF DALAM RUANG DIMENSI TIGA

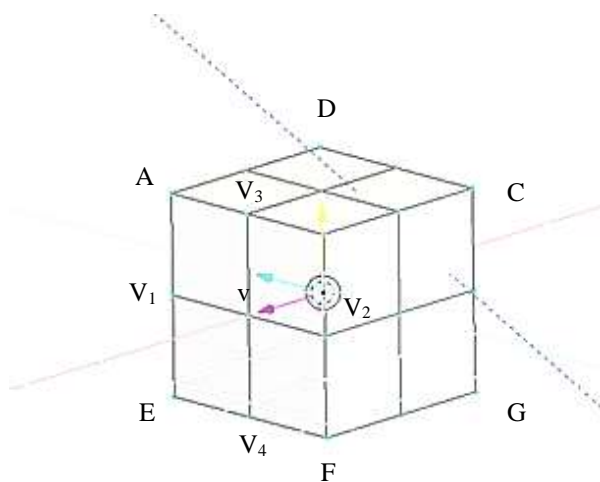
Suatu bangun ruang dimensi tiga dapat direpresentasikan dalam bentuk graf. Dalam kasus ini, ambil perjanjian bahwa sumbu vertikal untuk sumbu  $z$ , sumbu horizontal untuk sumbu  $x$ , dan sumbu lainnya untuk sumbu  $y$ . Jarak antar simpul dapat direpresentasikan sebagai bobot sisi graf, dan sisi graf didefinisikan sedemikian rupa sehingga menjadi sisi yang terpendek antar simpul yang bersisian. Berikut ini adalah contoh sebuah kubus  $ABCD.EFGH$  yang direpresentasikan dengan sebuah graf.



Jika koordinat kubus diatas direpresentasikan dengan sebuah vektor, maka **a** adalah vektor titik a, **b** adalah vektor titik b, **c** adalah vektor titik c, dan seterusnya, juga **AB** adalah **b - a**, **BC** adalah **c - b**, **CD** adalah **d - c**, dan seterusnya. Akibatnya, bobot sisi a tidak lain adalah  $\|AB\|$ , bobot sisi b adalah  $\|BC\|$ , bobot sisi c adalah  $\|CD\|$ , dan seterusnya.

Akibat dari konvensi di atas, posisi simpul graf menjadi penting karena simpul merepresentasikan koodinat bangun.

Skema subdivisi yang lebih lanjut dari subdivisi elementer adalah subdivisi biasa. Prinsip dari skema ini adalah tiap sisi yang membentuk sebuah muka disubdivisi elementer, lalu tiap simpul baru yang dihasilkan oleh oleh proses subdivisi elementer dihubungkan oleh sebbuah sisi. Tiap sisi yang berpotongan diletakkan simpul (misal v) di perpotongan sisi-sisi tersebut. Setelah itu sisi-sisi yang berpotongan dihilangkan, dilanjutkan dengan penambahan sisi-sisi pengganti yang menghubungkan v dengan simpul-simpul hasil operasi subdivisi elementer. Proses ini dilanjutkan sampai iterasi ke-n.



Subdivisi Biasa pada Graf G2 / Kubus ABCD.EFGH pada iterasi pertama

Gambar di atas menunjukkan bahwa operasi subdivisi

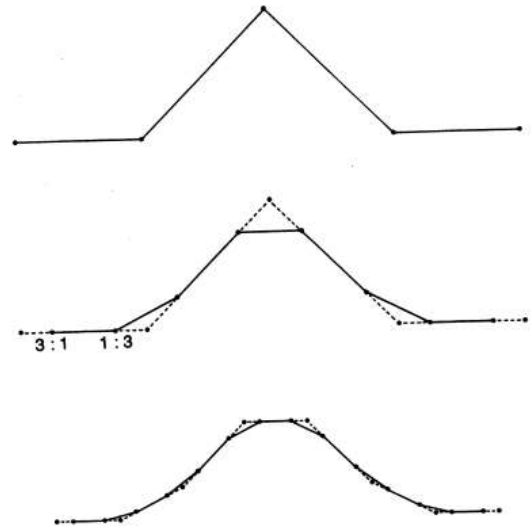
ini tidak mengubah topologi bangun semula.

## V. SKEMA SUBDIVISI

Skema-skema subdivisi yang diperkenalkan E.Catmull dan J. Clark, D. Doo dan M.Sabin, dan lain-lain dapat digunakan untuk menciptakan bangun yang lembut. Skema subdivisi berikut ini tidak membahas adanya *crease* dan *sharp edges* yang diterapkan pada suatu bangun.

### 1. Skema/Algoritma Chaikin

Tahun 1974, Chaikin memperkenalkan 'An algorithm for high speed curve algorithm' [Chaikin 1974]. Algoritma Chaikin membuat dua buah simpul kontrol baru dengan



Subdivisi Simpul kontrol/Poligon kontrol pada skema Chaikin. (Loop 1987).

jarak  $\frac{1}{4}$  dan  $\frac{3}{4}$  dari simpul awal ke *endpoint*. Rasio ini dipilih dengan alasan performansi komputer, karena hanya melibatkan operasi *add* dan *shift* pada pola bit[6].

Proses subdivisi dengan rasio di atas dilakukan secara rekursif hingga jarak antara simpul kontrol yang bertetangga sangat kecil; di bawah resolusi layar piranti[6]. Skema ini awalnya dirancang untuk graf kontrol yang tidak memiliki muka, namun dikembangkan lebih lanjut untuk graf yang memiliki muka.

### 2. Skema Catmull-Clark

Skema subdivisi Catmull-Clark pada prinsipnya adalah generalisasi aturan untuk subdivisi *bicubic B-spline* (B adalah singkatan untuk *basic*) ke subdivisi untuk topologi bebas[3]. Aturan tersebut adalah:

- Pembentukan simpul muka baru. Simpul muka baru adalah rata-rata koordinat simpul-simpul lama yang membentuk sebuah muka (*face*). Misal dalam graf G2, simpul muka yang baru adalah v dengan posisi/koordinat

$$b. \quad v = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Simpul muka baru yang terbentuk akan terletak persis di tengah-tengah muka yang lama. Masalah penambahan sisi untuk menghubungkan simpul ini dengan simpul lainnya akan dibahas kemudian.

- c. Pembentukan simpul sisi baru. Skema subdivisi biasa menempatkan simpul sisi baru tepat di tengah sisi (misalnya  $v_2$  terletak persis di sisi  $j$ (BF)). Namun, skema Catmull-Clark tidak menempatkan simpul sisi baru seperti ini, melainkan agak bergeser untuk menyesuaikan dengan penambahan simpul muka baru pada langkah sebelumnya, jika sisi tersebut membatasi 2 buah muka yang berlainan[3] (misal dalam graf  $G_2$ , sisi  $j$  /BF membatasi muka ABFE dan CDFG). Hal ini dilakukan selain dari penurunan matematis yang tidak penulis bahas, juga untuk hal estetis (jika dipaksakan di tengah sisi maka bentuk geometri graf menjadi aneh) [3][7]. Oleh karena itu, misalkan simpul baru ini adalah  $v_{new}$ , sisi membatasi dua buah muka yang memiliki simpul muka baru masing-masing  $v_1$  dan  $v_2$ , dan sisi tersebut bersisian dengan  $v_3$  dan  $v_4$ , penempatan simpul sisi baru mengikuti formula

$$v_{new} = \frac{\frac{(v_3 + v_4)}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}}{2}$$

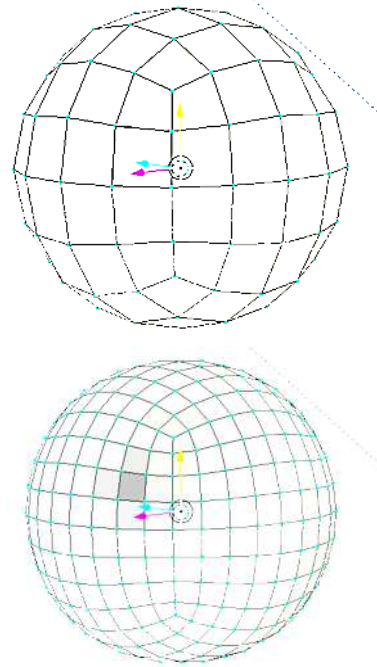
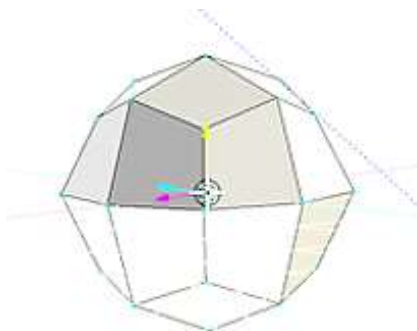
- d. Penempatan simpul baru. Simpul baru ini bukan benar-benar sebuah simpul baru, melainkan simpul lama yang koordinatnya digeser. Koordinat baru dari simpul ini mengikuti rumus

$$\frac{Q}{n} + \frac{2R}{n} + \frac{S(n-3)}{n}$$

Dimana Q adalah rerata semua simpul muka pada muka yang bertetangga dengan simpul lama, R adalah rerata semua titik tengah sisi lama yang bersisian dengan simpul lama, dan S adalah simpul lama.

Setelah penambahan semua simpul selesai, sisi-sisi baru dibentuk dengan menghubungkan simpul muka dengan simpul sisi baru yang mendefinisikan muka, dan menghubungkan semua simpul baru dengan simpul sisi baru yang bersisian[3].

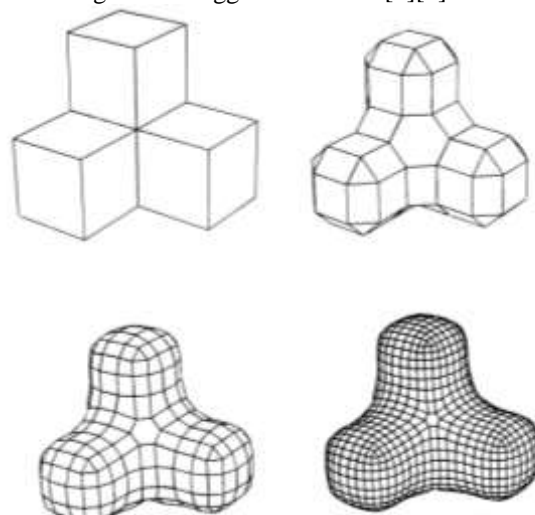
Skema ini terus diulang hingga iterasi ke-n. Berikut ini adalah ilustrasi graf  $G_2$  yang disubdivisi hingga iterasi ketiga.



Subdivisi Graf  $G_2$  dengan skema Catmull-Clark sampai iterasi ke-3

#### 4. Skema Doo-Sabin

Pada prinsipnya, skema Doo-Sabin mirip seperti skema Chaikin, namun dapat berlaku untuk graf/bangun yang membentuk muka (*face*). Jika muka merupakan graf lingkaran dengan sisi  $\geq 3$ , simpul baru mungkin dibuat di tengah sisi yang menghubungkan tengah muka dengan simpul-simpul yang membatasi muka tersebut. Langkah ini diulang terus hingga iterasi ke-n [4][6].



Skema subdivisi Doo-Sabin (Loop, 1978).

## VI. KESIMPULAN

Skema subdivisi permukaan yang dikemukakan Catmull-Clark, Doo-Sabin, Loop, dan lain-lain sangat membantu untuk menciptakan sebuah bangun dengan topologi yang lembut. Tentunya skema-skema ini juga berlaku untuk graf dengan konvensi yang penulis bahas. Graf dengan konvensi seperti ini berguna untuk melambangkan topologi dari bangun geometri, juga memudahkan untuk diimplementasikan dalam struktur data.

## VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan puji syukur kepada Tuhan YME karena atas limpahan rahmatnya penulis mampu untuk menyelesaikan makalah ini. Penulis juga mengucapkan kepada dosen mata kuliah Matematika Diskrit, Bapak Rinaldi Munir dan Ibu Harlili, khususnya dalam mengajarkan teori graf yang menjadi “primadona” untuk menyelesaikan berbagai masalah baik di bidang informatika maupun bidang lainnya.

## REFERENSI

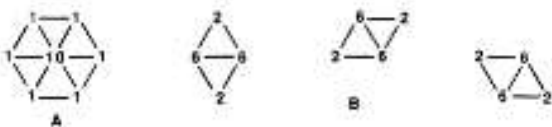
- [1] Jiri Matousek dan Jaroslav Nesetrav, “*Invitation to Discrete Mathematics: Second Edition*”. New York : Oxford University Press, 2008.
- [2] K. H. Rosen, “*Discrete Mathematics and its Applications 7th ed.*” New York: McGraw-Hill, 2007.
- [3] E. Catmull dan J. Clark, 'Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes.' dalam *Computer Aided Design*, Vol.10 No.6 ,1978, pp350-355.
- [4] D. Doo dan M. Sabin, 'Analysis of the Behaviour of Recursive Definition Surface' dalam *Computer Aided Design*, Vol.10 No.6 ,1978, pp356-360.
- [5] Jos Stam dan Charles T. Loop, 'Quad/Triangle Subdivision', 2002.
- [6] Charles T. Loop, "*Smooth Subdivision Surfaces based on Triangles*". Utah: Departmen of Mathematics University of Utah, 1987.
- [7] Denis Zorin, dkk. 'Subdivision for Modeling and Animation' Proceedings of SIGGRAPH 99.
- [8] Rinaldi Munir, "*Matematikan Diskrit Edisi Kedua*". Bandung : Penerbit Informatika, 2003.
- [9] Susanna S.Epp, “Discrete Mathematics with Applications” 4th ed. Canada: Richard Stratton/Cengage Learning. , 2010
- [10] Slide Kuliah Algoritma dan Struktur Data ‘Graf’ dari situs kuliah<dot>itb<dot>ac<dot>id, diakses 10 Desember 2015.

## 5. Skema Loop

Skema Loop adalah skema yang cocok jika muka (*face*) merupakan graf lingkaran yang memiliki sisi = 3[7]. Artinya, semua muka berbentuk segitiga. Skema Loop sendiri pada prinsip merupakan generalisasi aturan subdivisi pada permukaan triangular[6]. Hoppe, DeRose, Duchamp, dkk. pernah mengajukan perbaikan pada skema ini, membuat aturan khusus untuk sisi-sisi tertentu[7].

Alasan skema Loop pada awalnya dikembangkan untuk kasus permukaan triangular adalah karena permukaan triangular umum digunakan dalam grafis komputer, juga karena pada dasarnya semua muka yang membentuk graf lingkaran dengan sisi lebih dari 3 dapat ditriangulasi (dibagi-bagi menjadi graf/permukaan yang lebih kecil dengan sisi = 3) [6].

Seperti dalam skema Catmull-Clark, skema Loop membuat simpul muka baru, simpul sisi baru dan penggeseran simpul lama. Penghitungan simpul lama dan simpul baru dihitung dengan *mask* berikut.

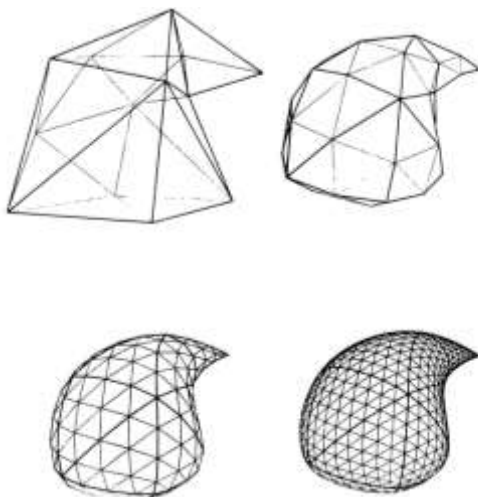


Mask A untuk pembuatan simpul muka baru, Mask B untuk pembuatan simpul sisi baru. (C. Loop 1987)

Penggeseran simpul lama dihitung dengan formula:

$$v_{new} = \alpha_N v + (1 - \alpha_N) Q$$

dengan  $-\frac{5}{8} \leq \alpha_N \leq \frac{11}{8}$ . [6]



Skema Subdivisi Loop (C. Loop 1987)

Implementasi graf untuk skema ini menggunakan implementasi *ordered adjacency list* untuk setiap simpul. [6]

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2015

ttd

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized 'M' and 'R' with a horizontal line crossing through them.

Muhammad Reifiza 13514103