

Implementasi Permasalahan Perwarnaan Graf Pada Permainan Sudoku

Aditio Pangestu 13514030
 Program Studi Teknik Informatika
 Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
 Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
 aditio_pangestu@itb.ac.id

Abstrak—Makalah ini menjelaskan bagaimana permasalahan pewarnaan graf dalam permainan Sudoku. Permainan Sudoku merupakan salah permainan yang mengasah logika. Penyelesaian dari permainan ini menggunakan greedy algorithm.

Keywords—graf, greedy algoritih, Sudoku, pewarnaan graf.

I. PENDAHULUAN

Sudoku merupakan permainan teka-teki yang disediakan oleh X-Box. Permainan ini cukup menarik perhatian seluruh masyarakat. Dulu, setiap harinya, koran selalu menyediakan kolom khusus untuk permainan ini. Hal ini dikarekanan sudoku permainan yang cukup sederhana tetapi sangat lah menantang.

Bagaimana bentuk dan aturan dari permainan sudoku ini?. Dalam permainan ini, disediakan sebuah tabel yang terdiri dari 9 kolom dan 9 baris. Tabel tersebut dibagi lagi menjadi 9 buah subtabel yang berukuran 3x3. Sel-sel dalam tabel tersebut akan diisi oleh sebuah angka dari 1 sampai dengan 9. Pengisian sel diatur sedemikian rupa sehingga memenuhi tiga aturan berikut : (i). Sel-sel yang berada di subtabel yang sama atau baris yang sama atau kolom yang sama harus diisi dengan angka 1 sampai dengan 9 sebanyak sekali; (ii). Setiap dari 9 subtabel harus diisi dengan angka 1 sampai dengan 9 sebanyak sekali. Pada umumnya, sebelum memulai permainan ini, sel tabel yang sudah terisi 25-40 sel. Hal ini tergantung dari tingkat kesulitannya.

6	2	4	8	7	1	9	5	3
1	9	3	4	6	5	8	7	2
7	5	8	3	9	2	6	1	4
2	1	9	6	4	3	5	8	7
5	8	6	7	2	9	3	4	1
4	3	7	1	5	8	2	6	9
3	4	5	2	1	6	7	9	8
8	6	1	9	3	7	4	2	5
9	7	2	5	8	4	1	3	6

Gambar 1. Tabel permainan Sudoku, warna yang lebih terang merupakan sel-sel yang sudah terisi^[1]

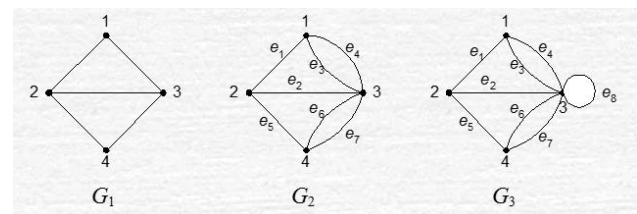
Dari peraturan yang dimiliki permainan ini, sudoku dapat digolongkan sebagai permasalahan dalam pewarnaan graf. Implementasi Sudoku dalam bentuk graf memberikan kemudahan dalam penyelesaiannya. Dalam makalah ini akan diperlihatkan bagaimana cara mengimplemenasikan permainan sudoku dalam bentuk graf.

II. TEORI DASAR

Ilmu dasar yang digunakan pada makalah ini adalah teori graf yang merupakan cabang dalam matematika diskrit. Selanjutnya, permasalahan pewarnaan graf merupakan aplikasi dari graf.

2.1 Teori Graf

Graf merupakan himpunan simpul yang tidak kosong dan himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul yang ada. Dari definisi diatas didapatkan dua hal penting dalam graf yaitu simpul dan sisi. Notasi dari graf adalah $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi.



Gambar 2. G_1 , Graf sederhana; G_2 , Graf ganda; G_3 , Graf semu^[2]

Pada gambar 2, Graf G_1 memiliki himpunan simpulnya yaitu $v = \{1, 2, 3, 4\}$ sedangkan sisinya adalah $e = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$. G_2 memiliki himpunan simpulnya yaitu $v = \{1, 2, 3, 4\}$ sedangkan sisinya adalah $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. G_3 memiliki himpunan simpulnya $v = \{1, 2, 3, 4\}$ sedangkan sisinya adalah $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4), (3,3)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

Pada G2 terdapat 2 buah simpul yang dihubungkan oleh sisi yang lebih dari satu yaitu simpul 1 dan 3. Kedua sisi tersebut dinamakan sisi ganda. Pada G3 terdapat sebuah sisi yang menguhungkan sebuah simpul yaitu pada simpul 3, simpul tersebut disebut kalang atau gelang.

Ada beberapa jenis graf berdasarkan kepemilikan atas gelang atau sisi ganda yaitu :

1. Graf sederhana
Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda dan gelang. Sisi ganda merepakan simpul yang dihubungkan oleh dua sisi, sedangkan gelang adalah sisi yang menghubungkan sebuah simpul. Contoh graf sederhana adalah G1 pada gambar 2.
2. Graf tak-sederhana
Graf tak-sederhana adalah graf yang memiliki sisi ganda atau gelang. Contoh graf tak-sederhana adalah G2 dan G3 pada gambar 2.

Berikut istilah-istilah yang akan digunakan pada makalah ini mengenai teori graf :

1. Derajat : Jumlah sisi yang terhubung dengan sebuah simpul. Contoh G1 pada gambar 2, Derajat dari simpul 1 adalah 3.
2. Graf lengkap : Graf yang memiliki simpul dengan derajat simpul tersebut adalah jumlah simpul dikurangi 1.
3. Upagraf G : Graf yang terdiri dari himpunan simpul tak-kosong yang berasal dari himpunan simpul G dan himpunan sisi yang berasal dari himpunan sisi G.

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan aplikasi teori graf yang sangat luas. Banyak permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan cara ini. Dalam pewarnaan graf terdapat dua jenis, yaitu : (i). Pewarnaan simpul dan (ii). Pewarnaan sisi. Dalam malakah ini akan hanya dibahas tentang pewarnaan simpul.

Tujuan dalam pewarnaan simpul adalah membuat simpul-simpul yang ada pada graf berwarna sedemikian rupa sehingga simpul yang memiliki sisi yang sama memiliki warna yang berbeda.

Untuk pewarnaan simpul pada graf, dapat dilakukan dengan *greedy algorithm*. Sesuai namanya, algoritma ini tidak memiliki trik apapun dalam penyelesaiannya. Hanya saja, algoritma ini dapat membuat keteraturan dalam pewarnaan simpul pada graf sehingga menggunakan warna yang minimum.

Berikut langkah-langkah yang harus diperhatikan dalam penggunaan *greedy algorit* : misalkan v_1, v_2, \dots, v_n merupakan susunan simpul dalam graf G dan c_1, c_2, \dots merupakan susunan prioritas warna yang akan digunakan.

Langkah 1. Warnai simpul pertama(v_1) dengan warna pertama (c_1).

Langkah 2. Jika tidak ada simpul yang menghubungkan v_1 dan v_2 maka warnai v_2 dengan warna c_1 . Sebaliknya warnai dengan c_2 .

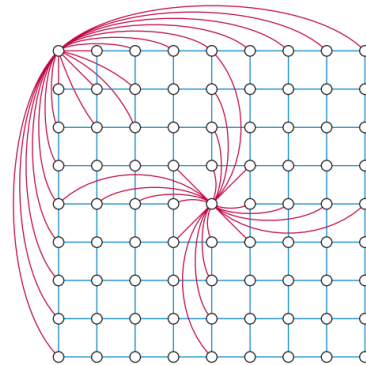
Langkah 3,4 ... n. Simpul v_i diwarnai berdasarkan susunan prioritas warna yang mungkin bisa digunakan dengan memperhatikan sisi yang menghubungkan v_i dengan simpul yang sudah diwarnai

Misalkan akan diwarnai sebuah graf lengkap dengan n buah simpul. Jumlah minimum warna yang akan digunakan yaitu n buah warna. Hal ini jelas bahwa, karena seluruh simpul terhubung dengan simpul-simpul lainnya dibutuhkan n buah warna yang berbeda.

III. IMPLEMENTASI PEWARNAAN GRAF PADA SUDOKU

A. Sudoku dalam Graf

Sebelum melihat hubungan pewarnaan graf dengan sudoku, akan direpresentasikan terlebih dahulu sudoku dalam graf. Sel-sel pada tabel sudoku akan diubah menjadi sebuah simpul. Sehingga didapatkan 81 buah simpul yang dimiliki oleh graf sudoku. Sisi dari graf tersebut terbentuk dari sel-sel yang berada pada satu baris atau satu kolom atau satu subtabel. Hal itu mengakibatkan masing-masing simpul memiliki derajat sebanyak 20. Sehingga didapat sisi yang dimiliki oleh graf tersebut ada $81 \cdot 20 / 2 = 810$ sisi. Berikut ilustrasi dari Graf Sudoku.



Gambar 3. Ilustrasi dari Graf Sudoku^[1]

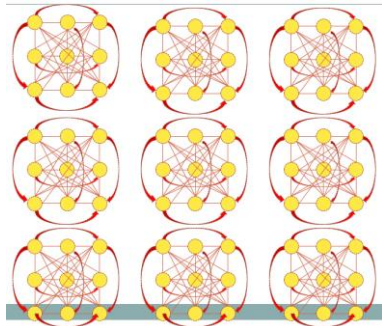
B. Permasalahan Pewarnaan Graf Sudoku

Selanjutnya kita akan menerapkan permasalahan pewarnaan graf pada sudoku. Akan ada 9 buah warna berbeda yang akan digunakan untuk mewarnai simpul-simpul dari graf Sudoku. Nilai ini muncul dikarenakan angka-angka untuk mengisi tabel sudoku ada 9 angka. Berikut warna-warna yang digunakan disesuaikan dengan angka-angkanya.

Cell number:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertex color:	●	●	●	●	●	●	●	●	●

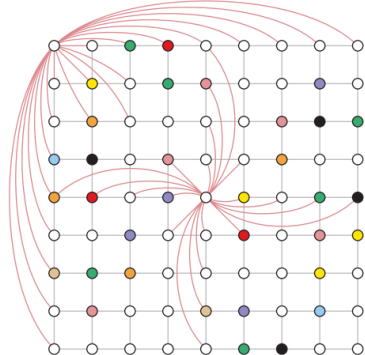
Gambar 4. Warna-Warna untuk Mewarnai Simpul

Akan diperlihatkan bahwa 9 buah warna tersebut sudah cukup untuk mewarnai simpul-simpul yang ada. Perhatikan bahwa graf sudoku memiliki upagraf berupa graf lengkap dengan 9 simpul (upagraf dari baris yang sama atau kolom yang sama atau subtabel yang sama). Graf sudoku ini dapat dipisah menjadi 9 buah graf lengkap dengan 9 simpul tanpa ada sisi yang bersekutuan. Hal ini mengakibatkan Graf tersebut dapat diwarnai dengan jumlah warna yang sama yang dimiliki oleh graf lengkap dengan 9 simpul yaitu 9 buah warna.



Gambar 5. 9 Buah Upagraf Sudoku saling disjoint.^[3]

Dari penetapan warna yang ada didapat graf yang pada gambar 1 dapat di representasikan menjadi permasalahan pewarnaan graf seperti gambar 56. Hal tersebut menjadi landasan awal dalam melakukan *greedy algorithm*.



Gambar 6. Representasi Permasalahan Pewarnaan Graf pada Gambar 1.^[1]

IV. KESIMPULAN

Permainan sudoku dapat direpresentasikan menjadi sebuah permasalahan pewarnaan graf. Dengan beberapa fakta yang dimiliki oleh graf tersebut :

1. Jumlah simpul yang dimiliki oleh graf tersebut ada 81 buah simpul.
2. Derajat dari masing-masing tiap simpul adalah 20.
3. Jumlah sisi yang dimiliki oleh graf Sudoku sebanyak 810 buah.
4. Graf Sudoku dapat di bagi menjadi 9 buah graf lengkap dengan 9 buah simpul yang saling disjoint.
5. Graf Sudoku dapat diwarnai dengan 9 buah warna saja.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada Allah SWT atas segala kenikmatan yang telah diberikan baik berupa nikmat iman, kesehatan, maupun kekuatan dalam menyusun makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua penulis yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kasih sayang. Selanjutnya, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dra. Harlili S., M.Sc. dan Bapak Dr.Ir. Rinaldi Munir, MT. selaku dosen pengajar mata kuliah Matematika Diskrit atas segala bimbingan serta ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Tidak lupa penulis sampaikan pula rasa terima kasih kepada rekan-rekan penulis yang selalu mendukung, mendorong, serta memberi semangat kepada penulis dalam menyelesaikan makalah ini. Terakhir, penulis juga menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang ikut membantu Makalah IF2120 Matematika Diskrit – Sem. I Tahun 2014/2015 pembuatan makalah ini baik yang secara langsung maupun tidak langsung.

REFERENCES

- [1] "A Touch of Color". Unpublished. http://www.math.uri.edu/~eaton/0131873814_MEB.pdf.
- [2] Munir, Rinaldi. "Matematika Diskrit", 2010, Penerbit Informatika.
- [3] Dhiliph M, Dawarakanath. "Structured Graphs and Applications". Unpublished.
- [4] Chytray, Vlastimil. "Sudoku Game Solution based on Graph Teory and Suitable for School-Mathematics".
- [5] Delahaye, Jean-Paul, "The Science of Sudoku," *Scientific American*, June 2006, 81–87.
- [6] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/ColorGraph.shtml> (graph coloring applet created by Alex Bogomolny).

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2015

Nama dan NIM