Relasi Pengurutan Parsial, *Poset*, dan Diagram Hasse

Hasna Nur Karimah - 13514106
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
hasnank@s.itb.ac.id

***Abstrak*—Himpunan, relasi, dan graf merupakan tiga dari sekian banyak topik yang dibahas pada Matematika Diskrit. Makalah ini akan membahas lebih dalam mengenai bahasan dalam kedua topik tersebut, yaitu relasi pengurutan parsial (*partial ordering relation*), himpunan terurut secara parsial (*partially ordered set*) atau biasa disebut *poset*, dan diagram Hasse yang merupakan penyederhanaan dari representasi relasi dengan graf berarah.**

***Kata kunci*—diagram Hasse, graf berarah, *poset*, relasi pengurutan parsial.**

I. PENDAHULUAN

Mata kuliah Matematika Diskrit di jurusan Teknik Informatika memiliki topik kajian yang sangat luas. Dengan keterbatasan waktu yang ada, masing-masing topik hanya dibahas pokok-pokoknya, terutama yang berkaitan dengan keinformatikaan. Hal ini sangat disayangkan karena banyak topik yang sebenarnya menarik jika ditinjau secara lebih dalam. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas beberapa hal yang sempat disinggung pada saat kuliah.

Selain itu juga penulis mempertimbangkan topik yang banyak berkaitan dengan mata kuliah ini. Diagram Hasse dipilih karena menggunakan beberapa materi kuliah Matematika Diskrit sebagai landasan teorinya, yaitu himpunan, relasi, dan graf.

II. LANDASAN TEORI

A. Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang berbeda. Perlu ditekankan bahwa anggota anggota himpunan tidak boleh ada yang sama. Beberapa hal yang berkaitan dengan himpunan yang digunakan sebagai dasar pada makalah ini adalah:

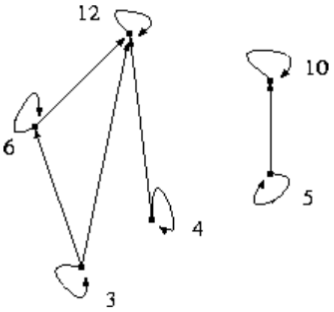
1. Himpunan Kuasa
   Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan *S* adalah himpunan yang elemennya merupakan semua upahimpunan dari *S* (termasuk himpunan kosong dan *S* itu sendiri. Himpunan kuasa dapat ditulis $\mathcal{P}(S)$, $\wp(S)$, $P(S)$, $\mathbb{P}(S)$ atau 2^S.
   Contoh:
   Jika *S* adalah himpunan {x, y, z}, maka upahimpunan dari *S* adalah:
   - {} (himpunan kosong)
   - {x}
   - {y}
   - {z}
   - {x, y}
   - {x, z}
   - {y, z}
   - {x, y, z}

   maka, himpunan kuasa dari *S* adalah {{}, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z}}.
   Jika himpunan *S* memiliki *n* buah elemen, maka himpunan kuasa dari *S* memiliki 2^n elemen.
2. Upahimpunan
   Sebuah himpunan bisa jadi merupakan bagian dari himpunan lain. Misalkan, himpunan *A* berada di dalam himpunan *B*, maka himpunan *A* disebut upahimpunan atau *subset*. Sedangkan himpunan *B* disebut *superset*. Hal ini berlaku jika dan hanya jika seluruh elemen himpunan *A* merupakan elemen dari himpunan *B* pula.
3. Perkalian Kartesian
   Perkalian kartesian (*Cartesian product*) dari dua buah himpunan *A* dan *B*, ditulis *A* x *B*, adalah himpunan semua pasangan berurutan (*a*, *b*) di mana *a* adalah elemen dari *A* dan *b* adalah elemen dari *B*.
   Contoh:
   A = {1, 2}
   B = {a, b, c}
   A x *B* = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}
4. Prinsip Inklusi-Eksklusi
   Prinsip ini digunakan untuk menghitung banyak anggota di dalam gabungan dua buah himpunan. Cara menghitunganya adalah dengan menjumlahkan banyak anggota himpunan pertama dan himpunan kedua, lalu dikurangi dengan banyak anggota yang sama (irisan dari kedua himpunan).

B. Relasi

Relasi antara himpunan *A* dan himpunan *B* (disebut juga relasi biner) adalah upahimpunan dari perkalian kartesian *A* dan *B*. *A* berperan sebagai *domain* atau daerah asal, dan *B* berperan sebagai *range* atau daerah hasil. Daerah asal dan daerah hasil mungkin saja merupakan himpunan yang sama.

Relasi dapat direpresentasikan dalam berbagai macam cara. Salah satu cara yang akan digunakan pada bahasan selanjutnya adalah representasi relasi dengan graf berarah (*directed graph*). Graf berarah ini hanya digunakan untuk merepresentasikan relasi yang daerah asal dan daerah hasilnya merupakan himpunan yang sama. Simpul dari graf merupakan elemen himpunan, sedangkan busurnya merepresentasikan pasangan terurut. Jika simpul asal dan simpul tujuan sama, maka akan terbentuk gelang atau *loop*. Contoh representasi relasi dengan graf berarah adalah seperti berikut ini:



Gambar 2.1 Graf berarah dari R = {(3, 3), (3, 6), (3, 12), (4, 4), (4, 12), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (6, 12), (10, 10), (12, 12)}. (sumber: http://staff.scem.uws.edu.au/cgi-bin/cgiwrap/zhuhan/dmath/dm_readall.cgi?page=20, diakses pada 9 Desember 2015)

Relasi biner memiliki beberapa sifat dasar, di antaranya yang akan digunakan pada pembahasan ini adalah:

1. Refleksif

   Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika untuk setiap a elemen A berlaku (a, a) adalah elemen R. Ciri-ciri relasi yang bersifat refleksif jika dilihat pada representasi relasi dengan graf berarah adalah terdapat gelang atau *loop* pada setiap simpulnya.

   Contoh:

   A = {1, 2, 3}

   R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} bersifat refleksif

   R = {(1, 1), (2, 2)} tidak bersifat refleksif

2. Setangkup dan Tolak-Setangkup

   Relasi R pada himpunan A disebut setangkup jika untuk setiap a dan b elemen A berlaku (a, b) dan (b, a) adalah elemen R. Ciri-ciri relasi yang bersifat setangkup jika dilihat pada representasi relasi dengan graf berarah adalah jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

   Relasi R pada himpunan A disebut tolak-setangkup jika untuk setiap a dan b elemen A berlaku (a, b) dan (b, a) adalah elemen R, dan a = b. Ciri-ciri relasi yang bersifat tolak-setangkup jika dilihat pada representasi relasi dengan graf berarah adalah jika dan hanya jika tidak ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul yang berbeda.

   Contoh:

   A = {1, 2, 3}

   R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} bersifat setangkup dan tolak-setangkup

   R = {(1, 1), (2, 3)} bersifat tidak setangkup dan tidak tolak-setangkup

3. Menghantar

   Relasi R pada himpunan A disebut menghantar jika untuk setiap a, b, dan c elemen A berlaku jika (a, b) dan (b, c) adalah elemen R, maka (a, c) juga adalah elemen R. Ciri-ciri relasi yang bersifat menghantar jika dilihat pada representasi relasi dengan graf berarah adalah jika ada busur dari a ke b dan b ke c, maka juga ada busur dari a ke c.

   Contoh:

   A = {1, 2, 3}

   R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} bersifat menghantar

   R = {(1, 2), (2, 3)} tidak bersifat menghantar

C. Graf

Graf merupakan pasangan himpunan simpul dan sisi (V, E), dengan jumlah simpul minimal satu dan jumlah sisi minimal nol. Jenis graf yang digunakan pada pembahasan ini adalah graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Dalam pembahasan graf, yang juga akan dilakukan di sini, sering digunakan istilah-istilah khusus, di antaranya adalah:

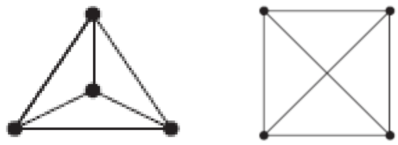
1. Bertetangga

   Istilah ini berlaku bagi dua simpul yang keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

2. Bersisian

   Istilah ini berlaku bagi sebuah sisi dengan simpul-simpul yang ia hubungkan.

Beberapa hal mengenai graf yang perlu diketahui dalam bahasan ini adalah graf isomorfik, graf planar, dan graf bidang. Dua buah graf, misal G_1 dan G_2, dapat dikatakan isomorfik apabila jika sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong. Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling memotong disebut graf bidang. Agar lebih jelas, dapat melihat ilustrasi di bawah ini.



Graf W_3 Graf K_4

Gambar 2.2 Graf W_3 isomorfik dengan graf K_4. Graf W_3 dan graf K_4 adalah graf planar. Graf W_3 adalah graf bidang, tetapi graf K_4 bukan graf planar.

(sumber: Discrete Mathematics and Its Application 7th edition, Kenneth H. Rosen)

III. RELASI PENGURUTAN PARSIAL DAN *POSET*

Suatu relasi biner R pada himpunan A dikatakan sebagai relasi pengurutan parsial apabila ia memiliki sifat refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar. Sedangkan himpunan A dengan relasi R tersebut (dinotasikan dengan (A, R)) disebut himpunan terurut secara parsial (*partially ordered set* atau *poset*). Secara singkat, dapat dikatakan bahwa relasi biner "≤" pada himpunan A yang memenuhi untuk seluruh nilai a, b, dan c pada himpunan A:

- $a \leq a$
- jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$
- jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$

Beberapa pasangan tertentu dari elemen-elemen dalam himpunan tersebut memiliki relasi keterurutan, tapi tidak seluruhnya, oleh karena itu lah digunakan istilah "parsial". Elemen-elemen pada sebuah *poset* ada yang dapat dibandingkan (*comparable*) dan ada juga yang tidak dapat dibandingkan (*incomparable*).

Relasi pengurutan parsial memiliki invers dan dual dari urutannya. Invers dari relasi ≤ memenuhi $x \geq y$ jika dan hanya jika $y \leq x$. Invers dari relasi pengurutan parsial adalah relasi pengurutan parsial juga, ditandai dengan sifatnya yang refleksif, tolak-setangkup, dan menghantar. Dual dari urutan dari *poset* adalah himpunan yang sama dengan relasi pengurutan parsial yang digantikan oleh inversnya.

Berikut adalah beberapa contoh *poset* yang biasanya digunakan dalam matematika:

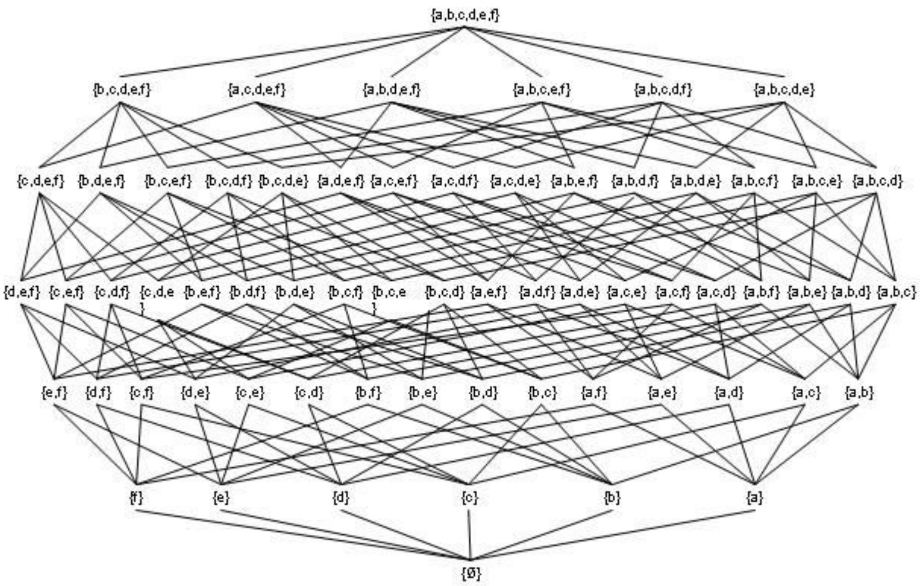
- Bilangan riil yang diurutkan dengan relasi kurang dari atau sama dengan (≤)
- Himpunan dari upahimpunan yang diurutkan dengan prinsip inklusi
- Himpunan bilangan asli dengan relasi "habis membagi"
- Himpunan simpul dari graf berarah asiklik yang diurutkan dengan "dapat dicapai"
- Himpunan dari uparuang pada ruang vector yang diurutkan dengan inklusi

Poset memiliki beberapa nilai ekstrim, yaitu:

- Elemen terbesar dan elemen terkecil
- Elemen maksimal dan elemen minimal
- Batas atas dan batas bawah

Tabel 1 Jumlah n-elemen relasi biner dari berbagai tipe

n	all	transitive	reflexive	preorder	Partial order	Total preorder	Total order	Equivalence relation
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1	1	1	1
2	16	13	4	4	3	3	2	2
3	512	171	64	29	19	13	6	5
4	65536	3994	4096	355	219	75	24	15



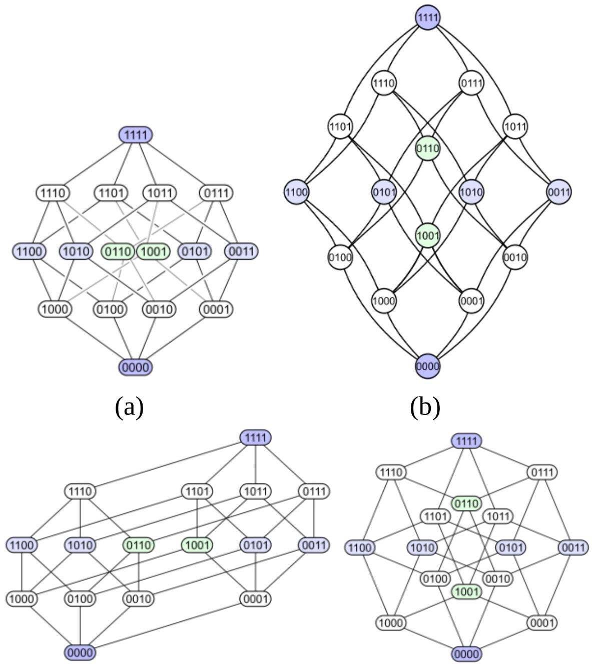
Gambar 3.1 *Poset* dari himpunan seluruh upahimpunan dengan 6 elemen {a, b, c, d, e, f} diurutkan dengan relasi upahimpunan.

(sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/Partially_ordered_set#Examples, diakses pada 9 Desember 2015)

IV. DIAGRAM HASSE

Diagram Hasse adalah diagram matematika yang digunakan untuk merepresentasikan *poset* dalam bentuk gambar reduksi transitifnya. Nama diagram Hasse berasal dari Helmut Hasse (1898-1979) yang mengefektifkan diagram dari Birkhoff (1948).

Walaupun diagram Hasse sudah sederhana, tetapi tidaklah mudah untuk menggambarkannya. Hal ini dikarenakan terdapat banyak cara untuk menggambar sebuah diagram Hasse dari sebuah *poset*. Berikut ini adalah contoh diagram Hasse berupa himpunan kuasa dari himpunan dengan 4 elemen yang diurutkan dengan prinsip inklusi. Label pada simpul menunjukkan ada (1) atau tidaknya (0) suatu elemen pada upahimpunan tertentu.

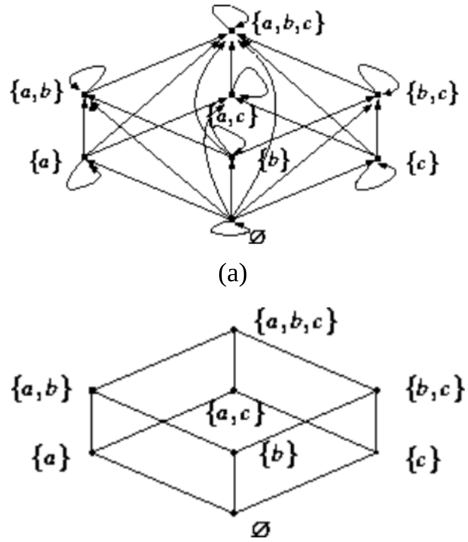


(a) (b) (c) (d)

Gambar 4.1 Berbagai bentuk diagram Hasse yang dapat dibentuk dari sebuah *poset*: (a) standar; (b) simpul disusun menyerupai elemen matriks 4x4; (c) kubus 4 dimensi dari gabungan dua kubus tiga dimensi; (d) menampilkan struktur simetri internal.
(sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/Hasse_diagram, diakses pada 9 Desember 2015)

Diagram Hasse adalah representasi relasi pengurutan parsial yang ada dalam sebuah *poset* dalam bentuk graf berarah. Hanya saja bentuknya disederhanakan agar lebih enak dipandang. Berikut adalah cara penyederhanaan graf beserta contohnya:

1. Hilangkan semua gelang atau *loop*
2. Hilangkan semua panah yang dapat dihasilkan dari sifat menghantar
3. Gambar panah tanpa kepala (garis saja)
4. Graf berarah akan dapat disederhanakan menjadi diagram Hasse



(a) (b)

Gambar 4.2 (a) representasi *poset* dari himpunan {*a*, *b*, *c*} dan relasi upahimpunan dalam bentuk graf berarah; (b) penyederhanaan dari graf (a) dalam bentuk diagram Hasse (sumber: http://staff.scem.uws.edu.au/cgi-bin/cgiwrap/zhuhan/dmath/dm_readall.cgi?page=20&part=2, diakses pada 10 Desember 2015)

Seperti disebutkan sebelumnya, diagram Hasse adalah graf. Oleh karena itu, dalam diagraf Hasse juga terdapat istilah planar dan juga isomorfik. Diagram Hasse yang planar disebut juga *non-crossing Hasse diagram*, sesuai dengan definisinya yaitu tidak ada sisi yang berpotongan. Untuk mengetahui apakah diagram Hasse isomorfik dengan diagram Hasse lainnya, dapat dilihat dari *poset*-nya. Apabila terdapat elemen himpunan sebagai simpul dan relasi sebagai sisi yang memenuhi syarat graf isomorfik, maka kedua diagram Hasse tersebut dapat disebut isomorfik. himpunan *A* berada di dalam himpunan *B*

V. KESIMPULAN

Proses pembelajaran memang tidak cukup hanya di ruang kelas saja. Keterbatasan waktu belajar di kelas menuntut mahasiswa untuk mengeksplor lebih banyak di luar kelas. Salah satu topik yang menarik untuk dibahas adalah diagram Hasse. Diagram Hasse merupakan representasi dari *poset*. Yang membuat menarik dari topik ini adalah karena ia mengandung banyak bahasan yang berkenaan dengan mata kuliah Matematika Diskrit, yaitu himpunan, relasi, dan graf. Diagram Hasse memanglah penyederhanaan dari graf berarah, tetapi dalam proses pembuatannya cukup rumit dikarenakan terdapat banyak cara yang dapat digunakan untuk menggambar diagram Hasse dari sebuah *poset*.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama saya mengucapkan puji dan syukur kepada Allah SWT. karena atas kehendak-Nya pembuatan makalah ini dapat berjalan lancar. Kemudian saya ucapkan terima kasih kepada Bapak Rinaldi Munir dan Ibu Harlili selaku pengajar mata kuliah Matematika Diskrit yang ilmunya digunakan sebagai dasar makalah ini. Terima kasih juga saya ucapkan kepada teman-teman yang telah menginspirasi topik bahasan melalui *brainstorming* serta senantiasa menyemangati selama pengerjaan makalah ini berlangsung.

REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit*. Informatika. Bandung:2010.
[2] http://staff.scem.uws.edu.au/cgi-bin/cgiwrap/zhuhan/dmath/dm_readall.cgi?page=20 (diakses pada 8 Desember 2015)
[3] http://www.math.uah.edu/stat/foundations/Order.html (diakses pada 8 Desember 2015)
[4] http://staff.scem.uws.edu.au/cgi-bin/cgiwrap/zhuhan/dmath/dm_readall.cgi?page=20&part=2 (diakses pada 8 Desember 2015)
[5] Deshpande, Jayant V. (1968). "On Continuity of a Partial Order". Proceedings of the American Mathematical Society 19 (2): 383–386.
[6] Rosen, Kenneth H. "Discrete Mathematics and Its Application 7th edition". McGraw-Hill International.
[7] Baker, K. A.; Fishburn, P.; Roberts, F. S. (1971), "Partial orders of dimension 2", Networks 2 (1): 11–28.
[8] Devlin, Keith J. (1979). Fundamentals of contemporary set theory. Universitext. Springer-Verlag.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2015

Hasna Nur Karimah - 13514106