Three-valued Logic

Drestanto Muhammad Dyasputro - 13514099
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
dyas@live.com

***Abstract*—Berbagai problema di kehidupan kita harus dapat kita selesaikan dengan logis. Untuk menunjang penyelesaiannya, berbagai keilmuan menjadikan logika sebagai salah satu fondasi utama yang penting. Logika di sini berkatian dengan semantik (nilai kebenaran) suatu kalimat yang bisa bernilai benar maupun salah. Namun, tidak cukup bagi kita mengolah kebenaran yang sudah pasti. Ada kalanya dibutuhkan untuk menganalisis kebenaran yang belum pasti benar, namun juga belum pasti salah. Pemikir – pemikir di berbagai belahan dunia mengusulkan adanya 3 buah status kebenaran. *True, false*, dan yang terakhir adalah *undefined*.**

Keywords*—logika*, true, false, undefined

I. PENDAHULUAN

Beberapa pembuktian berbagai teorema di kehidupan, terkait sains, teknologi, pemikiran sederhana, maupun agama terkadang menggunakan aturan-aturan dan prinsip dasar logika. Karenanya, dibentuklah sebuah aturan umum pada logika dan menjadi materi hingga saat ini. Materi-materi logika menjadi fondasi berbagai macam ilmu pengetahuan saat ini, termasuk *computer science* atau informatika di dalamnya.

Dalam logika (ada berbagai ragam jenis, mulai dari logika matematika, logika informatika, dll), kita menggunakan proposisi (kalimat yang memikliki nilai kebenaran). Hal ini menjadi *constraint* kita dalam menyelesaikan permasalahan. Berbagai kaidah dilaksanakan guna menciptakan atau membuktikan beragam kesimpulan. Namun, apakah aturan-aturan dasar logika yang sudah dibentuk cukup untuk menjelaskan abstraknya dunia ini?

Beberapa teka-teki pun muncul dan terkenal terkait logika. Namun, sama maraknya dengan teka-teki, banyak paradoks dari logika pun muncul. Kalimat-kalimat yang tidak masuk akal secara logika bermunculan. Beberapa filsuf mencoba untuk menjelaskan berbagai macam paradoks dengan membuat sebuah konsep baru tentang logika. Logika, seperti yang telah dipahami beberapa orang, memiliki semantik (kebenaran) benar atau salah. Untuk mencoba menjelaskan beberapa *thought experiment* yang menghasilkan paradoksial, diperenalkan sebuah semantik baru.

Hal ini dikenal dengan *three-valued logic*, berbeda dengan "binary logic" yang kita kenal, hanya memiliki 2 semantik yang berkebalikan yaitu *true* (T) dan *false* (F). Semantik baru ini disebut berbagai macam pada berbagai referensi. Sebagian memberi nama *undefined* (U), sebagian pula memberi nama *indetermined* (I). Untuk kemudahan kita, dimulai dari kalimat ini, kita akan menggunakan notasi "U" (undefined) untuk semantic baru ini.

Ada beberapa filsuf yang mencoba merumuskan *three-valued logic* dan menjelaskannya menurut konsep undefined masing-masing. Untuk mudahnya, makalah ini akan membahas konsep logika yang dikembangkan Kleene dan Priest.

Logika Kleene dan Priest menarik perhatian banyak massa (filosofis, matematikawan, dan ilmuwan lainnya). Dalam notasi aljabar boolean, logika ini pun dapat direpresentasikan. Kita tahu, bahwa *true* direpresentasikan dengan 1 dan *false* direpresentasikan dengan 0. Bagaimana kita merepresentasikan undefined?

Dalam beberapa referensi, dibanding merepresentasikan U dalam bentuk lain, akan terasa lebih mudah bila F direpresentasikan dengan -1 (negatif 1) dan U direpresentasikan dengan 0. Hal ini memudahkan perhitungan dalam negasi. ~p berarti –p. Namun, dalam referensi lain, kita sering menemukan U direpresentasikan dengan ½ (tanpa mengubah 1 yaitu T dan 0 yaitu F). Dan untuk kemudahan kita, dimulai dari kalimat ini, kita akan menggunakan ½ untuk merepresentasikan U.

Sekarang, kita secara perlahan menentukkan nilai kebenaran dari setiap operator-operator logika yang ada. Semua evaluasi semantik yang dilakukan tidak semata-mata berdasarkan konvensi sederhana, namun diturunkan langsung dari fondasi logika manusia. Mungkin, terdapat banyak situs di internet yang memperlihatkan hasil evaluasi semantik dari setiap operator dan menyajikannya langsung dalam bentuk tabel. Makalah ini akan membahasnya secara menyeluruh.

II. DASAR TEORI

Logika adalah hubungan antarkalimat atau pernyataan. Namun, yang sering dan akan ditinjau lebih jauh dalam materi logika adalah terkait proposisi. Apa itu proposisi? Proposisi adalah pernyataan yang memiliki nilai kebenaran. Namun, tidak selalu benar. Contohnya, 1 + 1 = 2 adalah proposisi, nilai kebenarannya adalah benar, atau lebih dikenal dengan *true*. Contoh lainnya, 2 + 2 = 5 adalah proposisi. Namun, 2 + 2 = 5 memiliki nilai kebenaran *false*.

Beberapa orang merasa bahwa tidak ada gunanya mengevaluasi proposisi yang memiliki nilai kebenaran *false*. Kenapa perlu kita mengevaluasi sesuatu yang salah? Ini adalah pandangan yang sangat-sangat naif dan harus dihindari. Konsep logika bukanlah sebuah konsep yang menggunakan logika menganalisis dan memproses kalimat-kalimat, berbagai proposisi, dan berbagai sebab akibat yang tepat. Logika adalah sesimpel menyatakan hubungan antarkalimat atau pernyataan dan mengetahui nilai kebenarannya.

Biasanya, beragam textbook maupun penjelasan di internet menunjukkan berbagai operator logika yang penting untuk diketahui kita. Namun, makalah ini harus menjelaskannya dari fondasi awal logika manusia.

Pertama-tama, kita mendefinisikan sebuah kalimat sederhana. Kalimat ini adalah kalimat yang secara nalar langsung terlihat benar salahnya. Contohnya adalah kalimat-kalimat matematika.

"7 + 15 = 22"

Itu adalah kalimat sederhana. Namun, haruskah kalimat matematika? Tidak. Sangatlah penting untuk diketahui bahwa logika beranjak dari keseharian manusia. Karenanya, bentuk kalimat sehari-hari pun adalah sebuah proposisi, contohnya

"Andi memakai baju biru"

Kalimat di atas juga merupakan kalimat sederhana. Namun, kita kalimat tersebut terasa kurang deskriptif. Apakah hanya baju yang dapat dideskripsikan. Coba kita lihat lebih lanjut.

"Andi memakai celana hitam"

Kalimat di atas juga masih merupakan kalimat sederhana. Kalimat sederhana semacam ini yang memiliki nilai kebenaran sering disebut sebagai proposisi atomik. Mengapa disebut atomik. Sesuai asal katanya, atom berarti tidak dapat dibagi lagi. Ya, kalimat di atas dianggap satu kesatuan yang utuh. Biasanya, proposisi ini dibentuk menjadi sebuah notasi huruf kecil (misalnya p). Namun, jika kita berlanjut ke pakaian lain

"Andi memakai kaos kaki putih **dan** sepatu hitam"

Kalimat di atas dianggap kalimat yang lebih kompleks (terkadang disebut compound). Biasanya dikenal dengan proposisi majemuk. Proposisi majemuk adalah proposisi yang dapat dibagi menjadi beberapa proposisi atomik. Pada contoh kalimat di atas, kita mendapati 2 buah proposisi atomik yaitu :

- "Andi memakai kaos kaki putih"
- "Andi memakai sepatu hitam"

2 buah proposisi atomik bergabung menjadi 1 buah proposisi majemuk, dihubungkan dengan suatu kata yaitu "dan".

Tunggu, sebelum berlanjut lebih jauh, para filosofis sering melakukan sangkalan-sangkalan yang masuk akal. Kalimat "Andi memakai celana hitam" bukanlah proposisi atomik. Proposisi ini dapat dipecah menjadi 2 buah proposisi yaitu :

- "Andi memakai celana"
- "celana (tersebut) berwarna hitam"

Ya, tepat sekali. Proposisi atomik tidaklah mutlak. Karenanya, definisi yang lebih baik mungkin adalah. Proposisi atomik adalah proposisi yang tidak perlu dibagi lagi. Tidak perlu bukan berarti tidak bisa. Hanya saja tidak ada gunanya untuk analisis lebih lanjut.

Oke, mari berlanjut ke proposisi majemuk.

Proposisi majemuk yang kita temui tadi dihubungkan dengan "dan". Maka, proposisi majemuknya adalah (yang dapat direpresentasikan dengan notasi) p dan q. Untuk memudahkan kita melihatnya sebagai notasi, operator "dan" pun direpresentasikan dalam bentuk simbol (∧). Maka, proposisi majemuknya menjadi :

$p \wedge q$

Perhatikan bahwa jika p *true*, dan q *true*, maka benar, "Andi memakai kaos kaki putih **dan** sepatu hitam", maka $p \wedge q$ pun *true*.

Bagaimana bila p *false*? Maka, kalimat "Andi memakai kaos kaki putih dan sepatu hitam" menjadi salah (*false*). Nah, perhatikan bahwa proposisi yang dihubungkan dengan operator "dan", jika dicermati hanya akan bernilai *true* bila keduanya *true*. Atau dalam bentuk tabel :

∧	F	T
F	F	F
T	F	T

Lanjut ke kehidupan sehari-hari. Kita sering menemukan kata selain "dan". Contoh kalimatnya :

"Pemilu dalam Pilkada harus berusia 17 tahun **atau** sudah menikah"

Operator "atau" disimbolkan dengan v. Bagaimana kita mengevaluasi p v q ?

Perhatikan bahwa jika seseorang 17 tahun, belum menikah, boleh ikut pemilu. Jika seseorang sudah menikah, belum 17 tahun pun boleh ikut. Jika seseorang 17 tahun dan sudah menikah, dia pun boleh ikut. Artinya, kalimat akan bernilai *true* apabila salah satunya saja berniali *true*. Atau dalam bentuk tabel :

v	F	T
F	F	T
T	T	T

Namun, tidak seluruhnya kata "atau" dalam kehidupan ini berlaku sama dengan di atas. Sering dalam kehidupan ini, makna kata "atau" berbeda. Contohnya :

"Ia dihukum 5 tahun penjara atau denda 10 juta"

Salah satunya harus bernilai benar, dan salah satunya harus bernilai salah. Tidak mungkin dia membayar denda 1- juta, namun tetap dipenjara 5 tahun. Artinya, proposisi yang mengandung "atau" di sini barulah bernilai *true* apabila hanya salah satunya yang berniali *true*, yang lainnya *false*. Maka, dibutuhkan operator yang lain. Operator ini disebut dengan *exclusive or*, disimbolkan dengan ⊕. Direpresentasikan dalam tabel seperti berikut :

⊕	F	T
F	F	T
T	T	F

Operator-operator pun semakin banyak ditemukan, seperti operator negasi (lawan) yang jika direpresentasikan dalam tabel :

	~
F	T
T	F

Berlanjut menyusuri hidup, ditemukan pula bentuk kalimat yang lain. Kalimat ini disebut dengan implikasi :

Jika p maka q

Bagaimana mengevaluasi kebenaran ini. Anggap sebuah kalimat seperti ini :

r v q

Arti dari kalimat ini adalah. Kalau tidak r, q. Atau dalam bahasa implikasi adalah :

Jika tidak r maka q.

Operator implikasi adalah panah ke kanan (→).

maka, kita tahu bahwa r v q equivalen dengan (~r→q)

Mensubstitusi r dengan ~p menghasilkan

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Dan tidak hanya itu, operator-operator yang lainnya pun ditemukan dalam kalimat-kalimat di hidup ini seperti halnya biimplikasi (yang equivalen dengan negasi dari *exclusive or*) :

$p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \oplus q)$

III. KONSEP LOGIKA KLEENE DAN PRIEST

Konsep Kleene dan Priest cukup sederhana. Pandanglah "U" sebagai superposisi dari T dan F. Evaluasi semantic jika "U" adalah T. Evaluasi semantik bila "U" adalah F. Hasil evaluasi semantik "U" adalah superposisi hasil evaluasi keduanya.

Mudahnya, jika evaluasi semantic menghasilkan nilai yang sama yaitu T, maka, itulah hasilnya, T. Jika menghasilkan nilai yang sama yaitu F, maka, itulah hasilnya, F. Jika memungkinkan sedikit saja berbeda, maka, hasilnya adalah superposisi T dengan F atau F dengan T yaitu U.

Konjungsi :
p ʌ q

bagaimana bila "p bernilai T dan q bernilai U"?

- q bernilai T → p ʌ q bernilai T
- q bernilai F → p ʌ q bernilai F

karena hasilnya berbeda → p ʌ q bernilai U

bagaimana bila "p bernilai F dan q bernilai U"?

- q bernilai T → p ʌ q bernilai F
- q bernilai F → p ʌ q bernilai F

karena hasilnya sama → p ʌ q bernilai F

bagaimana bila "p bernilai U dan q bernilai U"?

- p bernilai T dan q bernilai T → p ʌ q bernilai T
- p bernilai F dan q bernilai F → p ʌ q bernilai F

karena memungkinkan hasil yang berbeda → p ʌ q bernilai U

maka, didapat tabel seperti berikut :

ʌ	F	U	T
F	F	F	F
U	F	U	U
T	F	U	T

Disjungsi :
p v q

bagaimana bila "p bernilai T dan q bernilai U" ?

- q bernilai T → p v q bernilai T
- q bernilai F → p v q bernilai T

karena hasilnya sama → p v q bernilai T

bagaimana bila "p bernilai F dan q bernilai U"?

- q bernilai T → p v q bernilai T
- q bernilai F → p v q bernilai F

karena hasilnya berbeda → p v q bernilai U

bagaimana bila "p bernilai U dan q bernilai U"?

- p bernilai T dan q bernilai T → p v q bernilai T
- p bernilai F dan q bernilai F → p v q bernilai F

karena memungkinkan hasil yang berbeda → p v q bernilai U maka, didapat tabel seperti berikut :

v	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	T
T	T	T	T

Disjungsi eksklusif :
$p \oplus q$
bagaimana bila "p bernilai T dan q bernilai U" ?

- q bernilai T → $p \oplus q$ bernilai F
- q bernilai F → $p \oplus q$ bernilai T

karena hasilnya berbeda → $p \oplus q$ bernilai U

bagaimana bila "p bernilai F dan q bernilai U"?

- q bernilai T → $p \oplus q$ bernilai T
- q bernilai F → $p \oplus q$ bernilai F

karena hasilnya berbeda → $p \oplus q$ bernilai U

bagaimana bila "p bernilai U dan q bernilai U"?

- p bernilai T dan q bernilai F → $p \oplus q$ bernilai T
- p bernilai F dan q bernilai F → $p \oplus q$ bernilai F

karena memungkinkan hasil yang berbeda → $p \oplus q$ bernilai U

maka, didapat tabel seperti berikut :

⊕	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	U
T	T	U	F

Negasi :
~p
bagaimana bila "p bernilai U"?

- p bernilai T → ~p bernilai F
- p bernilai F → ~p bernilai T

karena hasilnya berbeda → ~p bernilai U

maka, didapat tabel sepert berikut :

	~
F	T
U	U
T	F

Dengan adanya semantik baru U, bagaimana kita memaknai operator-operator lain seperti implikasi (jika-maka), biimplikasi (jika dan hanya jika), dll?

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, U hanyalah superposisi antara T dan F. Perlakuan equivalensi yang kita meliki tidak akan berubah.

Implikasi :
$p \rightarrow q \equiv {\sim}p \vee q$
Biimplikasi :
$p \leftrightarrow q \equiv {\sim}(p \oplus q)$

Bahkan, hukum-hukum logika (identitas, null/dominasi, negasi, dll) pun berlaku sama. Tidak hanya itu. argument yang terbukti sahih (modus ponen, tollen, silogisme, dll) pun mendapat perlakuan yang sama.

IV. KONSEP-KONSEP LAIN YANG DIKEMBANGKAN

A. Prespektif Programmer

Terdapat banyak konsep *three-valued logic* yang menarik menjadi pembahasan. Namun, satu hal lagi yang mungkin menarik bagi kita adalah melihat dari sisi pemrograman. Perhatikan bahwa T, F, dan U adalah boolean yang kita miliki. Konsep logika yang cocok untuk melihat kasus ini adalah Logika Bochvar. Dalam logika ini, U berarti error. Artinya, apapun operatornya, kita akan memandang U sebagai error yang harus dihindari. Maka, bila U bertemu dengan apapun, hasilnya adalah U. U v T adalah U, U ∧ F adalah U. Bagaimana dengan T v U? Evaluasi ini pun akhirnya menimbulkan banyak perdebatan karena dari sisi pemrograman, hasil evaluasi bergantung *compiler*.

Beberapa *compiler* mengevaluasi dan mengeksekusi seluruh boolean yanga da dalam suatu kalimat sebelum akhirnya memutuskan nilai kebenarannya. Beberapa *compiler* yang mengutamakan optimasi mengevaluasi satu persatu. Misalnya bertemu dengan *true*, dilanjutkan dengan operator "OR", maka *compiler* tidak akan melakukan pengecekan boolean berikutnya (karena pasti menghasilkan boolean *true*). Atau contoh lain adalah ketika evaluasi pertama menghasilkan *false*, dilanjutkan dengan operator "AND", maka *compiler* tidak akan melakukan pengecekan boolean berikutnya (karena pasti menghasilkan boolean *false*). Namun, dalam logika Bochvar, evaluasi apapun yang mengandung U akan menghasilkan U (dan menggunakan konvensi ini pun lebih aman dalam perancangan algoritma, karena pasti menghindari *error*).

Kebutuhan kita dalam membuat algoritma biasanya cukup dengan operator logika "dan" serta "atau". Dalam bentuk tabel, konsep logika Bochvar "AND" dan "OR" ditunjukkan sebagai berikut :

AND	F	U	T
F	F	U	F
U	U	U	U
T	F	U	T

OR	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	U
T	T	U	T

B. Paradoks Three-valued Logic

Fungsi keberadaan semantik U di sini bertujuan untuk memudahkan kita dalam menganalisa kasus, dengan diperbolehkannya melibatkan kalimat-kalimat yang belum kita ketahui nilai kebenarannya. Namun, terkadang, melibatkan kalimat-kalimat dan menganggap U sebagai superposisi dari T dan F masih menimbulkan berbagai perdebatan. Agar penjelasannya lebih mudah tersampaikan, kita akan menggunakan notasi aljabar boolean (0, ½, 1) saat ini.

Perhatikan bahwa menurut konsep Kleene dan Priest, ½ adalah superposisi 0 dan 1. Maka, secara logika, yang dimaksud dengan ½ berarti memiliki 50% kemungkinan menjadi 0 dan 50% kemungkinan menjadi 1. Sekarang, bagaimana kita mengevaluasi ½ v ½ misalnya?

Jika ½ adalah superposisi dari 0 dan 1, maka ada 4 kemungkinan.

- $0 \vee 0 \equiv 0$
- $0 \vee 1 \equiv 1$
- $1 \vee 0 \equiv 1$
- $1 \vee 1 \equiv 1$

Perhatikan bahwa ½ v ½ memiliki 25% kemungkinan menjadi 0 dan 75% kemungkinan menjadi 1. Adalah tepat mengatakan bahwa hasil dari ½ v ½ masih merupakan superposisi dari 0 dan 1, tapi apakah masih tepat mengatakan bahwa hasilnya adalah ½ ?

V. KESIMPULAN

Paradoks semacam ini menimbulkan banyak perdebatan di kalangan filsuf dan ilmuwan. Namun, tentunya, pendapat semacam ini pun menimbulkan banyak pengembangan dalam *three-valued logic* ini. Beberapa pengembangan yang dilakukan adalah membuatnya menjadi *many valued logic*, atau bahkan, *continuous-valued logic*. Banyak sekali pengembangan yang dilakukan para ilmuwan. Dan evaluasi semantik *undefined* pun sampai sekarang masih menjadi bentuk pengembangan yang tidak mutlak dan belum berani untuk disebarluaskan hingga menjadi sebuah fondasi.

REFERENCES

Munir, Rinaldi. 2005. Matematika Diskrit. Bandung: Penerbit Informatika

Douglas W. Jones, Standard Ternary Logic, Feb. 11, 2013

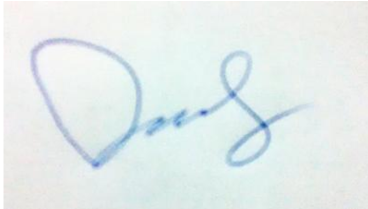
http://www.uky.edu/~look/Phi520-Lecture7.pdf

Hurley, Patrick. A Concise Introduction to Logic, 9th edition. (2006).

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2015



Drestanto Muhammad Dyasputro - 13514099