

Representasi graf acak (Watts and Strogatz model) pada Small World Phenomenon: Degrees of Separation

Febi Agil Ifdillah (13514010)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
febi_agil@students.itb.ac.id

Abstract—Studi empiris tentang sistem jaringan seperti internet, dan jaringan sosial telah menginspirasi para peneliti untuk mengembangkan berbagai macam teknik dan model untuk membantu kita memahami dan memprediksi perilaku dari sistem-sistem tersebut. Salah satu fenomena yang mencuat tentang jaringan adalah fenomena dunia kecil (*Small-World Phenomenon*). Berdasarkan konsep tersebut, seluruh dunia terhubung dalam koneksi yang pendek. Dalam frasa yang begitu terkenal, fenomena ini dinamakan *six degrees of separation*, dimana dua individu yang dipilih secara acak paling banyak terpisah sejauh enam derajat keterpisahan. Artinya, rantai pernyataan “teman dari temannya” dapat menghubungkan dua individu maksimum enam langkah. Fenomena ini merupakan kajian yang sangat menarik dan penting. Ledakan ketertarikan tentang fenomena dunia kecil pun menyeret bidang ilmu di luar sosial-psikologi. *Six degrees of separation* bukan hanya tentang trivia sosiologi, melainkan telah menggambarkan betapa pentingnya jaringan yang menjadi aspek fundamental di zaman yang serba terhubung ini.

Keywords— Random graph, Six degrees of separation, Small-World Phenomenon, Watts-Strogatz Model.

I. PENDAHULUAN

Pertumbuhan penduduk meningkat drastis beberapa tahun terakhir, berdasarkan data dari World Bank, jumlahnya sudah menyentuh angka 7,2 miliar jiwa[12]. namun tetap banyak yang mengklaim bahwa dunia tempat kita tinggal ini begitu kecil – secara sosial. Karena seringkali kita mendapati bahwa orang-orang secara hubungan sosial begitu dekat dengan kita.

Umat manusia kini bergerak dari zaman *post-modern* ke zaman globalisasi. Berbagai aspek seperti teknologi informasi, krisis lingkungan, perubahan iklim, operasi bisnis global, epidemik, pergerakan sosial, dan aspek lainnya yang menjadi persoalan global membuka pandangan kita tentang bagaimana sebenarnya kita terhubung di planet ini. Kita ada di era dimana semuanya saling terhubung.

Fenomena dunia kecil (*Small-World*) – sebuah proposisi yang menyatakan bahwa dunia terhubung

dengan enam derajat keterpisahan (*six degree of separation*) – didemonstrasikan oleh Stanley Milgram pada tahun 1967. Subjek ini merupakan kajian yang anekdotal sekaligus menarik. Walaupun Milgram adalah psikolog sosial, anehnya, fenomena dunia kecil ini bukan hanya tentang psikologi-sosial.

Mengapa begitu banyak peneliti yang mengkaji tentang fenomena ini? Stimulusnya adalah di tahun 1998, ketika sebuah *paper* karya Watts dan Strogatz terbit di jurnal Nature. Karya mereka menawarkan penjelasan matematis yang menarik untuk menjelaskan bagaimana fenomena dunia kecil dapat dijelaskan berdasarkan adanya penghubung acak dalam jaringan[11]. Subjek ini merupakan hal yang penting untuk dikaji, karena dampaknya yang begitu signifikan bagi kehidupan manusia.

Dalam makalah ini, penulis mencoba merepresentasikan fenomena dunia kecil menggunakan salah satu graf acak dengan model Watts & Strogatz.

II. DASAR TEORI

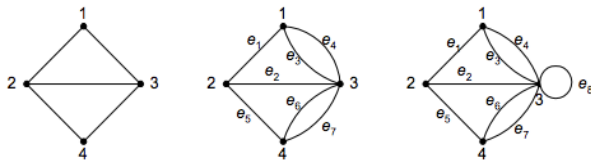
A. Teori Graf

Dalam matematika dan ilmu komputer, teori graf adalah studi tentang graf. Graf adalah sebuah objek yang terdiri dari simpul dan busur yang dapat dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dimana V (*Vertices* atau *nodes*) adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul, $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan E (*edges* atau *arcs*) adalah himpunan dari busur-busur, $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Sebuah busur menghubungkan dua buah simpul. Graf yang hanya memiliki sebuah simpul tanpa satu sisi pun disebut graf trivial[1].

Graf memiliki beragam jenis, misalnya :

1. Graf sederhana, yaitu graf yang tidak memiliki busur ganda atau gelang (lihat Gambar 1(a)).

2. Graf tidak sederhana, adalah graf yang mengandung sisi ganda atau kalang. Seperti yang ditunjukkan gambar 1(b).



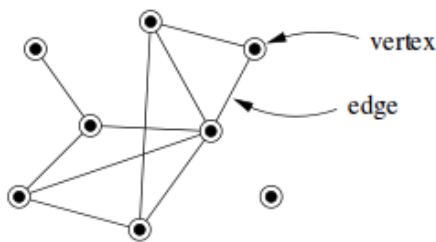
Gambar 1 - (a) Graf sederhana, (b) Graf ganda, dan (c) Graf semu

Sumber : Munir, Rinaldi. 2008. "Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit". Bandung: Program Studi Teknik Informatika STEI ITB,

D. Teori Jaringan

Sebuah jaringan merupakan himpunan simpul-simpul (*vertices* atau *nodes*) dengan koneksi antara satu simpul dan lainnya. Jaringan ada di mana-mana, otak manusia merupakan jaringan yang terdiri dari hubungan antar neuron, organisasi adalah jaringan dari orang-orang yang ada di dalamnya, ekonomi global adalah jaringan dari ekonomi negara-negara dan pasar[7]. Contoh lainnya dari jaringan diantaranya adalah World Wide Web, dan jaringan sosial.

Teori jaringan merupakan bagian dari ilmu komputer dan ilmu jaringan yang menjadi bagian dari teori graf. Teori jaringan mempelajari sistem kompleks yang saling berinteraksi dan dapat direpresentasikan sebagai graf.



Gambar 2 - Contoh jaringan dengan delapan simpul dan sepuluh busur.

Sumber : <http://www-personal.umich.edu/~mejn/courses/2004/cscs535/review.pdf>

Studi tentang jaringan, dalam bentuk teori graf, merupakan pilar dasar dalam matematika diskrit. Solusi Euler untuk permasalahan tujuh jembatan di Königsberg merupakan bukti pertama dalam teori jaringan. [4]

C. Graf Acak

Graf acak adalah sebuah istilah umum yang mengacu

kepada distribusi kemungkinan pada graf. Teori graf acak merupakan irisan dari teori graf dan teori probabilitas. Graf acak didapatkan dari himpunan simpul sejumlah n yang terisolasi kemudian kita dapat menambahkan busur secara acak kepada simpul-simpul tersebut untuk membentuk jaringan dengan masing-masing $\frac{1}{2}n(n-1)$ sisi yang mungkin terbentuk dengan peluang p . Jumlah sisi yang terhubung dengan masing-masing simpul – derajat simpul – didistribusikan berdasarkan distribusi binomial, atau sebuah distribusi Poisson dengan batas n [4].

Graf acak barangkali merupakan model paling sederhana untuk merepresentasikan jaringan sosial. Model graf acak yang berbeda menghasilkan peluang distribusi yang berbeda pula. Artinya tidak ada representasi graf acak yang sama.

1. Distribusi Binomial

Dalam teori probabilitas dan statistika, distribusi binomial dengan parameter n dan p adalah distribusi probabilitas diskrit. Karena variable n adalah angka kesuksesan dalam N kali percobaan, dengan angka mulai dari 0, 1, 2, 3, dan seterusnya. Dengan p adalah kemungkinan kesuksesan dalam 1 kali percobaan.

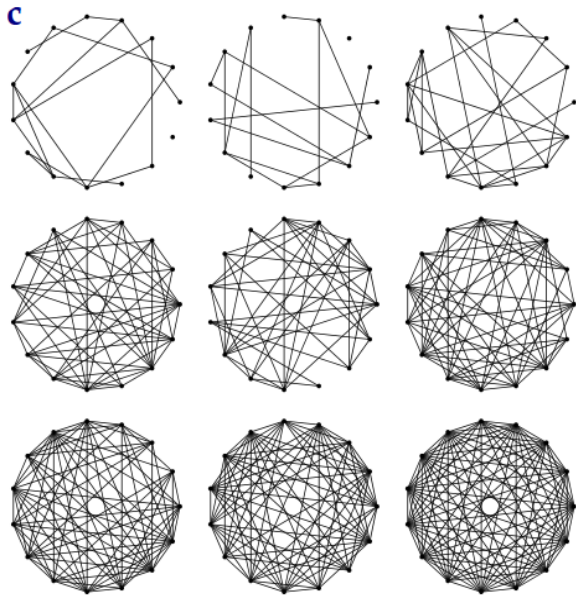
$$P_p(n|N) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \\ = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n},$$

Dengan $\binom{N}{n}$ adalah koefisien binomial.

2. Model Erdős–Rényi

Erdos dan Renyi mengusulkan model graf acak sebagai berikut. [4]

- Ambil sebarang n buah simpul dan hubungkan tiap pasang (atau tidak) dengan kemungkinan p (atau $1-p$).
- Model tersebut adalah model Erdős–Rényi dengan notasi $G_{n,p}$. $G_{n,p}$ secara teknis berarti sebuah graf memiliki m buah busur yang muncul dengan kemungkinan $p^m (1-p)^{(M-m)}$, dimana $M = (n(n-1))/2$ yaitu maksimum busur yang mungkin muncul.



Gambar 3 - Graf acak model Erdős-Rényi

Sumber : http://www.cs.cmu.edu/~02317/slides/lec_17.pdf

Masing-masing sisi memiliki peluang terbentuk $p \in (0,1)$. Model graf tersebut dibentuk dengan interaksi antar simpul yang benar-benar acak. Setiap simpul memilih tetangganya secara acak, dibatasi oleh total sisi maksimum M maupun kemungkinan p .

Untuk model Erdős-Rényi (ER) :

a) Andaikan D adalah variable acak yang merepresentasikan derajat dari sebuah simpul.

1. D adalah variable binomial acak dengan $E[D] = (n-1)p$, dengan p adalah :

$$P(D = d) = \binom{n-1}{d} p^d (1-p)^{n-1-d}$$

2. Andaikan derajat tersebut konstan saat n menuju tak hingga ($n \rightarrow \infty$). D dapat diaproksimasi menggunakan variable acak Poisson dengan :

$$\lambda = (n-1)p,$$

Di dapatkan :

$$P(D = d) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^d}{d!}$$

Oleh karena itu, model ER juga dinamakan model graf acak Poisson.

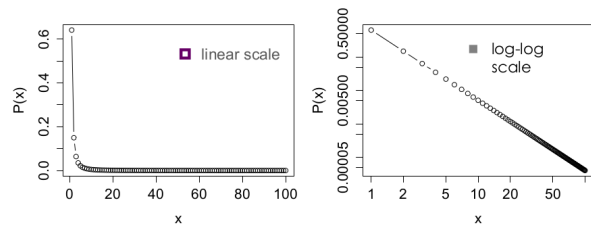
b) Distribusi derajat tersebut jatuh lebih cepat dari eksponensial d , karenanya distribusi ini bukan *power-law distribution*.

c) Koefisien pengelompokan individual mendekati nol sketika n mendekati tak hingga.

3. Model Watts-Strogatz

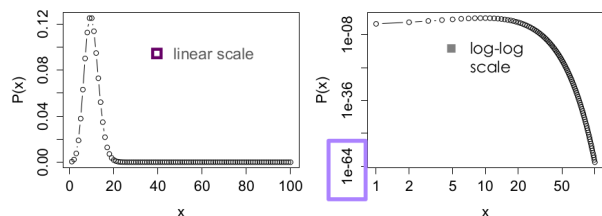
Graf Erdős-Rényi (ER) memang merupakan model yang sederhana dan *powerful* dengan banyak sekali pengaplikasian. Namun graf ER tidak memiliki dua sifat penting yang di temukan dalam jaringan di dunia nyata[5] :

- Graf ER tidak menghasilkan pengelompokan lokal (*local clustering*) dan *triadic closures*. Graf ER memiliki koefisien pengelompokan yang rendah.
- Graf ER tidak memperhitungkan terbentuknya hubs. Secara formal, derajat persebaran dari graf ER konvergen dengan distribusi Poisson dibanding dengan *power law* yang banyak ditemukan dalam dunia nyata.



Gambar 4 - Power law distribution skala linear(kiri) dan skala log-log(kanan)

Sumber : <https://github.com/ladamalina/course-sna> (lada adamic)



Gambar 5 - Poisson distribution skala linear(kiri) dan skala log-log(kanan)

Sumber : <https://github.com/ladamalina/course-sna> (lada adamic)

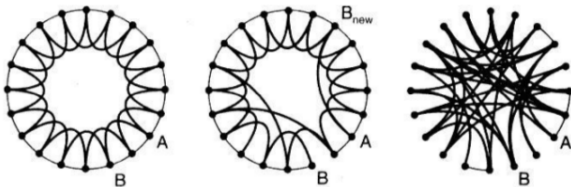
Ketiadaan dua komponen tersebut memotivasi terciptanya model Watts dan Strogatz dalam model dunia kecil (*Small-World*) pada tahun 1998.

Model Watts dan Strogatz dapat dibentuk dengan algoritma sebagai berikut :

1. Bentuk cincin kisi (*lattice*) regular dengan N buah simpul yang masing-masing terhubung dengan $2m$ buah tetangga (m buah pada masing-masing sisi).
2. Untuk setiap simpul $n_i = n_1, \dots, n_N$ ambil busur

(n_i, n_j) dengan $i < j$, dan hubungkan kembali dengan peluang P . Proses menghubungkan kembali dilakukan dengan menggantikan (n_i, n_j) dengan (n_p, n_q) dimana p, q dipilih dengan peluang yang sama untuk semua kemungkinan nilai untuk menghindari *self-loops* dan koneksi yang terduplikasi ($p=i$ atau $q=j$ diperbolehkan namun tidak boleh keduanya bersamaan).

Proses tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 6 - Proses menghubungkan kembali simpul-simpul untuk membentuk model Watts & Strogatz

Sumber : <https://github.com/ladamalina/course-sna> (lada adamic)

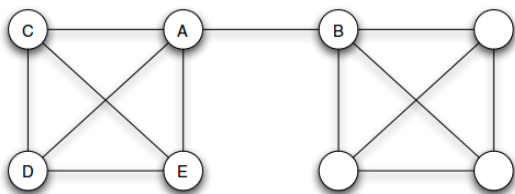
D. Analisis Jaringan Sosial

Jaringan sosial adalah struktur yang dibentuk oleh individu-individu atau organisasi-organisasi yang disebut "nodes" atau simpul yang terhubung oleh satu atau lebih interdependensi seperti persahabatan, kekerabatan, kesamaan minat dan sebagainya.

Analisis jaringan sosial melihat hubungan sosial dalam sudut pandang teori jaringan yang terdiri dari simpul-simpul dan ikatan (bisa disebut juga busur atau koneksi). Simpul-simpul adalah aktor individu dalam jaringan, dan ikatan adalah hubungan antara aktor-aktor.

Beberapa satuan dalam analisis jaringan sosial:

1. Jembatan Sebuah busur disebut jembatan apabila penghapusan terhadap busur tersebut dapat menyebabkan titik akhirnya berada di komponen graf yang berbeda.



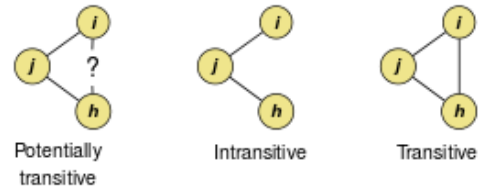
Gambar 7 – Jembatan

Sumber : Kleinberg, Jon & Easley, David. 2010. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*. Cambridge University Press. URL : <https://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/>

A-B adalah jembatan karena jika A-B dihapus, maka simpul A dan simpul B akan berada dalam komponen graf yang berbeda.

2. Transitivitas

Transitivitas dari sebuah hubungan berarti adalah, ketika ada koneksi antara I dan j, dan juga antara j dan h, maka ada juga koneksi antara I dan h.



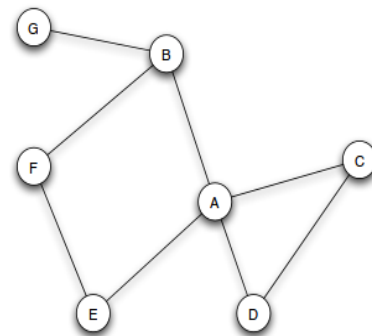
Gambar 8 – Transitivitas

Sumber :

http://www.stats.ox.ac.uk/~snijders/Trans_Triads_ha.pdf

3. Koefisien pengelompokan

Koefisien pengelompokan dari suatu simpul A adalah sebuah peluang antara dua simpul yang bersisian dengan A dapat menjadi simpul yang bersisian pula.



Gambar 9 - Sebuah jaringan pertemanan

Sumber : Sumber : Kleinberg, Jon & Easley, David. 2010. *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World*. Cambridge University Press. URL : <https://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/>

Untuk gambar di atas, koefisien pengelompokan untuk simpul A adalah $1/6$ karena hanya ada sebuah sisi yang menghubungkan dua buah simpul yang bersisian dengan A, yaitu sisi A-C dari enam pasangan 'teman' yang ada: B-C, B-D, B-E, C-D, C-E, dan D-E.

4. Triadic Closures

Triadic closure adalah sebuah konsep dalam teori jaringan sosial, pertama kali diusulkan oleh sosiolog Jerman Georg Simmel di awal tahun 1900. Triadic Closure adalah sebuah sifat antara tiga buah simpul A, B, dan C dimana jika ada ikatan

kuat antara A-B dan A-C, maka ada ikatan kuat ataupun lemah antara B-C. Hal ini berkaitan dengan koefisien pengelompokkan.

III. SMALL-WORLD PHENOMENON

Fenomena dunia kecil (*Small-World*) – sebuah proposisi yang menyatakan bahwa dunia terhubung dengan enam derajat keterpisahan (*six degrees of separation*) – didemonstrasikan oleh Stanley Milgram, seorang professor di bidang psikologi sosial di Universitas Harvard pada tahun 1967. Subjek ini merupakan kajian yang anekdotikal sekaligus menarik.

Awalnya Milgram tertarik dengan bagaimana dua orang yang dipilih secara acak saling mengenal satu sama lain. Pada akhirnya, ketertarikannya tersebut membawanya menuju satu pertanyaan, 'Seberapa jauh dua individu terpisah satu sama lain?'. Jarak yang dimaksud adalah "A mengenal B, B mengenal C, ..." dan seterusnya. Milgram melakukan eksperimen sederhana seperti berikut ini. Ia memilih beberapa individu "starter" untuk meneruskan surat kepada target yang tinggal daerah Boston, Massachusetts. Ia menyediakan nama, alamat dan beberapa informasi lainnya yang terkait dengan target. Namun para peserta tidak boleh mengirimnya langsung kepada target, melainkan harus mengirimkannya ke seseorang yang sudah begitu dekat dengan peserta yang kira-kira dapat meneruskan surat menuju target, dengan tujuan surat dapat mencapai target secepatnya.

Hasil percobaan tersebut menunjukkan bahwa sekitar 20% surat sampai ke target.[22]. Milgram tertarik pada panjang rata-rata dari jalur yang terbentuk. Ia merepresentasikannya dalam graf, dengan individu sebagai simpul, dan busur merepresentasikan koneksi antar individu. Rata-rata, surat sampai dengan enam langkah, dan ini menjadi bukti dasar bahwa ada jalur pendek (*short paths*) dalam jaringan pertemanan global yang menghubungkan kita semua. Hasil observasi inilah yang mendasari teori enam derajat keterpisahan.

Percobaan Milgram diulang oleh Dodds, Muhamad dan Watts ditahun 2003 menggunakan surat elektronik. Dengan 18 target, 13 negara berbeda, lebih dari 60.000 partisipan dan 24.163 pesan berantai[22].

Pertama para partisipan mengirimkan surat elektronik kepada orang yang mereka ketahui, lalu meminta mereka untuk meneruskan surat elektronik tersebut kepada orang lain yang mereka ketahui. Harapannya adalah, pada akhirnya surat elektronik tersebut dapat dikirim ke orang yang mengenal target secara personal dan menggenapkan rantai tersebut[abcnews]. 384 surel sampai kepada target dengan panjang jalur rata-rata 4.0. [22]

Fenomena ini sangat menarik karena walaupun begitu banyak jumlah populasi manusia di bumi, struktur sosial yang berbeda, dan yang esensial adalah pertumbuhan dari jaringan itu sendiri, kita masih dapat menelusuri keterkaitan antar individu dengan menelusuri koneksi sosialnya[10]. Klaim "Betapa kecil dunia ini!" dapat didemonstrasikan kebenarannya melalui percobaan yang dilakukan Milgram.



Gambar 10 - Salah satu kemungkinan jalur terpendek dalam eksperimen Milgram

Sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/Small-world_experiment

Angka enam pada *six degrees of separation* memang menimbulkan banyak pertanyaan. Seberapa akurat angka tersebut? Karena orang-orang sebenarnya tidak selalu tahu siapa orang terbaik yang harus dipilih agar surat dapat sampai dengan cepat. Selain itu, banyaknya surat yang tidak sampai menimbulkan skeptisisme tentang keakuratan percobaan tersebut.

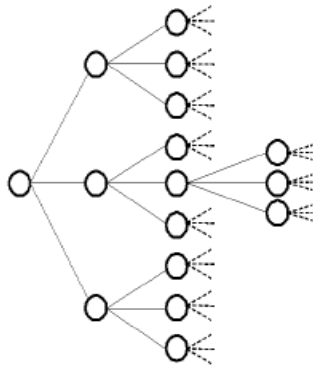
Walau bagaimanapun, dua orang yang dipilih secara acak dapat terhubung secara singkat melalui perantara (kenalan) sudah dapat dibuktikan dan diterima secara luas. terlepas dari seberapa akurat angka tersebut, dan hasil tersebut dikaitkan dengan *small-world effect*.

Fenomena ini, jika dilihat dari sisi lain, amatlah krusial. Terutama untuk masalah komunikasi[6]. Mulai dari tersebarnya berita, rumor, lelucon dan tren tentang gaya hidup merupakan hasil kontak antara individu. Hal ini juga berkaitan dengan bagaimana seseorang dapat mencari pekerjaan, misalnya. Bahkan, fenomena ini memengaruhi persebaran beragam penyakit. Penyakit dapat menyebar sangat cepat dalam jaringan dunia kecil (*Small-world Networks*) dimana derajat keterpisahannya begitu kecil. Hal ini tentu akan berlainan dengan jaringan dengan derajat keterpisahan yang besar. Hal inilah yang membuat studi tentang jaringan struktur sosial dan fenomena *small-world* begitu banyak dikaji dalam beberapa dekade terakhir[6].

IV. REPRESENTASI SMALL-WORLD PHENOMENON :
DEGREES OF SEPARATION

a. Derajat keterpisahan rata-rata

Cara yang penulis gunakan untuk menentukan derajat keterpisahan rata-rata berikut ini didapatkan dari sebuah *paper* yang ditulis oleh Laddha prerna. Dari beragam cara memandang sebuah jaringan, salah satu yang paling praktis dan paling berguna adalah memandangnya sebagai graf.



Gambar 11 - Pohon yang merepresentasikan jaringan

Sumber : Laddha, Prerana.
<http://arxiv.org/pdf/1007.5476.pdf>

Visualisasi jaringan seperti gambar 11 dipilih karena efisiensi dan kejelasannya. Pada gambar tersebut dapat kita lihat terdapat simpul sejumlah $N = \{ n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \}$. Untuk simpul pertama (n_1), koneksi yang dimiliki adalah sejumlah r . Ketika kita telusuri simpul (anak) dari n_1 , maka kita dapat bahwa tiap simpul tersebut memiliki r buah koneksi (ke anaknya), sehingga dengan aproksimasi kita peroleh bahwa total koneksi yang ada adalah $r^2 + r + 1$. Kemudian, ketika kita telusuri lagi di langkah ketiga, kita mendapatkan r^3 buah koneksi. Dan pada langkah berikutnya, kita dapatkan r^k untuk langkah ke k . Apabila kita jadikan sebuah deret geometri, maka bentuknya akan menjadi seperti berikut :

$$r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^k = N$$

Laddha prerna mendeskripsikan ini dengan sangat jelas. Untuk menghitung berapa langkah yang harus diambil untuk mencapai setiap level pada graf, kita akan membuat sebuah tabel. Baris pada tabel tersebut diberi label (indeks) $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$, yang merupakan representasi dari level dari graf. S_1 merepresentasikan level 1. Tabel tersebut berukuran $k \times l$ dimana l adalah langkah maksimum dari dua buah simpul yang ada dalam graf tersebut. Kita juga bisa mendapatkan l dengan formula $l = 2(k-1)$.

Untuk mendapatkan derajat keterpisahan rata-rata antar simpul dalam graf kita dapat melakukan proses sebagai berikut [14] :

1. Tentukan simpul spesifik pada langkah S_k . Lalu hitung jumlah simpul yang dapat dicapai oleh simpul tersebut pada langkah 1,2,3, ... L.
2. Kalikan hasil pada langkah pertama dengan derajat keterpisahan nya.
3. Jumlah tersebut dibagi dengan jumlah simpul yang ada dalam graf kecuali simpul yang kita pilih pada langkah pertama ($N-1$).

Langkah di atas memberikan derajat keterpisahan untuk langkah S_k . Kemudian proses diatas diulangi untuk setiap level pada graf dan simpul yang tersisa. Berikut formula untuk proses diatas :

$$\sum_{i=1}^k \frac{[\sum_{j=1}^l (x_{ij} * j) / N - 1] * r^{k-i}}{N}$$

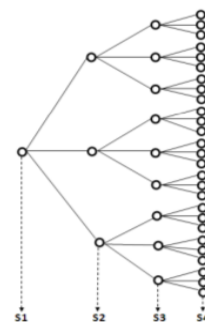
Tabel berikut ini adalah generalisasi nilai r untuk $k=4$.

	1	2	3	4	5	6
S_4	r^0	r^1	r^1	r^2-1	r^2-r	r^3-r^2
S_3	$r+1$	r^1	r^2-1	r^2-r	r^3-r^2	-
S_2	$r+1$	r^2+r-1	r^2-r	r^3-r^2	-	-
S_1	r^1	r^2	r^3	-	-	-

Tabel 1 - Tabel generalisasi r untuk nilai $k = 4$

Sumber : Laddha, Prerana <http://arxiv.org/pdf/1007.5476.pdf>

Contoh 1. 40 buah simpul disusun dalam bentuk pohon berurutan, dengan $k = 4$, dan $r = 3$. Perhitungan matematis terkait rata-rata untuk setiap langkah(level) untuk simpul yang berhubungan telah dibuat. Hitunglah rata-rata derajat keterpisahannya.



Gambar 12 - Pohon dengan 40 buah simpul, $k=4$

Sumber : Laddha, Prerana.
<http://arxiv.org/pdf/1007.5476.pdf>

Total simpul pada persoalan ini adalah $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$, dengan $r = 3$, $k = 4$, $N = 40$, dan $l = 6$. dengan melakukan perhitungan dan menyisipkan hasilnya sesuai dengan tabel generalisasi pada gambar x, kita dapatkan tabel sebagai berikut.

	1	2	3	4	5	6
S_4	1	3	3	8	6	18
S_3	4	3	8	6	18	-
S_2	4	11	6	18	-	-
S_1	3	9	27	-	-	-

Tabel 2 - Hasil penyisipan ke dalam tabel generalisasi

Sumber : Laddha, Prerana. <http://arxiv.org/pdf/1007.5476.pdf>

Kemudian kita ubah tabel tersebut menjadi matrix dengan ukuran 4x6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 & 6 & 18 \\ 4 & 3 & 8 & 6 & 18 & - \\ 4 & 11 & 6 & 18 & - & - \\ 3 & 9 & 27 & - & - & - \end{bmatrix}$$

Gambar 13 - Hasil konversi tabel generalisasi ke matrix 4x6

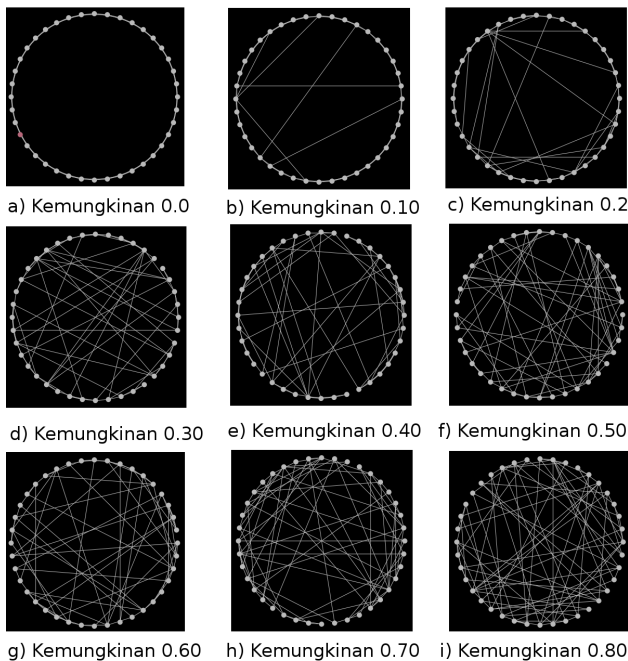
Sumber : Laddha, Prerana.

<http://arxiv.org/pdf/1007.5476.pdf>

Setelah melakukan perhitungan dengan formula yang telah diberikan sebelumnya, kita dapatkan derajat keterpisahan rata-rata dari jaringan tersebut adalah 4,233.

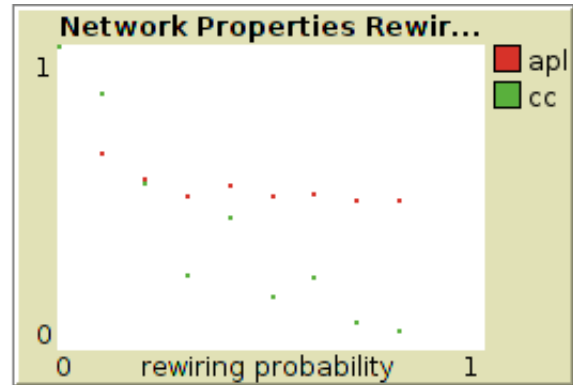
b. Menggunakan Model Watts dan Strogatz

Fenomena dunia kecil biasanya dihubungkan dengan dua sifat – jarak rata-rata yang kecil dan *clustering effect* – yang merupakan sifat dalam jaringan di dunia nyata. Salah satu cara untuk memodelkan fenomena dunia kecil adalah dengan memanfaatkan graf acak dengan distribusi derajat mengikuti *power-law*. Penulis mensimulasikan graf acak untuk pemodelan tersebut dengan menggunakan model Watts & Strogatz dengan variasi kemungkinan distribusi.



Gambar 14 - Hasil simulasi dunia kecil dengan variasi kemungkinan 0,0 - 0,80

Derajat keterpisahan rata-rata dihitung dari setiap node. Penulis mensimulasikan graf acak dengan 40 buah simpul seperti gambar di atas. Dengan kemungkinan mulai dari 0.0 sampai 0.80. Dari gambar tersebut jelas terlihat bahwa jumlah simpul yang terhubung semakin banyak seiring dengan meningkatnya kemungkinan, dan dengan semakin banyaknya simpul yang terhubung, derajat keterpisahan yang ada semakin menurun. Seperti yang digambarkan berikut ini :



Gambar 15 - Perilaku jaringan ketika simulasi. Apl(merah) adalah rata-rata derajat keterpisahan. Cc (hijau) adalah koefisien pengelompokkan.

Kemungkinan	Clustering Koefisien	Degree of Separation
0	0.5	5.385
0.1	0.421	3.479
0.2	0.275	3.042
0.3	0.123	2.738
0.4	0.218	2.915
0.5	0.087	2.721
0.6	0.121	2.756
0.7	0.045	2.651
0.8	0.033	2.668

Tabel 3 - Data hasil simulasi

V. KESIMPULAN

Graf acak Erdős-Rényi (ER) merupakan graf acak yang sederhana dan *powerful* dengan banyak sekali pengaplikasian, namun graf ER tidak memiliki sifat yang dimiliki kebanyakan jaringan di dunia nyata. Pertama, graf ER tidak mampu menghasilkan pengelompokkan lokal (*local clustering*) dan *triadic closures*. Yang kedua, graf ER konvergen dengan distribusi Poisson, bukan *power law* yang banyak ditemukan di dunia nyata.

Pemodelan fenomena dunia kecil menggunakan graf acak model Watts & Strogatz dipilih untuk mengatasi keterbatasan model ER yang pertama.

Dari hasil simulasi dengan model Watts & Strogatz yang telah dilakukan, kita mengetahui bahwa derajat keterpisahan rata-rata akan menurun seiring dengan meningkatnya kemungkinan terhubung dalam graf.

Jaringan seperti facebook yang memiliki lebih dari 1 miliar pengguna, membuat para peneliti – khususnya peneliti di bidang sosial – tertarik untuk mengetahui sifat dalam jaringan tersebut. Derajat keterpisahan pada jaringan facebook sekitar 4,74, dan itu merupakan hal yang cukup mengejutkan. Bisa jadi, ini merefleksikan perubahan norma sosial dan semakin membuktikan kebenaran bahwa dunia ini memang kecil – secara sosial.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin memanjatkan syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis mampu belajar dan menyelesaikan makalah ini dengan tepat waktu. Saya juga ingin mengucapkan terimakasih kepada kedua orang tua saya yang begitu luar biasa. Makalah berjudul “Representasi graf acak (Watts and Strogatz model) pada Small World Phenomenon: Degrees of Separation” ini tidak akan terwujud tanpa ilmu dan bimbingan Ir. Rinaldi Munir, MT dan Harlili S., M.Sc. Terimakasih atas kesabarannya dalam membimbing dan terushlah berkarya.

VII. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Munir, Rinaldi. “Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit,” edisi keempat, Program Studi Teknik Informatika STEI ITB, 2006.
- [2] Rosen, K. H. “Discrete Mathematics and Its Applications 7 th Edition”. New York: McGraw-Hill, 2012.
- [3] Watts, D. J. “Six Degrees: The Science of a Connected Age”. New York: W.W.Norton & Company, 2014.
- [4] Newman, M. E. J. “The structure and function of complex networks” (PDF). Department of Physics, University of Michigan. URL:<http://www-personal.umich.edu/~mejn/courses/2004/cscs535/review.pdf> diakses Senin 7 desember 2015 pukul 23.00 WIB.
- [5] _____. *Watts and Strogatz model explained*, URL : http://everythingexplainedtoday.com/Watts_and_Strogatz_model/ diakses pada Senin 7 desember 2015 pukul 23.19 WIB.
- [6] Gligor, Mircea. *From the “Six Degrees of Separation” to the weighted “Small-World” Networks*. (PDF) . URL : http://www.esmsj.upit.ro/Articol%20v3%20%281%29%201013_3%20GLIGOR.pdf . Diakses pada 8 Desember 2015 pukul 12.05.
- [7] Prizmic, Jure. *Models of the Small World*. <http://www-fl.ijs.si/~rudi/sola/prizmic.pdf>
- [8] Idous & Wilson. “Graphs and Applications. An Introductory Approach”. Springer, 2003.
- [9] Wasserman & Faust. “Social Network Analysis”. Cambridge University Press, 2008.
- [10] **Barabási, Albert-László**. “Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means for Business, Science, and Everyday Life.” New York : Plume, 2003.

- [11] Kleinfeld, Judith. (2000). *Could It Be a Big World After All? What the Milligram Papers in the Yale Archives Reveal About the Original Small World Study*. URL : http://www.columbia.edu/itc/sociology/watts/w3233/client_edit/bi_g_world.html diakses pada 8 Desember 2015 pukul 16.45 WIB.
- [12] _____. *Earth's Population*, URL : https://www.google.com/publicdata/explore?ds=d5bncppjof8f9_&met_y=sp_pop_totl&hl=en&dl=en diakses pada 8 desember 2015 pukul 19.25.
- [13] **Béla Bollobás**, *Random Graphs*, 2nd Edition, 2001, Cambridge University Press, pp. 34-59.
- [14] Laddha, Prerana. (2010). *Degree of Separation in Social Networks*. (PDF). URL : <http://arxiv.org/pdf/1007.5476.pdf> . Diakses pada Selasa 8 desember 2015 pukul 20.52.
- [15] Rouse, Margaret (2014). “Six Degrees of Separation,” URL : <http://whatis.techtarget.com/definition/six-degrees-of-separation> diakses pada 5 desember 21.18 WIB.
- [16] Kleinberg, Jon. “The Small World Phenomenon : An Algorithmic Perspective.” URL: <https://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/swn.pdf>, diakses tanggal 5 Desember 2015 pukul 11.30 WIB.
- [17] Watts, D. J. & Strogatz, S.H. (1998). “Collective Dynamics of ‘Small-World’ Networks.” URL: <http://worrydream.com/ScientificCommunicationAsSequentialArt/ScientificCommunicationAsSequentialArt.pdf> diakses tanggal 5 desember 11.40 WIB.
- [18] _____. “Connecting with Networks,” URL : <https://www.learner.org/courses/mathilluminated/units/11/textbook/01.php> diakses tanggal 5 desember 2015 11.50 WIB.
- [19] _____. “Small World Networks,” URL : http://cs.brynmawr.edu/Courses/cs380/spring2013/section02/slides/06_SmallWorldNetworks.pdf diakses pada tanggal 5 desember 21.01 WIB.
- [20] Wilensky, U. 1999). NetLogo. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.
- [21] Wilensky, U. (2005). NetLogo Small Worlds model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/SmallWorlds>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.
- [22] Adamic, Lada. *Social Network Analysis*. URL : <https://github.com/ladamalina/coursera-sna> diakses tanggal 5 desember 2015 pukul 11.00 WIB.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 9 Desember 2015



Febi Agil Ifdillah (13514010)