Aplikasi Aljabar Boolean dalam Sistem Digital

Arnettha Septinez 13514093
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514093@std.ste.itb.ac.id

***Abstract*—Sistem Digital adalah salah satu sistem elektronika yang menngunaka konsep diskrit Boolean dalam pemecahan masalah. Sistem Digital berguna untuk mempermudah komputasi masukan dari lingkungan yang umumnya bersifat kontinu**

***Keywords*—Boolean, Diskrit, Sistem Digital.**

I. PENDAHULUAN

Dewasa ini, kehidupan semakin tidak dapat dipisahkan dari teknologi. Dari keperluan sederhana hingga keperluan kompleks, hampir semua menggunakan alat elektronik. Contoh dari keperluan sederhana adalah keperluan sehari-hari atau keperluan rumah tangga, misalkan untuk menghilangkan kusut dari baju, diperlukan setrika. Untuk mendapatkan penerangan di tempat tanpa lampu, diperlukan senter. Seiring dengan berjalannya waktu, teknoloi yang beredar tentunya semakin canggih. Untuk itu, kendali sederhana seperti sekedar mematikan ataupun menyalakan sistem menjadi perhatian utama.

Salah satu contoh sederhana adalah saklar. Rangkaian yang menggunakan saklar menentukan apakah rangkaian tersebut dalam kondisi terhubung atau tidak. Saklar memudahkan pengguna untuk menyalakan atau mematikan sistem. Penggunaan saklar adalah salah satu contoh penerapan Aljabar Boolean dalam sebuah sistem rangkaian dimana kondisi hidup dan matinya sistem ditentukan oleh pengguna.Aljabar Boolean membantu memudahkan pegendalian dasar pada suatu teknologi.

Pada zaman modern ini, mulai banyak dikembangan sistem saklar yang masukannya tidak dilakukan manual oleh manusia tetapi membaca kondisi lingkungannya. Salah satu contoh sederhananya adalah alarm. Dalam hal ini, alarm menyala tergatung dari input dari lingkungan yang memenuhi kondisi menyala sistemnya. Sebagai contoh, alarm weker akan menyala jika jam sudah menunjukkan waktu tertrntu dan alarm kebakaran akan menyala jika mendeteksi adanya panas. Alarm adalah salah satu penerapan Aljabar Boolean tingkat lanjut yang bernama sistem digital, dimana dalam hal ini sistem tidak melihat ondisi rankaian melainkan kondisi masukan untuk menentukan apakah keluaran dapat dikelurakan atau tidak

Pada makalah ini akan dibahas bagaimana Sistem Digital mengaplikasikan konsep Aljabar Boolean dalam sistem kerjanya. Sistem Digital menggunakan operan-operan yang sama dengan yang digunakan pada Aljabar Boolean. Dalam praktiknya Sistem Digital menggunakan "Gerbang" yang menjadi operan dalam sistemnya. Gerbang-gerbang ini yang nantinya akan menentukan apakah keluaran-keluaran sudah dapat diberikan hanya berdasarkan kondisi masukannya.

II. ALJABAR BOOLEAN

A. Pengertian Aljabar Boolean

Aljabar Boolean adalah struktur aljabar yang memiliki basis biner, yaitu 1 dan 0, sesuai dengan tipe data Boolean, yaitu true dan false. Suatu sistem aljabar disebut Aljabar Boolean jika memenuhi Postulat Huntington, yaitu formula dari enam aksioma yang dikemukakan oleh Edward Vermilye Huntington. Postulat Huntington :

Misalkan terdapat dua buah operator biner + dan ·, sebuah operator uner ‘, dan B adalah himpunan yang didefinisikan dengan operator-operator tersebut dengan 1 dan 0 sebagai dua elemen berbeda, maka untuk setiap a, b, c yang merupakan elemen dari B berlaku aksioma-aksioma sebagai berikut,

1. *Closure*
   (i) $a + b \in B$
   (ii) $a \cdot b \in B$
2. Identitas
   (i) $a + 0 = a$
   (ii) $a \cdot 1 = a$
3. Komutatif
   (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a \cdot b = b \cdot a$
4. Distributif
   (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
5. Komplemen
   (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a \cdot a' = 0$
6. Terdapat paling sedikit dua elemen a, b $\in$ B dengan $a \neq b$

Terdapat juga aksioma lain yang berlaku untuk aljabar Boolean, yaitu :

1. Idempoten

(i) a + a = a
(ii) a · a = a

2. Asosiatif
(i) (a + b) + c = a + (b + c)
(ii) (a · b) · c = a · (b · c)

Sifat-sifat aljabar Boolean memiliki beberapa perbedaan dengan sifat aljabar biasa, seperti:

1. Pada hukum distributif kedua, dinyatakan bahwa a + (b · c) = (a + b) · (a + c). Hal tersebut tidak berlaku pada aljabar biasa karena pada aljabar biasa, b dan c tetap harus dikalikan terlebih dahulu.
2. Aljabar Boolean tidak memiliki kebalikan dari penjumlahan dan perkalian, oleh karena itu, aljabar Boolean tidak memiliki operasi pengurangan dan pembagian layaknya aljabar biasa.
3. Aljabar biasa tidak memiliki operator komplemen.
4. Aljabar biasa memperlakukan himpunan bilangan real sebagai elemen yang tak berhingga banyaknya, sedangkan aljabar Boolean memperlakukan himpunan elemen B yang masih belum didefinisikan. Akan tetapi pada aljabar Boolean dua-nilai, himpunan B didefinisikan sebagai himpunan yang memiliki dua nilai, yaitu 1 dan 0.

Karena definisi himpunan B untuk aljabar Boolean masih belum jelas, untuk menyatakan aljabar Boolean, harus terlebih dahulu dilakukan:

1. Penentuan elemen himpunan B
2. Penentuan aturan operasi untuk operator biner dan operator uner
3. Himpunan B dan masing-masing operator harus memenuhi Postulat Huntington.

B. Aljabar Boolean Dua-Nilai

Telah dijelaskan bahwa himpunan B pada aljabar Boolean belum terdefinisi. Akan tetapi, terdapat jenis aljabar Boolean yang umum dan sangat banyak dipakai, yaitu aljabar Boolean dua-nilai.

Aljabar Boolean dua-nilai didefinisikan sebagai himpunan B yang memiliki dua elemen yaitu 1 dan 0 (B = {0, 1}), operator biner + dan ·, dan operator uner ‘. Aturan operasi untuk operator-operator tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 2-1 Operasi Perkalian

a	b	a · b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 2-2 Operasi Penjumlahan

a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 2-3 Operasi Komplemen

a	a’
0	1
1	0

C. Hukum-Hukum pada Aljabar Boolean

Berikut ini adalah hukum-hukum yang berlaku pada aljabar Boolean:

1. Identitas
(i) a + 0 = a
(ii) a · 1 = a
2. Komplemen
(i) a + a’ = 1
(ii) aa’ = 0
3. Involusi
(i) (a’)’ = a
4. Distributif
(i) a · (b + c) = (a · b) + (a · c)
(ii) a + (b · c) = (a + b) · (a + c)
5. Komutatif
(i) a + b = b + a
(ii) ab = ba
6. Idempoten
(i) a + a = a
(ii) a · a = a
7. Dominansi
(i) a + 1 = 1
(ii) a · 0 = 0
8. Penyerapan
(i) a + ab = a
(ii) a(a + b) = a
9. Asosiatif
(i) (a + b) + c = a + (b + c)
(ii) (a · b) · c = a · (b · c)
10. De Morgan
(i) (a + b)’ = a’b’
(ii) (ab)’ = a’ + b’
11. 0/1
(i) 0’ = 1
(ii) 1’ = 0

D. Fungsi Boolean

Fungsi Boolean adalah fungsi yang dibentuk oleh beberapa variabel Boolean. Fungsi dengan n variabel dapat dinyatakan dengan f(x_1, x_2, …, x_n). Contoh untuk fungsi dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$f(x, y, z) = x + yz$$

dengan x, y, dan z bernilai 1 atau 0.

Fungsi Boolean memiliki beberapa operasi, yaitu:

1.Penjumlahan

$$(f+g)(x_1+x_2+...+x_n)=$$
$$f(x_1+x_2+...+x_n)+g(x_1+x_2+...+x_n) \quad (1)$$

2.Perkalian

$$(fg)(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1+x_2+...+x_n)$$
$$g(x_1+x_2+...+x_n) \quad (2)$$

3.Komplemen (dapat menggunakan hukum De Morgan)

Fungsi Boolean memiliki bentuk kanonik. Bentuk kanonik tersebut terdiri dari dua macam, yaitu:

1. SOP (*Sum of Product*), penjumlahan dari kali hasil. Dapat disebut juga *maxterm* dengan lambang M. Bentuknya : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$
   Notasi : $\sum$
2. POS (*Product of Sum*), perkalian dari hasil jumlah. Dapat disebut juga *minterm* dengan lambang m. Bentuknya : $x_1x_2\ldots x_n$
   Notasi : $\prod$

Tabel 2-4 (Munir, 2006)

x	y	*Minterm*		*Maxterm*	
		Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	x'y'	m_0	x + y	M_0
0	1	x'y	m_1	x + y'	M_1
1	0	xy'	m_2	x' + y	M_2
1	1	xy	m_3	x' + y'	M_3

Contoh penggunaan:

1.SOP

$$f(x,y)=x'y+xy=m_1+m_3=\sum(1,3) \quad (3)$$

2.POS

$$f(x,y)=(x+y)(x+y')=M_0M_1=\prod(0,1) \quad (4)$$

E. Peta Karnaugh

Peta Karnaugh atau *K-Map* adalah tabel yang masing-masing selnya merepresentasikan kombinasi variabel yang berbeda-beda dari fungsi Boolean. Peta Karnaugh berfungsi untuk membantu penyederhanaan fungsi Boolean.

1.Dua variabel

Tabel 2-5 Peta Karnaugh Dua Variabel

x\y	0	1
0	x'y'	x'y
1	xy'	xy

2.Tiga variabel

Tabel 2-6 Peta Karnaugh Tiga Variabel

x/yz	00	01	11	10
0	x'y'z'	x'y'z	x'yz	x'yz'
1	xy'z'	xy'z	xyz	xyz'

3.Empat variabel

Tabel 2-7 Peta Karnaugh Empat Variabel

wx/yz	00	01	11	10
00	w'x'y'z'	w'x'y'z	w'x'yz	w'x'yz'
01	w'xy'z'	w'xy'z	w'xyz	w'xyz'
11	wxy'z'	wxy'z	wxyz	wxyz'
10	wx'y'z'	wx'y'z	wx'yz	wx'yz'

Masing-masing tabel akan berisi 0 atau 1, bergantung dengan fungsi Boolean yang akan dibuat peta Karnaughnya. 0 artinya kondisi tidak terdapat dalam fungsi, sedangkan 1 artinya kondisi terdapat dapam fungsi.

Contoh fungsi (Munir, 2006):

$$f(w,x,y,z)=w'x'y'z+w'x'yz+w'xy'z+w'xyz$$
$$+w'xyz'+wxy'z+wxyz+wxyz'+wx'y'z'+wx'y'z$$
$$+wx'yz \quad (5)$$

Peta Karnaugh-nya:

Tabel 2-8 Peta Karnaugh Fungsi (5)

wx/yz	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

Suatu fungsi belum tentu berada pada bentuk yang paling sederhana. Penyederhanaan fungsi Boolean dengan peta Karnaugh dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut:

1. Mengelompokkan sel yang bernilai 1 dan saling bersisian dengan membentuk pasangan (2 elemen), quad (4 elemen), atau oktet (8 elemen).
2. 'Mengeliminasi' huruf yang representasi binernya berbeda dalam kelompok tersebut.

Contoh penyederhanaan fungsi (5):

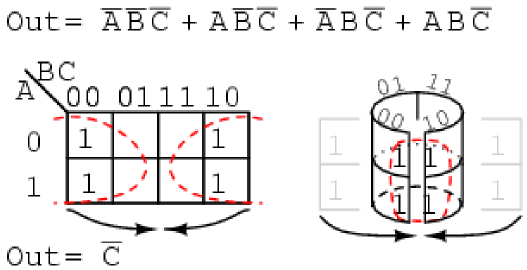
Tabel 2-9 Peta Karnaugh Fungsi (5) dengan Pengelompokkan

wx/yz	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

Fungsi disederhanakan menjadi:

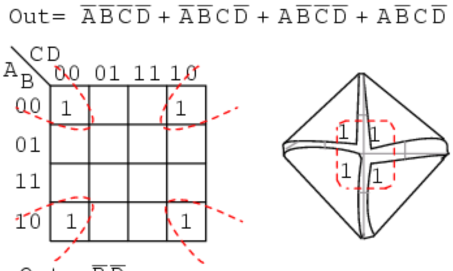
$$f(w,x,y,z)=z+xy+wx'y' \quad (6)$$

Teknik penggulungan juga dapat dilakukan untuk penyederhanaan peta Karnaugh.



Gambar 2-1 Penggulungan Kiri-Kanan
(Sumber:
http://www.allaboutcircuits.com/textbook/digital/chpt-8/logic-simplification-karnaugh-maps/)

Selain penggulungan kiri-kanan, dapat juga dilakukan penggulungan atas-bawah ataupun menyatukan pojok-pojoknya seperti pada Gambar 2-2



Gambar 2-2 Pengelompokkan Pojok-Pojok Peta Karnaugh
(Sumber:
http://www.allaboutcircuits.com/textbook/digital/chpt-8/larger-4-variable-karnaugh-maps/)

Selain kondisi 1 dan 0, terdapat juga kondisi *don't care*, yaitu kondisi yang nilainya dapat diabaikan. Misalkan pada *seven segment* untuk satu digit angka yang menerima masukan biner dengan ukuran 4 bit, masukan yang nilainya desimalnya melebihi 9 (1010-1111) masuk ke dalam kondisi *don't care*. Kondisi tersebut dapat dilambangkan dengan X. X dapat diperlakukan sebagai 1 atau 0 tetapi tidak keduanya untuk X yang sama.

Contohnya, terdapat fungsi

$$f(x, y) = xy + xy' \tag{7}$$

dengan kondisi *don't care*

$$d(x, y) = x' y' \tag{8}$$

peta Karnaugh-nya:

Tabel 2.10 Peta Karnaugh Fungsi (7) dan (8)

x/y	0	1
0	X	0
1	1	1

X pada x'y' dianggap sebagai 1, sehingga dikelompokkan dengan xy'. Fungsi yang telah disederhanakan:

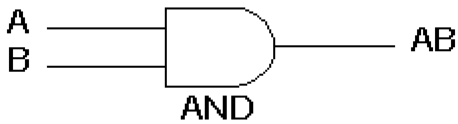
$$f(x, y) = x + y' \tag{9}$$

III. SISTEM DIGITAL

Sistem digital adalah sistem elektronika yang dalam prosesnya mengolah nilai-nilai diskrit. Sistem Digital sangat sering menggunakan elemen-elemen logika. Sistem Digital menjadi terobosan dalam menangani input yang berupa kontinu. Sistem digital dapat merubah nilai yang tidak teratur dalam bentuk diskrit atau digit-digit angka.

Sistem digital dimodelkan dengan gerbang logika. Terdapat tiga gerbang logika dasar pada sistem digital, yaitu gerbang AND, OR, dan NOT (Sangosanya, 1997).

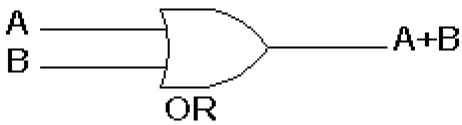
1. Gerbang AND



Gambar 3-1 Gerbang AND

Gerbang ini mengoperasikan input biner dengan operator · (perkalian). Misalkan terdapat input A dan B, gerbang akan menghasilkan output AB jika A dan B bernilai 1 atau true.

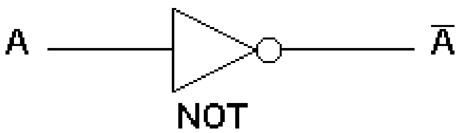
2.Gerbang OR



Gambar 3-2 Gerbang OR

Gerbang ini mengoperasikan input biner dengan operator + (penjumlahan). Misalkan terdapat input A dan B, gerbang akan menghasilkan output A + B jika setidaknya salah satu dari A atau B bernilai 1 atau true.

3.Gerbang NOT

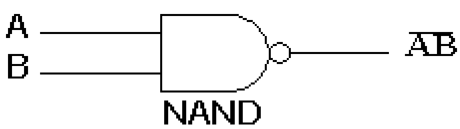


Gambar 3-3 Gerbang NOT

Gerbang ini mengoperasikan input biner dengan operator ' (komplemen). Misalkan terdapat input A, gerbang akan menghasilkan (A)' jika A memasuki gerbang tersebut.

Selain gerbang-gerbang dasar tersebut, terdapat beberapa gerbang turunan yang dipakai dalam sistem digital. Gerbang-gerbang tersebut adalah:

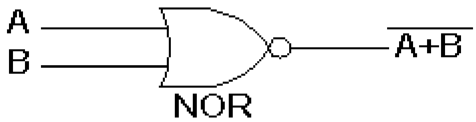
1.Gerbang NAND



Gambar 3-4 Gerbang NAND

Gerbang ini mengoperasikan input biner dengan operator gabungan ' dan · (komplemen dan perkalian). Misalkan terdapat input A dan B, gerbang akan menghasilkan (AB)’ jika setidaknya salah satu dari A atau B bernilai 0 atau false.

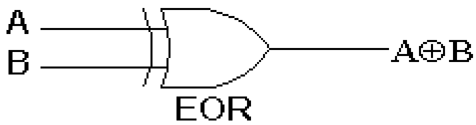
2.Gerbang NOR



Gambar 3-5 Gerbang NOR

Gerbang ini mengoperasikan input biner dengan operator gabungan ‘ dan + (komplemen dan penjumlahan). Misalkan terdapat input A dan B, gerbang akan menghasilkan (A + B)’ jika A dan B bernilai 0 atau false.

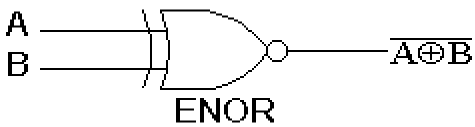
3.Gerbang XOR atau EOR



Gambar 3-6 Gerbang XOR

Gerbang ini akan menghasikan nilai 1 atau true jika A dan B memiliki nilai yang berbeda satu sama lain.

4.Gerbang XNOR atau ENOR

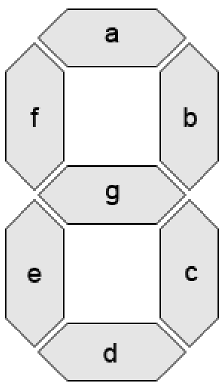


Gambar 3.7 Gerbang XNOR

Gerbang ini akan menghasilan nilai 1 atau true jika A dan B memiliki nilai yang sama (sama-sama 1 atau sama-sama 0).

IV. APLIKASI ALJABAR BOOLEAN PADA SISTEM DIGITAL

Salah satu aplikasi aljabar Boolean pada sistem digital adalah penggunaan peta Karnaugh untuk menentukan fungsi segment pada *seven segment*.



Gambar 4-1 *Seven Segment*

Seven segment adalah alat elektronik yang dipakai untuk menampilkan angka melalui kombinasi-kombinasi segmennya. Masing-masing segmen akan menyala sesuai dengan masukan biner yang diterima oleh gerbang logika pada sistem digital *seven segment* tersebut.

Misalkan terdapat *seven segment* yang merepresentasikan bilangan 0-9 yang menerima masukan biner sebanyak 4 bit. Masing-masing bit direpresentasikan dengan w, x, y, z (terurut dari *most significant bit* hingga *least significant bit*). Dibuat peta Karnaugh untuk masing-masing segmen untuk mendapatkan fungsi keaktifan segmen. 1 melambangkan bahwa segmen aktif, sedangkan 0 melambangkan bahwa segmentidak aktif. Perlu diperhatikan bahwa kondisi *don’t care*, yaitu kondisi saat masukan bit melebihi 9 (1010-1111) dianggap sebagai kondisi yang tidak akan memiliki keluaran sehingga dilambangkan dengan 0.

Tabel 4-1 Peta Karnaugh untuk Segmen a

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$a = w'y + w'xz + wxy' + x'y'z' \tag{10}$$

Tabel 4-2 Peta Karnaugh untuk Segmen b

wx/yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$b = w'x' + x'y' + w'y'z' + w'yz \tag{11}$$

Tabel 4-3 Peta Karnaugh untuk Segmen c

wx/yz	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$c = w'z + x'y' + w'x \tag{12}$$

Tabel 4-4 Peta Karnaugh untuk Segmen d

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$d = w'x'y + w'yz' + x'y'z' + wx'y' + w'xy'z \tag{13}$$

Tabel 4-5 Peta Karnaugh untuk Segmen e

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

$$e = w'yz' + x'y'z' \tag{14}$$

Tabel 4-6 Peta Karnaugh untuk Segmen f

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

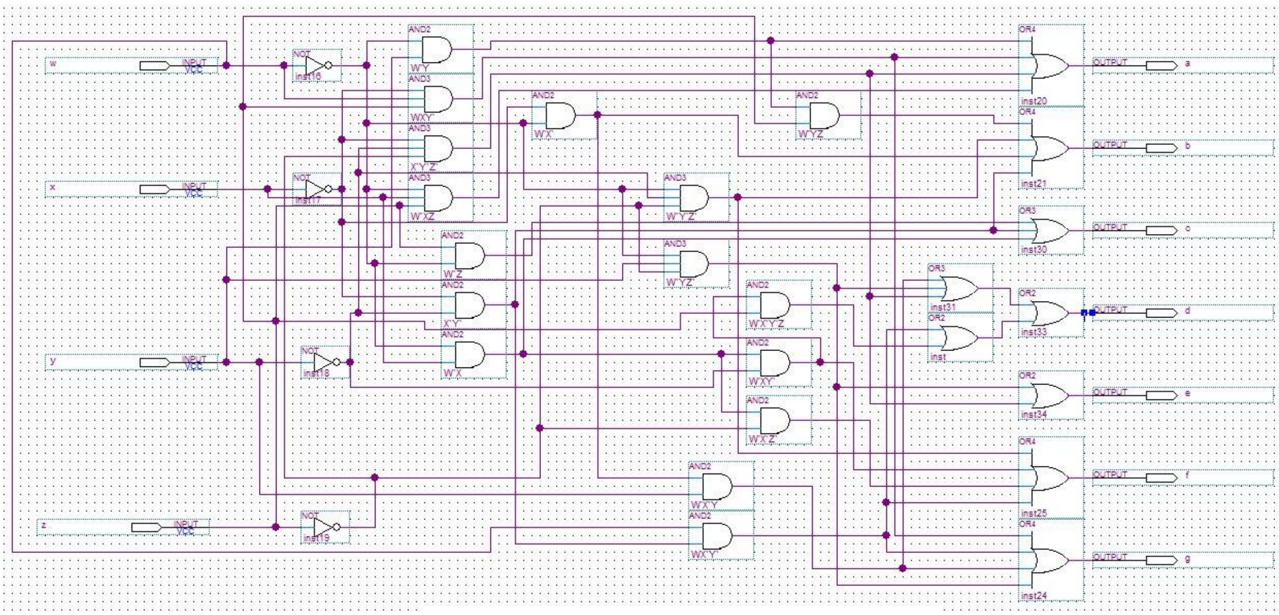
$$f = w'y'z' + w'xy' + w'xz' + wx'y' \tag{15}$$

Tabel 4-7 Peta Karnaugh untuk Segmen g

wx/yz	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

$$g = wxy' + wx'y' + w'x'y + w'yz' \tag{16}$$

Berikut ini adalah rangkaian gerbang logika untuk fungsi-fungsi segmen dari *seven segment* tersebut:



Gambar 4-2 Gerbang Logika *Seven Segment*

V. SIMPULAN

Aljabar Boolean merupakan dasar dari sistem digital. Sistem digital pada umumnya menggunakan gerbang logika untuk melakukan proses-proses yang dibutuhkan sebagai representasi operasi logika pada aljabar boolean. Sistem Digital hanya mengluarkan dua macam nilai, yaitu 1 dan 0, sama dengan Aljabar Boolean dengan True dan False.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama saya memanjatkan puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan berkat dan rahmat-Nya dalam pengerjaan makalah ini hingga makalah ini dapat diselesaikan. Saya juga mengucapkan terima kasih pada Dr. Ir. Rinaldi Munir, MT. dan Dra. Harlili S., M.Sc. selaku dosen Matematika Diskrit prodi Teknik Informatika ITB atas bimbingannya. Tidak lupa saya ucapkan terima kasih kepada teman-teman yang telah memberikan inspirasi dalam penyempurnaan makalah ini.

REFERENCES

[1] Slide Slide Presentasi Aljabar Boolean Teknik Informatika Universitas Pasundan
Diakses pada 9 Desember 2015, pukul 00.32 WIB

[2] http://www.ee.surrey.ac.uk/Projects/CAL/digital-logic/gatesfunc/index.html
Diakses pada 9 Desember 2015, pukul 01.56 WIB

[3] Slide Presentasi EL2095: Boolean Algebra
Diakses pada 10 Desember 2015, pukul 12.15 WIB

[4] Munir, Rinaldi. 2006. *Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit*. Bandung: Program Studi Teknik Informatika STEI ITB.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2015

Arnettha Septinez (135141093)