

Penerapan Pewarnaan Graf dalam Penentuan Jadwal Perkuliahan

Catherine Pricilla - 13514004
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514004@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—Jadwal kuliah adalah hal yang sangat vital bagi mahasiswa, jika suatu jadwal kuliah tidak diatur dengan baik maka akan terjadi kekacauan dalam proses perkuliahan. Pengaturan jadwal kuliah adalah hal yang selalu dilakukan oleh setiap universitas setiap pergantian semester. Karena banyaknya *constraint* dalam pengaturan jadwal kuliah, diperlukan suatu metode agar pengaturan jadwal menjadi lebih efisien dan meminimalisasi adanya *error* dalam pengaturan jadwal. Masalah ini dapat dipecahkan menggunakan salah satu bahasan teori graf yaitu pewarnaan graf. Dengan mengaplikasikan pewarnaan graf pada masalah pengaturan jadwal,

Kata Kunci— jadwal kuliah, pewarnaan graf, teori graf

I. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, kita seringkali dihadapkan dengan berbagai masalah yang menuntut perencanaan yang matang. Salah satu contohnya adalah penyusunan jadwal, jika jadwal sehari-hari tidak disusun secara matang, maka dapat terjadi kekacauan. Menyusun jadwal merupakan hal yang cukup kompleks karena memiliki banyak faktor-faktor yang membatasinya, sebagai contoh, dalam penyusunan jadwal pribadi, jadwal tidak hanya bergantung pada satu individu saja tetapi banyak individu-individu lain yang mempengaruhi jadwal tersebut. Jika individu A membuat janji dengan individu B, maka waktu luang dari individu A dan B yang harus dipertimbangkan dalam membuat jadwal.

Salah satu pengaturan jadwal yang memiliki banyak keterbatasan adalah pengaturan jadwal dan ruang kuliah di suatu perguruan tinggi. Permasalahan pengaturan ini adalah permasalahan yang selalu dihadapi oleh setiap universitas saat memasuki suatu semester perkuliahan yang baru. Pengaturan jadwal dan ruang kuliah yang efektif bukanlah hal yang mudah, Terlebih lagi banyak keadaan-keadaan yang membatasi pengaturan jadwal dan penempatan ruang kuliah tersebut. Hal-hal yang membatasi pengaturan jadwal kuliah dapat berupa dosen, mahasiswa, ketersediaan waktu dan ketersediaan ruang.

Khususnya di Institut Teknologi Bandung Kampus Ganesha, ruang kuliah yang tersedia sangat terbatas dibandingkan dengan banyak mahasiswa dan banyaknya

jam kuliah. Ruang kuliah dan jam kuliah yang terbatas menjadi salah satu hambatan besar dalam pengaturan jadwal. Penjadwalan secara manual akan memperbesar *error*, untuk mengatasi masalah ini diperlukan perencanaan jadwal dan ruang kuliah yang baik di setiap semesternya. Salah satu solusi dari permasalahan ini adalah dengan mengaplikasikan salah satu pembahasan teori graf yaitu pewarnaan graf.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Teori Graf

Graf merupakan struktur diskrit yang terdiri himpunan sejumlah simpul (*vertices*) dan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Notasi dari graf adalah $G = (V, E)$, dimana V merupakan himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices*), $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sedangkan, E merupakan himpunan sisi-sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

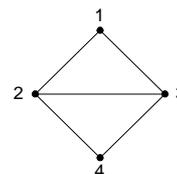
2.1.1 Jenis-Jenis Graf

Graf sendiri dapat dikelompokkan menjadi berbagai jenis.

Berdasarkan ada tidaknya gelang, graf dikelompokkan menjadi:

1. Graf sederhana

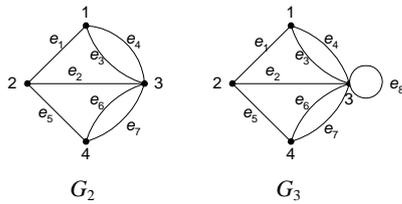
Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda.



Gambar 1: Contoh graf sederhana

2. Graf tak-sederhana

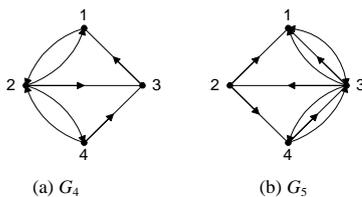
Graf tak-sederhana merupakan graf yang mengandung sisi ganda atau gelang.



Gambar 2: Contoh (a) graf ganda dan (b) graf semu

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dikelompokkan menjadi:

1. Graf tak-berarah
Graf tak-berarah merupakan graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah.
2. Graf berarah
Graf berarah merupakan graf yang sisinya memiliki suatu orientasi arah tertentu.



Gambar 3: Contoh (a) graf berarah dan (b) graf-ganda berarah

2.1.2 Terminologi Graf

1. Ketetanggaan (*Adjacency*)
Dua buah simpul bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.
2. Bersisian (*Incidency*)
Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$, dikatakan e bersisian dengan simpul v_j , atau e bersisian dengan simpul v_k .
3. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)
Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang berurusan dengannya.
4. Graf Kosong (*Null Graph*)
Graf yang tidak memiliki sisi sama sekali atau himpunan sisinya kosong.
5. Derajat (*Degree*)
Derajat dari suatu simpul adalah jumlah sisi yang menempel dengan dengan simpul tersebut.
6. Lintasan (*Path*)
Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .
7. Siklus (*Cycle*) atau Sirkuit (*Circuit*)
Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut sirkuit atau siklus.
Sedangkan, panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut.
8. Terhubung (*Connected*)

Dua buah simpul v_1 dan simpul v_2 disebut terhubung jika terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 .

G disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j .

9. Upagraf (*Subgraph*) dan Komplemen Upagraf
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komplemen dari upagraf G_1 terhadap G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $G_2 = E - E_1$, dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya. Komponen graf adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G .
10. Upagraf Rentang (*Spanning Subgraph*)
Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan upagraf rentang jika $(V_1 = V)$ G_1 mengandung semua simpul dari G .

11. Cut-Set

Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung.

12. Graf Berbobot (*Weighted Graph*)

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah bobot.

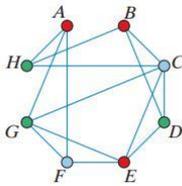
2.1.3 Beberapa Graf Khusus

1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)
Graf lengkap adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya.
2. Graf Lingkaran
Graf lingkaran adalah graf yang setiap simpulnya berderajat dua.
3. Graf Teratur (*Regular Graph*)
Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama.
4. Graf Bipartite (*Bipartite Graph*)
Graf bipartite adalah graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2 .

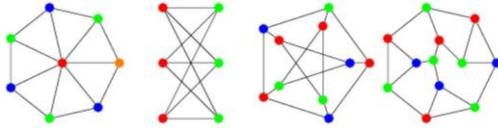
2.2 Pewarnaan Graf

2.2.1 Pewarnaan Simpul

Pewarnaan simpul adalah suatu metode pewarnaan dengan memberikan warna pada simpul-simpul graf dengan pewarnaan yang berbeda pada setiap simpul yang bertetangga. Bilangan kromatik adalah jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai simpul graf.



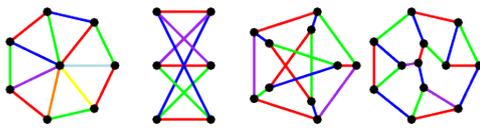
Gambar 4: Contoh 1 pewarnaan simpul graf



Gambar 5: Contoh 2 pewarnaan simpul graf

2.2.2 Pewarnaan Sisi

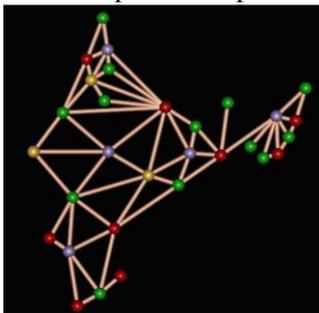
Pewarnaan sisi adalah suatu metode pewarnaan graf dengan memberikan warna pada sisi-sisi dari graf dengan warna yang berbeda untuk setiap sisi yang berdekatan.



Gambar 6: Contoh pewarnaan sisi graf

2.2.3 Pewarnaan Wilayah (Region)

Pewarnaan wilayah/area adalah suatu metode pewarnaan graf dimana wilayah yang bersebelahan dari graf tidak mempunyai warna yang sama. Aplikasi dari pewarnaan wilayah ini adalah pewarnaan peta.



Gambar 7: Aplikasi pewarnaan graf untuk pewarnaan peta India

2.3 Algoritma Pewarnaan Graf

Terdapat banyak cara dan algoritma dari pewarnaan graf, contohnya adalah algoritma Welsh dan Powell, dan algoritma backtracking.

2.3.1 Algoritma Welsh dan Powell

Algoritma ini memberikan cara mewarnai sebuah graph dengan memberi label simpul sesuai dengan derajatnya.

Langkah 1 adalah mengurutkan simpul-simpul berdasarkan derajatnya dari paling besar ke paling kecil.

Langkah 2 adalah mewarnai simpul paling pertama yaitu simpul dengan derajat tertinggi dengan sembarang warna. Lalu cek simpul-simpul setelahnya secara berurutan, dan warnai simpul pertama yang tidak bertetangga dengannya. Lalu mulai lagi dari urutan paling awal dan warnai simpul yang belum berwarna dan ulangi cara itu kembali sampai semua simpul memiliki warna.

III. APLIKASI PEWARNAAN GRAF PADA PERSOALAN PENENTUAN JADWAL KULIAH

Dalam penyusunan jadwal kuliah di suatu perguruan tinggi terdapat banyak batasan-batasan. Batasan-batasan tersebut melingkupi:

- Mahasiswa
- Dosen
- Ruang kuliah yang tersedia
- Waktu kuliah yang tersedia

Tanpa mempertimbangkan ruang kuliah dan waktu yang tersedia, metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah adalah dengan mengaplikasikan pewarnaan graf, pertama-tama membuat keadaan dimana ada 8 orang mahasiswa, 5 dosen dan 6 buah mata kuliah di sebuah universitas.

Mahasiswa	Mata Kuliah					
	A	B	C	D	E	F
1		X	X		X	
2	X		X			
3		X			X	
4	X					X
5				X	X	
6	X	X				
7			X			X
8				X		X

Tabel 1: Mata kuliah yang diikuti oleh mahasiswa

'X' merepresentasikan bahwa mahasiswa tersebut mengambil suatu mata kuliah.

Dosen	Mata Kuliah					
	A	B	C	D	E	F
1			X		X	
2		X				X
3				X	X	
4	X	X				
5			X			X

Tabel 2: Dosen yang mengajar mata kuliah

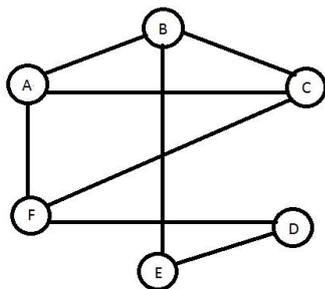
'X' merepresentasikan dosen tersebut mengajar suatu mata kuliah.

Permasalahan pertama adalah adanya mahasiswa yang mengambil beberapa mata kuliah secara bersamaan, ini menyebabkan adanya kemungkinan mahasiswa tidak dapat menghadiri semua kelas yang diikutinya karena

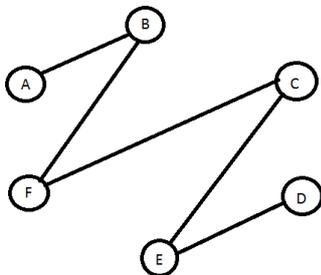
adanya kesamaan jadwal antara beberapa mata kuliah yang diikutinya. Maka dari itu, data mata kuliah yang diikuti oleh mahasiswa direpresentasikan dalam bentuk graf. Mata kuliah dijadikan sebagai simpul-simpul dari graf, serta sisi dari graf sebagai hubungan mata kuliah yang diambil bersamaan oleh seorang mahasiswa. Jika dua mata kuliah diikuti oleh mahasiswa yang sama, maka kedua simpul mata kuliah itu akan dihubungkan dengan sisi. Hal ini bertujuan agar setiap jadwal mata kuliah tidak saling tumpang tindih, misalkan mahasiswa 1 mengikuti kelas B, E dan F, maka kelas B, E, dan F tidak boleh diadakan dalam satu waktu.

Permasalahan kedua adalah ada beberapa dosen yang mengajar keenam mata kuliah tersebut, dan dosen-dosen tersebut mengajar dua mata kuliah, sehingga dua mata kuliah yang diajar oleh dosen yang sama tidak boleh memiliki jadwal yang sama. Sama seperti permasalahan mahasiswa, maka dibentuk representasi graf dengan mata kuliah sebagai simpul-simpulnya dan sisinya menghubungkan mata kuliah yang diajarkan oleh dosen yang sama.

Metode penyelesaian dari permasalahan yang digunakan adalah metode pewarnaan simpul untuk mengetahui berapa besar bilangan kromatiknya, sehingga dapat diketahui jumlah minimum sesi kuliah berbeda yang diperlukan agar seluruh mahasiswa dapat mengikuti seluruh kelas dengan baik, serta ada dosen yang bisa mengajar.



Gambar 8: Representasi tabel pengambilan mata kuliah dalam bentuk graf



Gambar 9: Representasi tabel dosen pengajar mata kuliah dalam bentuk graf

Lalu untuk memudahkan analisis, dibuat tabel simpul-simpul yang bertetangga seperti tabel di bawah ini.

	A	B	C	D	E	F
A		X	X			X

B	X		X		X	
C	X	X				X
D					X	X
E		X		X		
F	X		X	X		

Tabel 3: Simpul yang bertetangga dari graf mahasiswa

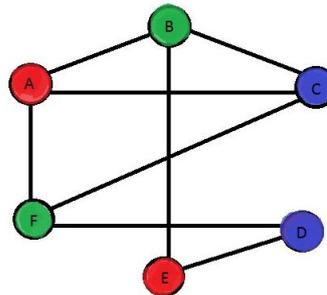
	A	B	C	D	E	F
A		X				
B	X					X
C					X	X
D					X	
E			X	X		
F		X	X			

Tabel 4: Simpul yang bertetangga dari graf dosen

Setelah merepresentasikan tabel dalam bentuk graf, maka untuk menentukan pewarnaan simpul, digunakan algoritma Welsh dan Powell, yaitu mengurutkan semua simpul berdasarkan urutan derajat terbesar ke terkecil, dan memberikan warna pada simpul-simpul didapati data seperti pada tabel 3.

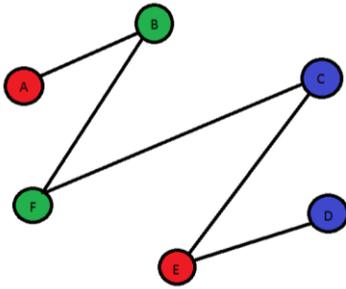
Urutan	Simpul	Derajat	Warna
1	A	3	Merah
2	B	3	Hijau
3	C	3	Biru
4	F	3	Hijau
5	D	2	Biru
6	E	2	Merah

Tabel 5: Urutan derajat dan warna dari simpul



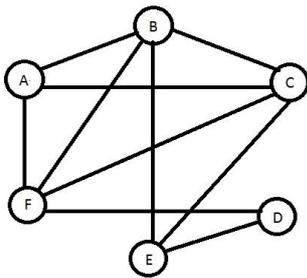
Gambar 10: Graf yang sudah diwarnai simpulnya

Berdasarkan pewarnaan simpul yang telah dilakukan, didapatkan bahwa bilangan kromatiknya adalah 3, sehingga jadwal harus dilaksanakan minimum di tiga waktu yang berbeda agar tidak terjadi tabrakan antar satu mata kuliah dengan mata kuliah yang lain. Lalu karena ada constraint yang berupa jadwal mengajar dosen yang tidak berurutan maka kita perlu meninjau apakah pewarnaan yang telah dilakukan juga berlaku pada graf dosen.



Gambar 11: Pengecekan warna simpul terhadap graf dosen.

Namun, ternyata simpul B dan F bertetangga pada graf dosen sehingga bilangan kromatik dan pewarnaan pertama tidak berlaku. Maka dari itu perlu penggabungan dari kedua graf dosen dan graf mahasiswa sehingga saat dilakukan pewarnaan baru didapatkan pewarnaan yang efektif dan memenuhi batasan-batasan yang ada.

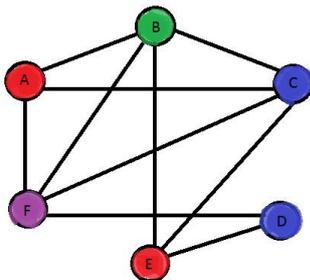


Gambar 12: Graf gabungan antara graf dosen dan mahasiswa

	A	B	C	D	E	F
A		X	X			X
B	X		X		X	X
C	X	X				X
D					X	X
E		X	X	X		
F	X	X	X	X		

Tabel 6: Simpul yang bertetangga dari graf dosen dan mahasiswa

Setelah menggabungkan kedua graf, maka dilakukan pewarnaan ulang untuk mencari bilangan kromatik yang baru sehingga didapati bahwa bilangan kromatik dengan batasan mahasiswa dan dosen adalah 4.



Gambar 13: Pewarnaan graf final untuk 2 constraint

Sehingga untuk 8 orang mahasiswa, 5 orang dosen dan 6 mata kuliah seperti data diatas didapatkan bahwa minimal harus ada 4 slot waktu yang berbeda untuk

menyusun jadwal kuliah tersebut sehingga tidak terjadi tabrakan antar mata kuliah.

IV. KESIMPULAN

Salah satu aplikasi dari pewarnaan graf adalah menentukan berbagai jenis jadwal.

Permasalahan pengaturan jadwal kuliah di setiap awal semester dapat diatasi dengan pewarnaan graf, namun sebenarnya dalam persoalan kehidupan nyata banyak sekali batasan-batasan lain seperti ruang dan waktu kuliah yang tersedia dalam menentukan jadwal kuliah di suatu universitas.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena berkat, kasih, dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini. Penulis juga ingin berterima kasih kepada dosen mata kuliah Matematika Diskrit, Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T. dan Ibu Dra. Harlili, M. Sc. karena berkat bimbingannya selama ini penulis dapat menulis makalah ini.

REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit*, Bandung: Informatika, 2010.
- [2] Deo, Narsingh, *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.
- [3] Bondy, J.A., *Graph Theory with Application*, New York: North-Holland, 1979.
- [4] Pirzada, Shariefuddin, *Applications of Graph Theory*, diakses 8 Desember 2015, <http://www.dharwadker.org/pirzada/applications/>
- [5] *A Touch of Colour*, diakses 8 Desember 2015, http://www.math.uri.edu/~eaton/0131873814_MEB.pdf
- [6] Weisstein, Eric W. *Vertex Coloring*, diakses 7 Desember 2015, <http://mathworld.wolfram.com/VertexColoring.html>
- [7] Princeton University, *Graph Theory, Part 2*, diakses 7 Desember 2015, http://web.math.princeton.edu/math_alive/5/Notes2.pdf
- [8] Weisstein, Eric W. *Edge Coloring*, diakses 7 Desember 2015, <http://mathworld.wolfram.com/EdgeColoring.html>

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 8 Desember 2015

Catherine Pricilla
13514004