Penerapan Pewarnaan Graf pada Permainan Sudoku

Malvin Juanda/13514044
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514044@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Graf adalah salah satu struktur matematika yang digunkaan untuk menentukan relasi antara objek. Teori tentang graf dapat diaplikasikan untuk berbagai hal, misalnya untuk memilih jalur terpendek ke suatu tempat, memilih jalur yang paling efektif bagi pedagang, pembagian jadwal pelajaran bagi siswa, perancangan IC, dan lain-lain. Sekain itu, Graf ternyata dapat digunakan dalam permainan Sudoku. Permainan Sudoku merupakan permain teka-teki yang berdasarkan logika. Dalam menyelesaikan permainan Sudoku, dalam baris dan kolom yang sama tidak boleh ada angka yang sama. Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan teknik pewarnaan graf karena dalam pewarnaan graf tidak boleh ada simpul berdekatan yang memiliki warna yang sama. Oleh karena itu, dalam makalah ini akan dibahas pemanfaatan pewarnaan graf dalam penyelesaian permainan sudoku.**

***Keywords*—Sudoku, graf, pewarnaan graf**

I. Pendahuluan

Sudoku pertama kali diperkenalkan oleh Howard Garns di Connersville, Indiana melalui majalah *Dell* pada tahun 1979 denagn nama *Number place*. Kemudian, puzzle ini dipekenalkan di Jepang dengan nama *Sūji wa dokushin ni kagiru* yang artinya 'Angka kemunculan harus tunggal'. Kemudian nama tersebut disingkat menjadi Sudoku.

Sudoko merupakan permainan logika dengan menggunakan kombinasi angka untuk menyelesaikannya. Tujuan permainan ini adalah untuk mengisi kotak 9×9 sehingga setiap kolom, baris, dan kotak kecil 3×3 mengandung angka 1 sampai 9.

Dalam perkembangannya, Sudoku memiliki banyak jenis dan tidak hanya berukuran 9×9. Beberapa variasi Sudoku diantaranya killer Sudoku, mini Sudoku, Kakkuro, dan lain-lain.

Untuk menyelesaikan Sudoku n×n maka cara penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

- Untuk setiap baris harus diisi dengan angka 1-9 dan tidak boleh mengandug angka yang sama
- Untuk setiap kolom harus diisi dengan angka 1-9 dan tidak boleh mengandug angka yang sama
- Dalam Sudoko 9×9 terdapat 9 kotak kecil yang berukuran 3×3. Setiap kotak kecil ini harus mengandung angka 1-9 dan tidak boleh mengandung angka yang sama.

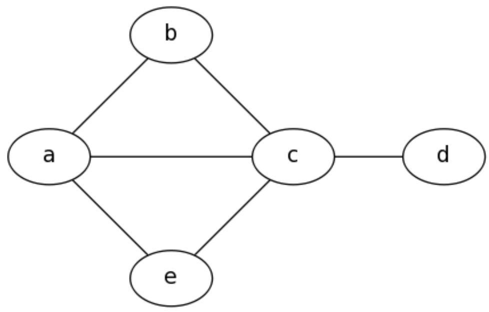
8	3	5	4	1	6	9	2	7
2	9	6	8	5	7	4	3	1
4	1	7	2	9	3	6	5	8
5	6	9	1	3	4	7	8	2
1	2	3	6	7	8	5	4	9
7	4	8	5	2	9	1	6	3
6	5	2	7	8	1	3	9	4
9	8	1	3	4	5	2	7	6
3	7	4	9	6	2	8	1	5

Gambar1. Contoh Sudoku
Sumber: http://sudokublog.typepad.com

Sudoku dibagi ke dalam lima tingkat kesulitan yaitu sangat mudah, mudah, sedang, sulit, dan sangat sulit. Semakin tinggi tingkat kesulian maka semakin sedikit kotak yang terisi. Misalnya Sudoku dengan tingkat kesulitan sangat mudah sudah terisi 40 kotak dan Sudoku dengan tingkat kesulitan sangat sulit hanya terisi 15 kotak.

II. Landasan Teori

A. Teori Graf



Gambar2. Graf
sumber: graphs.grevian.org

1. Definisi Graf

Graf merupakan himpunan suatu objek yang saling berhubungan. Objek dalam graf dinamakan sebgai simpul (vertex), sedangkan hubungan antar objek dinamakan busur (edge).

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) dan ditulis sebagai :

$$G = (V,E)$$

dengan :
V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

2. Jenis Graf
- Graf Sederhana, adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda. Gambar2 adalah contoh graf sederhana.
- Graf tak sederhana, adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang.

3. Terminologi Graf

Beberapa terminologi graf antara lain :
- Ketetanggaan (adjacent)
  Dua buah simpul pada graf dikatakan bertetangga apabila keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.
- Bersisian (incident)
  Untuk sembarang sisi e = (Vj, Vk) dikatakan bersisian dengan simpul Vj , atau e bersisian dengan simpul Vk .
- Simpul terpencil
  Simpul terpencil ialah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya. Atau, dapat juga simpul terpencil adalah simpul yang tidak satupun bertetangga dengan simpul-simpul lainnya.
- Graf kosong
  Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.
- Derajat
  Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
- Lintasan
  Lintasan yang panjangnya n dan simpul awal v_0 ke simpul tujuan vn di dalam graf G ialah barisan selang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ... , v_{n-1}, e_n, v_n sedemikian sehingga $e_1= (v_0, v_1)$, $e_2= (v_1, v_2)$, ... , $e_n= (v_{n-1}, v_n)$, adalah sisi –sisi dari graf G
- Sirkuit
  Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut siklus atau sirkuit
- Terhubung
  Graf tak berarah G disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul v_1 dan v_2 di dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 (ada lintasan dari v_2 k_3 v_1 juga). Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung
- Upagraf
  Misalkan G = (V,E) adalah sebuah graf. G_1 = (V_1,E_1) adalah upagraf dari G jika V_1 merupakan bagian dari V dan E_1 merupakan bagian dari E. Komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2= (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga E_2 = $E-E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota- anggota E_2 bersisian dengannya.
- Cut set
  Cut set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan komponen G tidak terhubung.
- Graf berbobot
  Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).

4. Jenis Lintasan dan Sirkuit
- Lintasan dan Sirkuit Euler
  Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.
  Sirkuit Euler adalah sirkuit yang melewati melewati masing-masing sisi tepat satu kali.
- Lintasan dan Sirkuit Hamilton
  Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui masing-masing sumpul di dalam graf tepat satu kali.
  Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (dua kali).

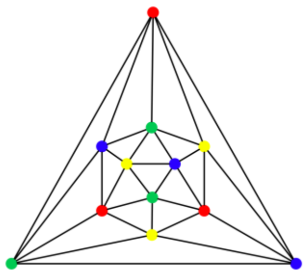
B. Pewarnaan Graf

1. Definisi Pewarnaan Graf

Pewarnaan Graf merupakan salah satu cara pelabelan graf dengan cara memberi warna sehingga tidak ada dua sisi, simpul, atau wilayah memiliki warna yang sama.

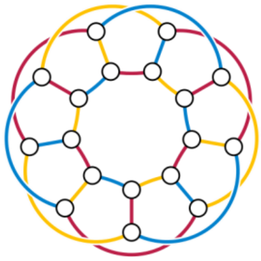
2. Jenis-jenis Pewarnaan Graf

Ada tiga jenis pewarnaan graf, yaitu:
- Pewarnaan simpul
  Pewarnaan simpul merupakan cara untuk memberikan warna pada simpul Graf tak-berarah sehingga tidak ada simpul yang bertetangga memiliki warna yang sama.



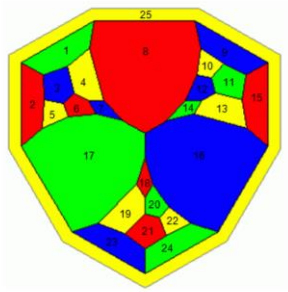
Gambar3. Pewarnaan simpul
Sumber: www.math.hmc.edu

- Pewarnaan sisi
  Pewarnaan sisi merupakan cara untuk memberikan warna pada sisi Graf tak-berarah sehingga tidak ada sisi yang bersisian memiliki warna yang sama.



Gambar4. Pewarnaan sisi
sumber: www.wikiwand.com

- Pewarnaan wilayah
  Pewarnaan wilayah merupakan cara untuk memberikan warna pada wilayah Graf tak-berarah sehingga tidak ada wilayah yang bertetangga memiliki warna yang sama.



Gambar5. Pewarnaan wilayah
sumber: 4coloring.wordpress.com

3. Cara Pewarnaan Graf

Salah satu cara pewarnaan simpul pada graf adalah dengan menggunakan *Sequential Coloring Algorithm.* Algoritma ini bergantung pada tingkat simpul kita. Cara kerja Algoritma *Sequential Coloring* :

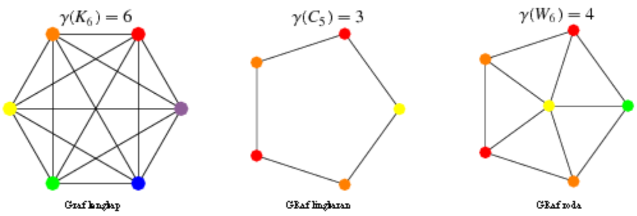
- Berilah angka pada warna yang akan digunakan, colUsed=0
- Berilah warna pada simpul pertama, i=0
- Cari node berikutnya yang akan diwarna, j=tingkat[i]
- Cari warna dari indeks warna yang telah diberikan dari 1 sampai colUsed yang memberikan warna yang legal pada simpul j
- Jika tidak ada warna yang legal maka naikkan indeks warna sebesar 1 (colUsed+1) dan warnai simpul tersebut dengan indeks warna yang baru
- Jika ditemukan warna yang legal maka warnai simpul dengan indeks warna pada tahap ke-empat
- Tambahkan i sebesar 1
- Lakukan tahap ketiga lagi jika i lebih kecil dari jumlah simpul

4. Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik adalah jumlah warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai simpul suatu graf. Bilangan kromatik disimbolkan dengan $\chi(G) = k$. Misalnya pada graf gambar5 memiliki $\chi(G) = 4$..

Beberapa sifat bilangan kromatik pada graf:

- Graf kosong N_n memiliki bilangan kromatik 1, karena semua simpul tidak terhubung
- Graf lengkap K_n memiliki bilangan kromatik $\chi(G) = n$ karena semua simpul saling terhubung
- Jika G ada graf dan H adalah upagraf dari G maka $\chi(G) >= \chi(H)$
- Untuk sembarang graf G maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, dengan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari suatu simpul di graf
- Bilangan kromatik untuk semua graf planar tidak lebih dari 4
- Graf bipartit mempunyai bilangan kromatik $\chi(G) = 2$, satu untuk simpul di himpunan V_1 dan satu lagi untuk simpul himpunan V_2
- Graf lingkaran dengan n ganjil memiliki $\chi(G) = 3$ sedngkan untuk n genap memiliki $\chi(G) = 2$
- Graf bintang memiliki bilangan kromatik $\chi(G) = 2$
- Graf roda memiliki $\chi(G) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi(G) = 4$ untuk n genap
- Sembarang pohon T meiliki $\chi(G) = 2$



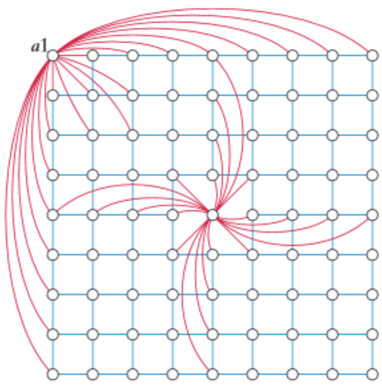
Gambar6. Bilangan kromatik graf
sumber: http://mathworld.wolfram.com

III. Penyelesaian Sudoku dengan Pewarnaan Graf

A. Sudoku 9×9

Untuk menyelesaikan sudoko 9×9 ubah Sudoku ke dalam graf yang berati ada 81 simpul. Karena setiap simpul dalam satu baris, kolom serta kotak kecil 3×3 yang sama tidak boleh memiliki angka yang sama maka gambarlah sisi yang memnghubungkan simpul-simpulnya.

Terakhir, kita akan mendapatkan derajat setiap simpul adalah 20 dan jumlah sisi adalah 810.



Gambar6. Sebagian Graf Sudoku
sumber: *Mini Excursion 2*

Ubah angka 1-9 menjadi warna seperti Gambar7.

Gambar7. Tabel warna
sumber: *Mini Excursion 2*

Setelah itu, ubah angka yang sudah tersedia pada soal Sudoku menjadi graf dan berilah warna sesuai Gambar7. Untuk menyelesaikannya, berilah warna pada Sudoku sesuai dengan Gambar7.

Langkah pengerjaan Sudoku 9×9 terbilang panjang. Untuk itu, makalah ini hanya membahas penyelesaian Sudoku 4×4.

B. Sudoku 4×4

Untuk menyelesaikan Sudoku 4×4 akan digunakan pewarnaan simpul dan sisi. Warna sisi untuk setiap adalah sama. Berikut adalah cara penyelesainnya:

- Ubah Sudoku ke dalam graf dan berilah warna
- Ambil simpul yang telah diwarnai dan berilah warna pada sisi yang menghubungkan simpul tersebut dengan simpul yang ada pada baris, kolom dan kotak kecil 2×2. Simpul yang telah terhubung dengan sisi tersebut tidak boleh diberi warna yang sama dengan sisi yang menghubungkannya
- Carilah simpul yang mengandung derajat paling tinggi atau simpul dimana dilalui paling banyak sisi berwarna
- Jika ditemukan simpul yang cuma bisa diwarnai satu warna (dilalui tiga sisi berbeda warna dalam sudoku 4×4), warnai simpul tersebut dengan warna yang tersisa. Lakukan pengulangan dari tahap pertama. Jika tidak ditemukan simpul yang bisa diwarnai satu warna saja, lanjut ke tahap berikutnya.
- Dari simpul-simpul yang telah dicari pada tahap 3, carilah simpul yang bertetangga paling banyak dengan simpul yang belum diwarnai. Berilah warna pada simpul tersebut dengan warna yang digunakan belum digunakan simpul tetangganya. Lakukan pengulangan dari tahap pertama.

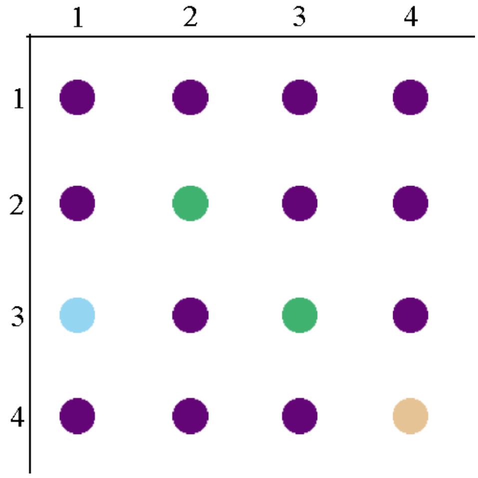
Sebagai contoh, diberikan Sudoku 4×4 seperti Gambar8.

	4		
2		4	
			3

Gambar8. Sudoku 4×4

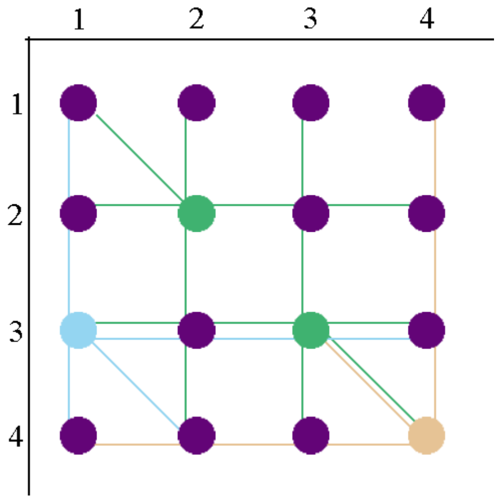
Untuk menyelesaikan Sudoku pada Gambar8 lakukan langkah-langkah penyelesaian yang sudah diberikan.

1. Ubah sudoku menjadi graf dan berilah warna sesuai Gambar7. Beri warna ungu untuk simpul kosong.



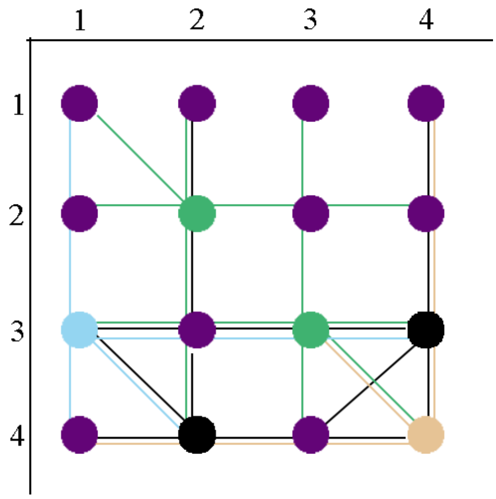
Gambar9. Graf Sudoku

2. Gambarlah sisi dari simpul yang telah diwarnai.



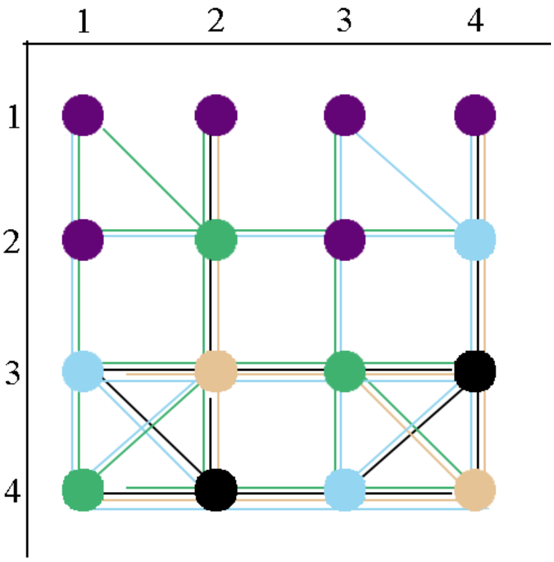
Gambar10. Graf dengan sisi

3. Simpul yang memiliki derajat 3 adalah simpul [2,4] dan [4,3]. Beri warna yang tersisa pada simpul tersebut.



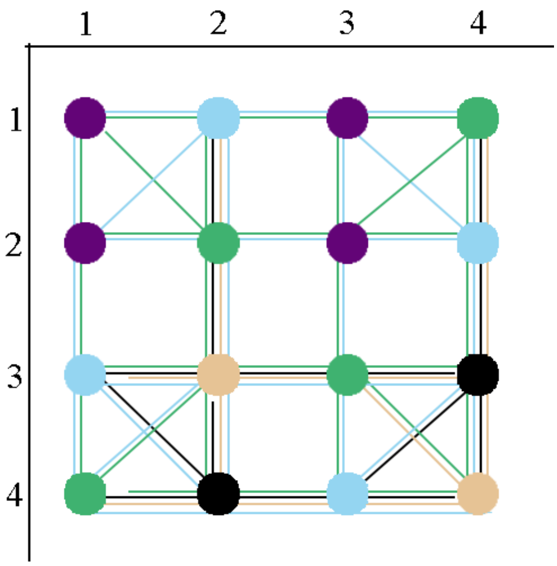
Gambar11. Pewarnaan simpul dan sisi

4. Cari lagi simpul yang dilalui tiga sisi berbeda warna, yaitu [2,3], [1,4], [3,4], dan [4,2]. Berikan warna yang tersisa pada simpul tersebut.



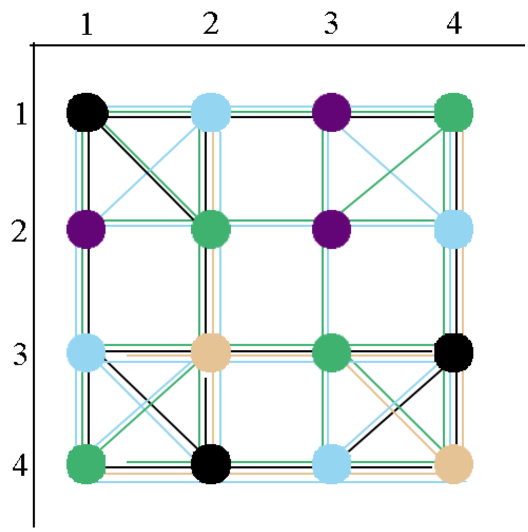
Gambar11. Pewarnaan simpul dan sisi

5. Cari simpul yang memiliki 3 atau lebih sisi yang berbeda warna yaitu: [2,1] dan [4,1]. Berikan warna yang tersisa pada simpul tersebut.



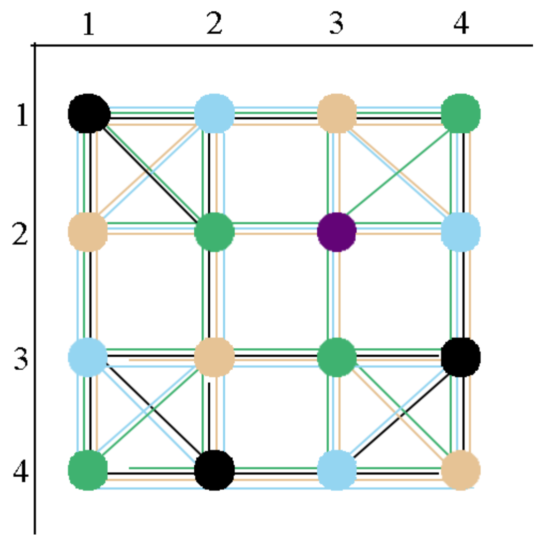
Gambar12. Pewarnaan simpul dan sisi

6. Dari Gambar12 tidak ada lagi simpul yang memiliki derajat 3. Maka, kita masuk langkah ke-empat pada cara di atas. Cari simpul yang didapat dari Gambar 12 yang memiliki derajat paling tinggi, yaitu [1,1], [1,2], [3,1], dan [3,2]. Dari ke-empat simpul tersebut cari simpul yang memiliki tetangga paling banyak dengan simpul yang belum diwarnai, yaitu simpul [1,1], [1,2], [3,1], dan [3,2]. Kita akan mengambil simpul [1,1] dan beri warna dengan indeks terkecil yaitu hitam.



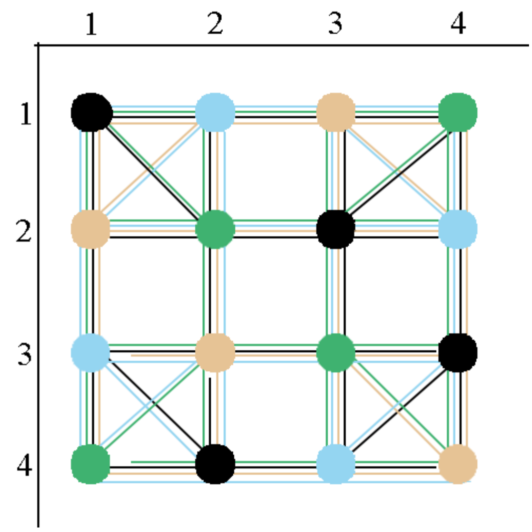
Gambar13. Simpul [1,1] warna hitam

7. Cari simpulnya lagi, yaitu [1,2] dan [3,1].



Gambar14. Pewarnaan simpul dan sisi

8. Tersisa satu simpul, yaitu [3,2].



Gambar15. Pewarnaan simpul dan sisi

9. Ubah warna pada simpul menjadi angka dengan menggunakan Gambar7. Sudoku 4×4 telah selesai.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Gambar 16. Jawaban sudoku

IV. KESIMPULAN

Penerapan teori graf dalam Sudoku memberikan kemudahan dalam menyelesaikannya. Apalagi penerapan warna dalam penyelesaian Sudoku bisa membuat masyarakat umum tertarik dalam permainan ini, khususnya anak-anak.

Kelemahan penyelesaian Sudoku dengan pewarnaan graf disebabkan oleh pewarnaan graf tergantung pada ukuran Sudoku, misalnya sudoku n×n memerlukan n warna, maka untuk menyelesaikan sudoku yang ukurannya lebih besar diperlukan usaha yang lebih besar. Hal ini disebabkan, banyak sisi yang harus dicari dan diwarnai untuk menyelesaikannya.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama penulis ingin mengucapkan puji syukur kepada Tuhan karena dengan bimbingannya penulis bisa menyelesaikan makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Dr. Ir. Rinaldi Munir atas bimbingan dan jasa beliau yang selama ini telah mengajar dan memberikan Tak lupa juga penulis berterima kasih atas teman-teman seperjuangan yang telah memberikan masukan kepada penulis.

REFERENCES

[1] Delahaye, Jean-Paul, "The Science Behind Sudoku", Scientific American magazine, June 2006

[2] Munir, Rinaldi, "Matematika Diskrit", Informatika, Bandung: 2010

[3] Tannenbaum , Peter. 2006. *Mini Excursion 2: A Touch of Color*, New Jersey: Prentice Hall Inc.

[4] https://community.topcoder.com/longcontest/?module=Static&d1=match_editorials&d2=intel_mtcs_10, diakses 8 Desember 2015

[5] http://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html, diakses 8 Desember 2015.

[6] http://math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp_2011/introGT/MC2011_intro_to_GT_wk1_day4.pdf, diakses 8 Desember 2015

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2015

Malvin Juanda/13514044