

Menyelesaikan *Kakuro Puzzle* dengan Kombinatorial

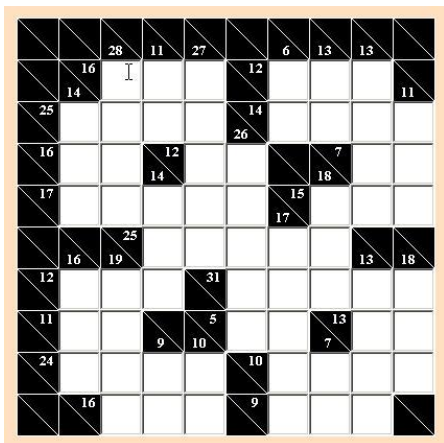
Muhammad Farhan Majid (13514029)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514029@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—Kombinatorial dalam implementasinya banyak digunakan untuk mencari jumlah kemungkinan tanpa harus melakukan enumerasi yang panjang. Salah satu penerapan kombinatorial adalah dalam mempelajari puzzle dan solusi untuk memecahkannya. Di antara banyak puzzle yang ada saat ini, *Kakuro puzzle* merupakan puzzle yang menarik dan mudah untuk dipelajari. Dengan kombinatorial, kita dapat menemukan algoritma pengerjaan yang paling efektif dalam menyelesaikan *Kakuro puzzle*.

KataKunci—*Kakuro Puzzle*, Kombinatorial, Kombinasi dengan Pengulangan, Matematika Diskrit

I. PENDAHULUAN

Sejarah mencatat bahwa ada banyak permainan *puzzle* yang telah diciptakan oleh manusia sampai saat ini. Istilah *puzzle* sendiri belum memiliki definisi formal karena sulitnya membuat sebuah definisi tanpa menambahkan pendapat-pendapat subjektif di dalamnya. Walaupun begitu, kita akan mengartikan *puzzle* sebagai permainan yang dimainkan satu orang yang mempunyai bermacam pendekatan untuk menyelesaikannya^[1]. Beberapa *puzzle* yang populer di antaranya adalah *Minesweeper*, *Tetris*, *Rubik's Cube*, dan *The Tower of Hanoi*. Meskipun pendekatan logika lebih lumrah digunakan dalam menyelesaikan *puzzle-puzzle* semacam ini, kita juga dapat menggunakan pendekatan matematis. Dalam tulisan ini, penulis akan mencoba untuk menjabarkan pendekatan matematis untuk menyelesaikan sebuah puzzle bernama *Kakuro puzzle* (atau dikenal juga sebagai *Cross Sum*).



Gambar 1.1 Sebuah *Kakuro puzzle* kosong^[2]

Inti dari *Kakuro puzzle* adalah pemain harus menemukan angka-angka antara 1-9 yang sesuai dengan *clue* (petunjuk) yang diberikan. Mengingat bahwa ada sejumlah kemungkinan jawaban yang bisa pemain berikan, kita dapat menggunakan pendekatan matematis dalam permasalahan ini. Salah satu bahasan dalam matematika, yakni **kombinatorial** penulis anggap bisa membantu pemain untuk dapat menyelesaikan *Kakuro puzzle*. Kombinatorial dalam permasalahan ini akan digunakan untuk mencari algoritma yang paling efektif untuk menemukan jawaban yang benar.

II. KOMBINATORIAL

Kombinatorial (*combinatoric*) adalah cabang dari bidang matematika diskrit yang mempelajari pengaturan objek-objek diskrit. Kombinatorial digunakan untuk mencari jumlah kemungkinan cara mengatur beberapa objek berdasarkan kondisi yang diberikan. Kombinatorial memungkinkan kita untuk mengetahui jumlah cara pengaturan objek-objek tersebut tanpa harus menghitung satu persatu setiap kemungkinan jawaban. Salah satu prinsip penting yang berkaitan dengan kombinatorial adalah **kombinasi**^[3].

A. Kombinasi

Kombinasi adalah jumlah cara mengatur objek-objek dari kumpulan objek tanpa memperhitungkan urutan kemunculan objek tersebut pada kemungkinan pengaturan. Kombinasi merupakan bentuk khusus dari permutasi. Permutasi merupakan jumlah cara mengatur objek-objek dengan memperhitungkan urutan kemunculan objek. Kombinasi r dari n buah elemen (dilambangkan dengan $C(n, r)$) dirumuskan sebagai

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!} \quad (1.1)$$

Misalkan, pada pemilihan 3 huruf dari 5 huruf a, b, c, d , dan e . Kita dapat menganalogikan 3 huruf yang dipilih sebagai r buah kotak dan 5 huruf yang tersedia sebagai n buah bola. Karena urutan kemunculan huruf tidak diperhitungkan, maka kemungkinan abc, acb, bac, bca, cab , dan cba dianggap sama. Dengan demikian, cara

pemilihan 3 huruf dari 5 huruf $a, b, c, d,$ dan e adalah

$$C(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10 \text{ cara}$$

B. Kombinasi dengan Pengulangan

Pada permasalahan kombinasi sederhana, pengaturan r dari n buah elemen bisa dianalogikan dengan memasukkan r buah bola ke dalam n buah kotak, dengan masing-masing kotak hanya dapat berisi maksimal 1 buah bola. Asumsi inilah yang digunakan pada persamaan 1.1.

Pada beberapa permasalahan, dimungkinkan untuk sebuah kotak untuk berisi lebih dari 1 buah bola. Perumusan kombinasi yang membolehkan pengulangan elemen ini dirumuskan sebagai

$$C(n+r-1, r) \quad (1.3)$$

Misalkan, pada percobaan melempar 4 buah dadu secara bersamaan, berapakah banyak hasil berbeda yang mungkin?

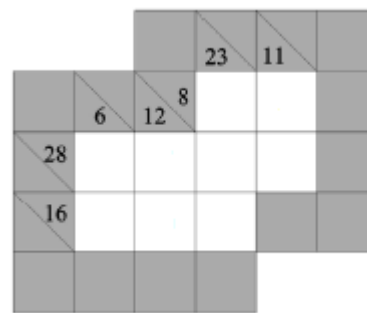
Kita dapat menyelesaikannya dengan menganalogikan 6 buah kemungkinan hasil pelemparan dadu, yakni muka dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 sebagai 6 kotak dan 4 dadu yang dilempar sebagai 4 buah bola. Setiap kotak diperbolehkan untuk berisi lebih dari 1 bola, yang artinya ada dadu yang bernilai sama. Dengan cara ini kita peroleh $n = 6$ dan $r = 4$, dan jumlah kemungkinan hasil sebanyak

$$\begin{aligned} C(n+r-1, r) &= C(6+4-1, 4) \\ &= C(9, 4) \\ &= 126 \text{ buah} \end{aligned}$$

III. KAKURO PUZZLE

Kakuro merupakan singkatan yang diambil dari bahasa Jepang, yakni *kasan kurosu* (加算クロス, *addition cross*). Tidak ada sumber pasti yang dapat menjelaskan kapan *Kakuro puzzle* diciptakan atau siapa pencipta dari permainan ini. *Kakuro puzzle* sendiri sebenarnya banyak dijumpai di media cetak di Amerika Serikat pada tahun 1960-an^[1].

Kakuro puzzle adalah permainan yang dimainkan pada papan permainan yang berisi sekumpulan persegi berwarna putih atau hitam. Gambar 1.2(a) menunjukkan papan permainan *Kakuro puzzle* yang masih kosong.



(a)



(b)

Gambar 1.2 (a) Contoh sebuah *Kakuro puzzle*^[4]
(b) *Kakuro puzzle* yang telah ditandai^[4]

Untuk dapat menyelesaikan *puzzle* ini, pemain harus mengisikan angka antara 1 – 9 pada kotak berwarna putih, dengan beberapa ketentuan, yakni:

1. Jumlah semua angka pada sebuah *run* harus sama dengan nilai *clue*. *Run* didefinisikan sebagai kumpulan kotak-kotak putih yang bersebelahan secara horizontal atau secara vertikal (salah satu saja). Pada gambar 1.1(b), terdapat tiga *run* horizontal, yaitu *a-b*, *c-d-e-f*, dan *g-h-i*, dan empat *run* vertikal, yaitu *c-g*, *d-h*, *a-e-i*, dan *b-f*. Sedangkan yang dimaksud dengan *clue* adalah angka yang tertera pada kotak hitam di sebelah kiri atau atas sebuah *run*. Pada gambar 1.1(b), *clue* untuk *run c-d-e-f* adalah 28 dan *clue* untuk *run b-f* adalah 11. Sebuah kotak hitam dapat berisi lebih dari 1 *clue*. Pada gambar dicontohkan bahwa 12 merupakan *clue* untuk *run d-h* dan 8 merupakan *clue* untuk *run a-b*.
2. Setiap *run* tidak boleh berisi kotak dengan angka yang sama.

IV. PENERAPAN KOMBINATORIAL DALAM MENYELESAIKAN KAKURO PUZZLE

Dalam penerapannya, kombinatorial digunakan untuk mencari algoritma pemeriksaan *run* yang paling efektif. Untuk lebih jelasnya, misalkan diberikan sebuah *Kakuro Puzzle* seperti pada gambar 1.3.



Gambar 1.3 Contoh sebuah *Kakuro puzzle* ^[4]

Secara intuitif, mungkin kita akan memulai mengerjakan *puzzle* ini dari *run g-h* (selanjutnya akan ditulis sebagai (gh)), yang hanya memiliki 2 kemungkinan jawaban, yakni $g = 1$ dan $h = 2$, atau $g = 2$ dan $h = 1$. Dari kemungkinan ini, kita akan mencari kemungkinan jawaban dari *run-run* lain di sekelilingnya.

Kemungkinan-kemungkinan inilah yang dapat kita formalisasikan menggunakan prinsip kombinatorial untuk mendapatkan algoritma pengerjaan yang paling efektif.

Sekarang, kita akan mencoba menyelesaikan *Kakuro puzzle* pada gambar 1.3 menggunakan pendekatan kombinatorial.

Pada awal pengerjaan, kita mempunyai 7 *run*, yakni (ab) , $(cdef)$, (gh) , (cg) , (dh) , (ae) , dan (bf) . Kita akan mencari tahu jumlah kemungkinan jawaban untuk setiap *run* yang ada dengan menggunakan prinsip kombinasi dengan pengulangan.

Kita ambil *run* (ab) sebagai contoh pertama. *Run* (ab) memiliki *clue* = 12. Maka, diperoleh

$$a + b = 12 \quad (4.1)$$

Karena setiap kotak hanya bisa diisi angka 1 – 9, maka diperoleh pula

$$1 \leq a \leq 9 \quad (4.2)$$

$$1 \leq b \leq 9 \quad (4.3)$$

Dengan menganalogikan *clue* sebagai jumlah bola yang akan dimasukkan ke dalam kotak a dan b , kita dapat menggunakan prinsip kombinasi dengan pengulangan. Karena kotak a dan b minimal berisi 1 buah “bola”, maka kita masukkan terlebih dahulu 1 bola ke dalam masing-masing kotak. Sekarang bola yang tersisa adalah $12 - 1 - 1 = 10$ buah. Kemudian, kita akan membagikan, masing-masing bola ke dalam kotak a dan b . Kemungkinan cara memasukkan bola adalah:

$$\begin{aligned} C(n + r - 1, r) &= C(2 + 10 - 1, 10) \\ &= C(11, 10) \\ &= 11 \text{ cara} \end{aligned}$$

Akan tetapi, dari 11 cara tersebut, masih dimungkinkan adanya kotak yang berisi lebih dari 9 bola. Berdasarkan persamaan 4.2 dan 4.3, kita tidak boleh membiarkan hal itu terjadi. Maka, untuk mengeluarkan kemungkinan tersebut, kita mencari kemungkinan untuk $a \geq 10$ dan $b \geq 10$.

Untuk $a \geq 10$, pertama kita memasukkan 10 bola ke

dalam kotak a dan 1 bola ke dalam kotak b . Sekarang, bola yang tersisa adalah $12 - 10 - 1 = 1$ buah. Kemudian, kita akan membagi bola yang tersisa ke dalam kotak a dan b . Kemungkinan cara memasukkan bola adalah:

$$\begin{aligned} C(n + r - 1, r) &= C(2 + 1 - 1, 1) \\ &= C(2, 1) \\ &= 2 \text{ cara} \end{aligned}$$

Demikian pula jika $b \geq 10$ kita memperoleh 2 cara untuk memasukkan bola ke dalam kotak.

Dengan demikian, kemungkinan cara memasukkan bola (mengisikan angka) yang valid adalah $11 - 2 - 2 = 7$ cara. Dengan cara enumerasi, kita peroleh bahwa kemungkinan tersebut adalah seperti yang terlihat di tabel I.

Kemungkinan	a	b
1	3	9
2	4	8
3	5	7
4	6	6
5	7	5
6	8	4
7	9	3

Tabel I Kemungkinan jawaban kotak a dan b

Jika kita cermati, maka 4 kemungkinan yang dihapus sebelumnya adalah jika a atau b bernilai 10 atau 11. [□]

Pada kasus lain, misalnya *run* (dh) , kita akan menemukan cara pengerjaan yang sedikit berbeda.

Diketahui *clue* (dh) adalah 11. Maka, diperoleh

$$d + h = 11 \quad (4.4)$$

Berdasarkan ketentuan permainan, kotak hanya dapat diisi oleh angka 1-9. Maka, kita akan memprediksi persamaan seperti 4.2 dan 4.3 pada run ini. Akan tetapi, diketahui pula bahwa *run* (gh) memiliki *clue* = 3. Maka, nilai h hanya mungkin bernilai 1 atau 2. Sehingga diperoleh

$$1 \leq d \leq 9 \quad (4.5)$$

$$1 \leq h \leq 2 \quad (4.6)$$

Karena h hanya memiliki 2 kemungkinan nilai, otomatis d juga hanya memiliki 2 kemungkinan nilai, yakni $d = 10$, untuk $h = 1$, atau $d = 9$, untuk $h = 2$. Karena d tidak mungkin bernilai 10, maka pasti nilai 9 yang benar. Dengan demikian, kita memperoleh 2 nilai pertama kita, yakni $d = 9$ dan $h = 2$.

Formalisasi dari penyelesaian tersebut adalah dengan cara mencari kemungkinan untuk $h = 1$ dan $h = 2$, yakni 1. Jika $h = 1$, maka

$$\begin{aligned} C(n + r - 1, r) &= C(9 + 1 - 1, 9) \\ &= C(9, 9) \\ &= 1 \text{ cara} \end{aligned}$$

dan menghapus kemungkinan $d \geq 10$

$$\begin{aligned}
C(n+r-1, r) &= C(0+1-1, 0) \\
&= C(0, 0) \\
&= 1 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Maka, jika $h = 1$ jumlah kemungkinan cara pengisian = $1 - 1 = 0$ cara.

2. Jika $h = 2$, maka

$$\begin{aligned}
C(n+r-1, r) &= C(8+1-1, 8) \\
&= C(8, 8) \\
&= 1 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, hanya ada 1 kemungkinan yang valid untuk mengisi kotak d dan h , yakni $d = 9$ dan $h = 2$. Setelah memperoleh nilai d dan h , dapat diperoleh nilai c dan g , yakni $c = 6$ dan $g = 1$.

Papan permainan *Kakuro puzzle* saat ini dapat dilihat pada gambar 1.4.



Gambar 1.4 Jawaban sementara *Kakuro puzzle* [4]

Sejauh ini, kita dapat membuat kesimpulan sementara bahwa langkah yang sebaiknya dilakukan adalah memilih *run* dengan kemungkinan terkecil, yakni *run* yang mengandung kotak g dan h karena *clue*-nya bernilai 3. Berdasarkan kesimpulan tersebut, maka ada 3 *run* yang seharusnya diperiksa terlebih dahulu, yakni (gh) , (cg) , dan (dh) . Akan tetapi, hanya (dh) yang langsung menghasilkan 1 kemungkinan jawaban. *Run* lainnya ((gh) dan (cg)) menghasilkan masing-masing 2 kemungkinan jawaban. Kita berasumsi bahwa nilai *clue* (dh) -lah yang menyebabkan (dh) memiliki kemungkinan tunggal. Jadi, kesimpulan yang kita dapatkan sekarang menyarankan kita untuk memeriksa *run* dengan *clue* tertinggi dan mengandung kotak dengan kemungkinan terkecil. □

Sekarang, untuk menyelesaikan *puzzle* ini, kita masih harus menemukan nilai untuk a , b , e , dan f . Ada hal yang sebelumnya perlu dicermati sebelum kita melanjutkan penyelesaian, yakni karena *run* $(cdef)$ telah terisi sebagian, maka kita dapat mendefinisikan *run* “baru” (ef) dengan *clue* $30 - 6 - 9 = 15$. Hal yang perlu diperhatikan juga adalah bahwa tidak boleh ada kotak yang berisi angka yang sama di dalam sebuah *run*, maka kita peroleh

$$e + f = 15 \quad (4.7)$$

$$1 \leq e \leq 9; e \neq 6; e \neq 9 \quad (4.8)$$

$$1 \leq f \leq 9; f \neq 6; f \neq 9 \quad (4.9)$$

Berdasarkan, kesimpulan yang kita dapatkan sebelumnya, kita akan memeriksa *run* dengan *clue*

tertinggi dan mengandung kotak dengan kemungkinan terkecil. Maka, kita memilih *run* (bf) yang memiliki *clue* tertinggi, yakni 17.

Informasi yang kita ketahui tentang (bf) antara lain

$$b + f = 17 \quad (4.10)$$

$$1 \leq b \leq 9 \quad (4.11)$$

$$1 \leq f \leq 9; f \neq 6; f \neq 9 \quad (4.12)$$

Dengan menggunakan prinsip kombinasi dengan pengulangan, kita memasukkan masing-masing 1 bola ke dalam kotak b dan f , sehingga bola yang tersisa sekarang $17 - 1 - 1 = 15$ buah. Dengan kombinasi kita peroleh

$$\begin{aligned}
C(n+r-1, r) &= C(2+15-1, 15) \\
&= C(16, 15) \\
&= 16 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Karena masih ada kemungkinan bahwa kotak b atau f berisi lebih dari 9 bola, maka kita harus membuang kemungkinan itu terlebih dahulu. Jumlah kemungkinan kotak b berisi lebih dari 9 bola adalah

$$\begin{aligned}
C(n+r-1, r) &= C(2+6-1, 6) \\
&= C(7, 6) \\
&= 7 \text{ cara}
\end{aligned}$$

Maka, kemungkinan kotak f berisi lebih dari 9 bola juga ada 7.

Dengan demikian, kemungkinan pengisian nilai yang valid ada $16 - 7 - 7 = 2$ cara. Tidak sulit untuk menebak kedua kemungkinan tersebut, yakni $b = 9$ dan $f = 8$, atau sebaliknya. Akan tetapi, berdasarkan persamaan 4.12, f tidak boleh bernilai 9. Jadi, kemungkinan yang tersisa adalah $b = 9$ dan $f = 8$.

Maka, kita dapat dengan mudah memperoleh nilai kotak yang tersisa, yakni $a = 3$ dan $e = 7$. Kita peroleh papan *Kakuro puzzle* yang telah terisi semua pada gambar 1.5. □



Gambar 1.5 Jawaban akhir *Kakuro puzzle* [4]

Pada langkah terakhir, jika kita memeriksa *run* (ae) maka kita akan memperoleh 9 kemungkinan, sedangkan jika kita memeriksa *run* (ef) maka kita akan memperoleh 4 kemungkinan. Kita membuat keputusan yang tepat dengan memeriksa *run* (bf) terlebih dahulu. Meskipun begitu, hal ini tidak dapat membuktikan kesimpulan yang kita ajukan seluruhnya.

Ada beberapa hal yang sebaiknya diperhatikan, salah satunya bahwa sejauh ini kita hanya memeriksa *run* dengan

2 kotak. Ada baiknya digunakan cara pengerjaan yang berbeda untuk *run* dengan lebih dari 2 kotak. Hal lain yang perlu diperhatikan adalah bahwa *Kakuro puzzle* hanya memperbolehkan angka 1-9 sebagai jawaban. Hal inilah yang menjadi alasan penulis untuk memilih *run* dengan *clue* tertinggi agar diperiksa terlebih dahulu.

V. KESIMPULAN

Matematika diskrit, khususnya kombinatorial memiliki banyak penerapan di dalam kehidupan sehari-hari. *Kanoku puzzle* yang biasanya menjadi permainan pengisi waktu luang ternyata dapat digali lebih dalam menggunakan prinsip-prinsip kombinatorial. Salah satunya adalah menemukan metode yang paling efektif untuk menyelesaikan *puzzle* ini.

Salah satu metode yang penulis ajukan untuk melakukannya adalah dengan memeriksa *run* dengan nilai *clue* tertinggi. Meskipun contoh yang penulis gunakan mendukung metode tersebut, masih banyak kemungkinan lain yang mungkin penulis lewatkan dan bisa dilanjutkan dan diperbaiki pada penelitian-penelitian selanjutnya.

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya pembuatan tulisan ini. Tidak lupa, penulis berterima kasih kepada dosen mata kuliah IF2120 Matematika Diskrit, yakni Dr. Ir. Rinaldi Munir, MT. dan Dra. Harlili S., M.Sc. yang telah memberikan materi dan bimbingan, baik di dalam maupun di luar kelas, yang bermanfaat dalam pembuatan tulisan ini.

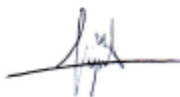
REFERENSI

- [1] Timmerman, Charles (2006). *The Everything Kakuro Challenge Book*. Avon, Mass: Adams Media. p. ix.
- [2] <http://centronsoftware.com/kakuro.htm>. Diakses tanggal 10 Desember 2015.
- [3] Munir, Rinaldi (2005). *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Penerbit ITB, ch. 6.
- [4] Ecke, Volker (2015) *Discovering the Art of Mathematics Games and Puzzles*. <http://www.artofmathematics.org/> Diakses tanggal 10 Desember 2015.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2015



Muhammad Farhan Majid (13514029)