Kompleksitas Algoritma

Bahan Kuliah

IF2120 Matematika Disktit

```
for (i = 1; i <= n, i++)   {
    for (j =1; j <= n; j++) {
        for (k =1; k <= j; k++) {
            p = p * 20 * z;
        }
    }
}
```

Pendahuluan

- Sebuah masalah dapat mempunyai banyak algoritma penyelesaian. Contoh: masalah pengurutan (*sort*), ada puluhan algoritma pengurutan

- Sebuah algoritma tidak saja harus benar, tetapi juga harus mangkus (*efisien*).

- Algoritma yang bagus adalah algoritma yang mangkus (*efficient*).

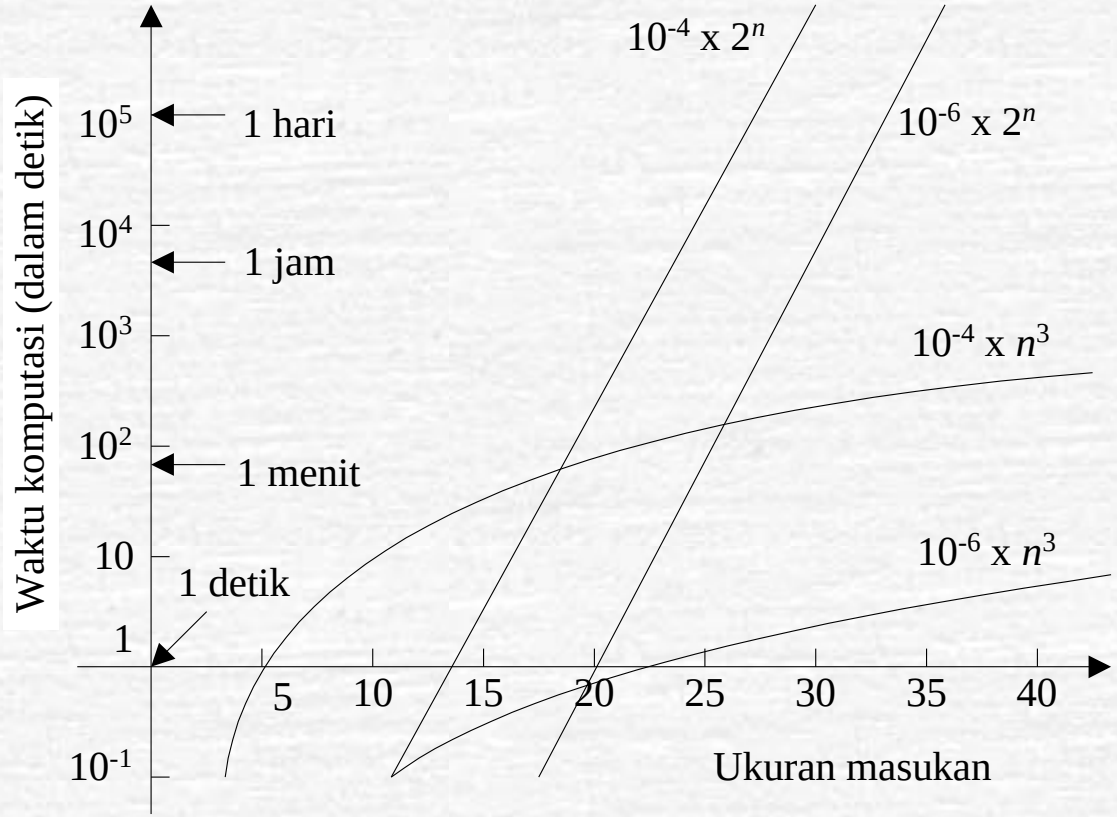
- Kemangkusan algoritma diukur dari waktu (*time*) eksekusi algoritma dan kebutuhan ruang (*space*) memori.

- Algoritma yang mangkus ialah algoritma yang meminimumkan kebutuhan waktu dan ruang.

- Kebutuhan waktu dan ruang suatu algoritma bergantung pada ukuran masukan (*n*), yang menyatakan jumlah data yang diproses.

- Kemangkusan algoritma dapat digunakan untuk menilai algoritma yang bagus dari sejumlah algoritma penyelesaian masalah.

- Mengapa kita memerlukan algoritma yang mangkus? Lihat grafik di bawah ini.



Model Perhitungan Kebutuhan Waktu

- Menghitung kebutuhan waktu algoritma dengan mengukur waktu sesungguhnya (dalam satuan detik) ketika algoritma dieksekusi oleh komputer bukan cara yang tepat.

- Alasan:

  1. Setiap komputer dengan arsitektur berbeda mempunyai bahasa mesin yang berbeda → waktu setiap operasi antara satu komputer dengan komputer lain tidak sama.

  2. *Compiler* bahasa pemrograman yang berbeda menghasilkan kode mesin yang berbeda → waktu setiap operasi antara compiler dengan compiler lain tidak sama.

- Model abstrak pengukuran waktu/ruang harus independen dari pertimbangan mesin dan *compiler* apapun.

- Besaran yang dipakai untuk menerangkan model abstrak pengukuran waktu/ruang ini adalah **kompleksitas algoritma**.

- Ada dua macam kompleksitas algoritma, yaitu: **kompleksitas waktu** dan **kompleksitas ruang**.

- Kompleksitas waktu, $T(n)$, diukur dari jumlah tahapan komputasi yang dibutuhkan untuk menjalankan algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan n.

- Kompleksitas ruang, $S(n)$, diukur dari memori yang digunakan oleh struktur data yang terdapat di dalam algoritma sebagai fungsi dari ukuran masukan n.

- Dengan menggunakan besaran kompleksitas waktu/ruang algoritma, kita dapat menentukan *laju* peningkatan waktu (ruang) yang diperlukan algoritma dengan meningkatnya ukuran masukan n.

- Ukuran masukan (*n*): jumlah data yang diproses oleh sebuah algoritma.

- Contoh: algoritma pengurutan 1000 elemen larik, maka $n = 1000$.

- Contoh: algoritma *TSP* pada sebuah graf lengkap dengan 100 simpul, maka $n = 100$.

- Contoh: algoritma perkalian 2 buah matriks berukuran 50 x 50, maka $n = 50$.

- Dalam praktek perhitungan kompleksitas, ukuran masukan dinyatakan sebagai variabel *n* saja.

Kompleksitas Waktu

- Jumlah tahapan komputasi dihitung dari berapa kali suatu operasi dilaksanakan di dalam sebuah algoritma sebagai fungsi ukuran masukan (n)..

- Di dalam sebuah algoritma terdapat bermacam jenis operasi:
  - Operasi baca/tulis
  - Operasi aritmetika (+, -, *, /)
  - Operasi pengisian nilai (*assignment*)
  - Operasi pengakasesan elemen larik
  - Operasi pemanggilan fungsi/prosedur
  - dll

- Dalam praktek, kita hanya menghitung jumlah operasi khas (tipikal) yang *mendasari* suatu algoritma.

Contoh operasi khas di dalam algoritma

- Algoritma pencarian di dalam larik
  Operasi khas: perbandingan elemen larik

- Algoritma pengurutan
  Operasi khas: perbandingan elemen, pertukaran elemen

- Algoritma penjumlahan 2 buah matriks
  Operasi khas: penjumlahan

- Algoritma perkalian 2 buah matriks
  Operasi khas: perkalian dan penjumlahan

- **Contoh 1.** Tinjau algoritma menghitung rerata sebuah larik (*array*).

```
sum ←0
for i ← 1 to n do
    sum ← sum + a[i]
endfor
rata_rata ← sum/n
```

- Operasi yang mendasar pada algoritma tersebut adalah operasi penjumlahan elemen-elemen a_i (yaitu `sum←sum+a[i]`) yang dilakukan sebanyak *n* kali.

- Kompleksitas waktu: $T(n) = n$.

Contoh 2. Algoritma untuk mencari elemen terbesar di dalam sebuah larik (*array*) yang berukuran *n* elemen.

```
procedure CariElemenTerbesar(input a1, a2, ..., an : integer, output
maks : integer)
{ Mencari elemen terbesar dari sekumpulan elemen larik integer a1, a2,
..., an.
  Elemen terbesar akan disimpan di dalam maks.
  Masukan: a1, a2, ..., an
  Keluaran: maks (nilai terbesar)
}
Deklarasi
   k : integer

Algoritma
   maks←a1
   k←2
   while k ≤ n do
     if ak > maks then
        maks←ak
     endif
     i←i+1
   endwhile
   { k > n }
```

Kompleksitas waktu algoritma dihitung berdasarkan jumlah operasi perbandingan elemen larik (`A[i] > maks`).

Kompleksitas waktu `CariElemenTerbesar` : $T(n) = n - 1$.

Kompleksitas waktu dibedakan atas tiga macam :

1. $T_{max}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus terburuk *(worst case)*,
   → kebutuhan waktu maksimum.

2. $T_{min}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus terbaik *(best case)*,
   → kebutuhan waktu minimum.

3. $T_{avg}(n)$: kompleksitas waktu untuk kasus rata-rata *(average case)*
   → kebutuhan waktu secara rata-rata

Contoh 3. Algoritma *sequential search*.

```
procedure PencarianBeruntun(input a1, a2, ..., an : integer, x : integer,
                            output idx : integer)
Deklarasi
  k : integer
  ketemu : boolean    { bernilai true jika x ditemukan atau false jika x
tidak ditemukan }

Algoritma:
  k←1
  ketemu ← false
  while (k ≤ n) and (not ketemu) do
    if ak = x then
      ketemu←true
    else
      k ← k + 1
    endif
  endwhile
  { k > n or ketemu }

  if ketemu then    { x ditemukan }
     idx←k
  else
     idx← 0         { x tidak ditemukan }
  endif
```

Jumlah operasi perbandingan elemen tabel:

1. *Kasus terbaik*: ini terjadi bila $a_1 = x$.

$$T_{\min}(n) = 1$$

2. *Kasus terburuk*: bila $a_n = x$ atau x tidak ditemukan.

$$T_{\max}(n) = n$$

3. *Kasus rata-rata*: Jika x ditemukan pada posisi ke-j, maka operasi perbandingan (`a[k] = x`) akan dieksekusi sebanyak j kali.

$$T_{\text{avg}}(n) = \frac{(1+2+3+...+n)}{n} = \frac{\frac{1}{2}n(1+n)}{n} = \frac{(n+1)}{2}$$

Cara lain: asumsikan bahwa $P(a_j = x) = 1/n$. Jika $a_j = x$ maka T_j yang dibutuhkan adalah $T_j = j$. Jumlah perbandingan elemen larik rata-rata:

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{j=1}^{n} T_j P(A[j] = X) = \sum_{j=1}^{n} T_j \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T_j$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n+1}{2}$$

Contoh 4. Algoritma pencarian biner (*bynary search*).

```
procedure PencarianBiner(input a1, a2, ..., an : integer, x : integer,
                         output idx : integer)
Deklarasi
   i, j, mid : integer
   ketemu : boolean

Algoritma
   i←1
   j←n
   ketemu←false
   while (not ketemu) and ( i ≤ j) do
      mid ← (i+j) div 2
      if amid = x then
        ketemu ← true
      else
         if amid < x then     { cari di belahan kanan }
          i←mid + 1
         else                 { cari di belahan kiri }
          j←mid - 1;
         endif
      endif
   endwhile
   {ketemu or i > j }

   if ketemu then
      idx←mid
   else
      idx←0
   endif
```

1. *Kasus terbaik*

$T_{\min}(n) = 1$

2. *Kasus terburuk*:

$T_{\max}(n) = {}^{2}\log n + 1$

Contoh 5. Algoritma pengurutan seleksi (*selection sort*).

```
procedure Urut(input/output a1, a2, ..., an : integer)
Deklarasi
   i, j, imaks, temp : integer

Algoritma
  for i←n downto 2 do    { pass sebanyak n - 1 kali }
    imaks←1
    for j←2 to i do
      if aj > aimaks then
         imaks←j
      endif
    endfor
    { pertukarkan aimaks dengan ai }
    temp←ai
    ai←aimaks
    aimaks←temp

  endfor
```

(i) Jumlah operasi perbandingan elemen

Untuk setiap *pass* ke-i,

$i = n \rightarrow$ jumlah perbandingan $= n - 1$

$i = n - 1 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= n - 2$

$i = n - 2 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= n - 3$

$\vdots$

$i = 2 \rightarrow$ jumlah perbandingan $= 1$

Jumlah seluruh operasi perbandingan elemen-elemen larik adalah

$$T(n) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} n - k = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ini adalah kompleksitas waktu untuk kasus terbaik dan terburuk, karena algoritma `Urut` tidak bergantung pada batasan apakah data masukannya sudah terurut atau acak.

(ii) Jumlah operasi pertukaran

Untuk setiap i dari 1 sampai $n - 1$, terjadi satu kali pertukaran elemen, sehingga jumlah operasi pertukaran seluruhnya adalah

$$T(n) = n - 1.$$

Jadi, algoritma pengurutan seleksi membutuhkan $n(n - 1)/2$ buah operasi perbandingan elemen dan $n - 1$ buah operasi pertukaran.

Latihan

- **Contoh 6.** Hitung kompleksitas waktu algoritma berikut berdasarkan jumlah operasi kali.

```
procedure Kali(input x:integer, n:integer, output jumlah : integer)
{Mengalikan x dengan i = 1, 2, …, j, yang dalam hal ini j = n, n/2, n/4, …,1
  Masukan: x dan n (n adalah perpangakatan dua).
  Keluaran: hasil perkalian (disimpan di dalam peubah jumlah).
}
Deklarasi
   i, j, k : integer

Algoritma
   j ← n
   while  j ≥ 1 do
     for i ← 1 to j do
       x ← x * i
     endfor
     j ← d div 2
   endwhile
   { j > 1 }
   jumlah←x
```

Jawaban

- Untuk

  $j = n$, jumlah operasi perkalian = n

  $j = n/2$, jumlah operasi perkalian = $n/2$

  $j = n/4$, jumlah operasi perkalian = $n/4$

  ...

  $j = 1$, jumlah operasi perkalian = 1

  Jumlah operasi perkalian seluruhnya adalah

  $= n + n/2 + n/4 + \ldots + 2 + 1$ → deret geometri

$$= \frac{n(1-2^{{}^2\log n^{-1}})}{1-\frac{1}{2}} = 2(n-1)$$

Kompleksitas Waktu Asimptotik

- Tinjau $T(n) = 2n^2 + 6n + 1$

Perbandingan pertumbuhan $T(n)$ dengan n^2

n	$T(n) = 2n^2 + 6n + 1$	n^2
10	261	100
100	2061	1000
1000	2.006.001	1.000.000
10.000	2.000.060.001	1.000.000.000

- Untuk n yang besar, pertumbuhan $T(n)$ sebanding dengan n^2. Pada kasus ini, $T(n)$ tumbuh seperti n^2 tumbuh.

- $T(n)$ tumbuh seperti n^2 tumbuh saat n bertambah. Kita katakan bahwa $T(n)$ berorde n^2 dan kita tuliskan

$$T(n) = O(n^2)$$

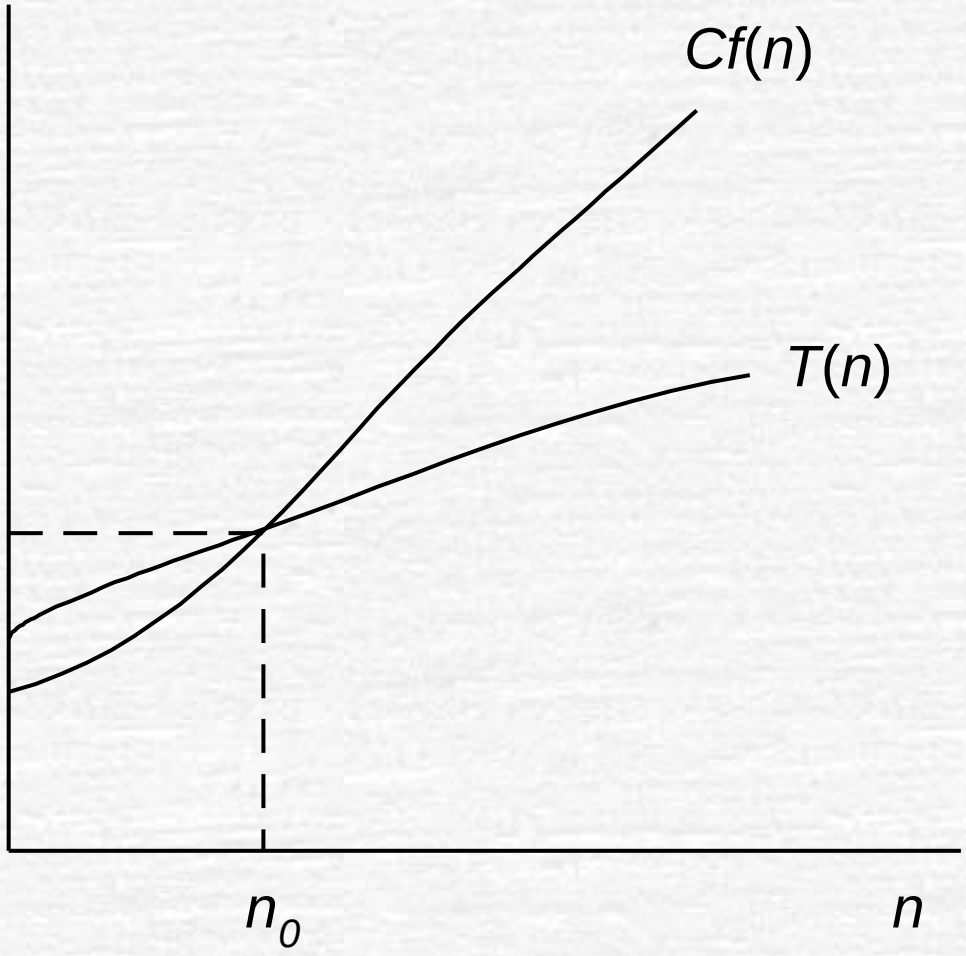
Notasi "*O*" disebut notasi "*O*-Besar" (*Big-O*) yang merupakan notasi **kompleksitas waktu asimptotik**.

DEFINISI. $T(n) = O(f(n))$ (dibaca "$T(n)$ adalah $O(f(n)$" yang artinya *T(n) berorde paling besar f(n)*) bila terdapat konstanta C dan n_0 sedemikian sehingga

$$T(n) \leq C(f(n))$$

untuk $n \geq n_0$.

$f(n)$ adalah batas lebih atas (*upper bound*) dari $T(n)$ untuk n yang besar.


Cf(n)
T(n)
n0
n

Contoh 7. Tunjukkan bahwa $T(n) = 2n^2 + 6n + 1 = O(n^2)$.

Penyelesaian:

$2n^2 + 6n + 1 = O(n^2)$

karena

$2n^2 + 6n + 1 \leq 2n^2 + 6n^2 + n^2 = 9n^2$ untuk semua $n \geq 1$ (C =9 dan $n_0 = 1$).

atau karena

$2n^2 + 6n + 1 \leq n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2$ untuk semua $n \geq 6$ (C =3 dan $n_0 = 6$).

Contoh 8. Tunjukkan bahwa $T(n) = 3n + 2 = O(n)$.

Penyelesaian:

$3n + 2 = O(n)$

karena

$3n + 2 \leq 3n + 2n = 5n$ untuk semua $n \geq 1$ ($C = 5$ dan $n_0 = 1$).

Contoh-contoh Lain

1. Tunjukkan bahwa $T(n) = 5 = O(1)$.

- Penyelesaian:
- $5 = O(1)$ karena $5 \leq 6.1$ untuk $n \geq 1$.
  ($C = 6$ dan $n_0 = 1$)
- Kita juga dapat memperlihatkan bahwa
  $5 = O(1)$ karena $5 \leq 10 \cdot 1$ untuk $n \geq 1$

2. Tunjukkan bahwa kompleksitas waktu algoritma pengurutan seleksi (*selection sort*) adalah $T(n) = n(n-1)/2 = O(n^2)$.

- Penyelesaian:
- $n(n-1)/2 = O(n^2)$ karena

  $n(n-1)/2 \leq n^2/2 + n^2/2 = n^2$

  untuk semua $n \geq 1$ ($C = 1$ dan $n_0 = 1$).

3. Tunjukkan $T(n) = 6*2^n + 2n^2 = O(2^n)$

- Penyelesaian:
- $6*2^n + 2n^2 = O(2^n)$ karena

  $6*2^n + 2n^2 \leq 6*2^n + 2*2^n = 8*2^n$

  untuk semua $n \geq 1$ ($C = 8$ dan $n_0 = 1$).

4. Tunjukkan $T(n) = 1 + 2 + .. + n = O(n^2)$

Penyelesaian:

$1 + 2 + .. + n \leq n + n + \ldots + n = n^2$ untuk $n \geq 1$

5. Tunjukkan $T(n) = n! = O(n^n)$

Penyelesaian:

$n! = 1 . 2 . \ldots . n \leq n . n . \ldots . n = n^n$ untuk $n \geq 1$

- **Teorema**: Bila $T(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ adalah polinom derajat m maka $T(n) = O(n^m)$.

- Jadi, cukup melihat suku (*term*) yang mempunyai pangkat terbesar.

- Contoh:

  $T(n) = 5 = 5n^0 = O(n^0) = O(1)$

  $T(n) = n(n-1)/2 = n^2/2 - n/2 = O(n^2)$

  $T(n) = 3n^3 + 2n^2 + 10 = O(n^3)$

- Teorema tersebut digeneralisasi untuk suku dominan lainnya:

1. Eksponensial mendominasi sembarang perpangkatan (yaitu, $y^n > n^p$, $y > 1$)
2. Perpangkatan mendominasi ln n (yaitu $n^p > \ln n$)
3. Semua logaritma tumbuh pada laju yang sama (yaitu $a \log(n) = b \log(n)$)
4. $n \log n$ tumbuh lebih cepat daripada n tetapi lebih lambat daripada n^2

Contoh: $T(n) = 2^n + 2n^2 = O(2^n)$.

$T(n) = 2n \log(n) + 3n = O(n \log(n))$

$T(n) = \log(n^3) = 3 \log(n) = O(\log(n))$

$T(n) = 2n \log(n) + 3n^2 = O(n^2)$

Perhatikan….(1)

- Tunjukkan bahwa $T(n) = 5n^2 = O(n^3)$, tetapi $T(n) = n^3 \neq O(n^2)$.

- Penyelesaian:
- $5n^2 = O(n^3)$ karena $5n^2 \leq n^3$ untuk semua $n \geq 5$.

- Tetapi, $T(n) = n^3 \neq O(n^2)$ karena tidak ada konstanta C dan n^0 sedemikian sehingga
  $n^3 \leq Cn^2 \Leftrightarrow n \leq C$ untuk semua n_0 karena n dapat berupa sembarang bilangan yang besar.

Perhatikan ...(2)

- Defenisi: $T(n) = O(f(n)$ jika terdapat C dan n_0 sedemikian sehingga $T(n) \leq C.f(n)$ untuk $n \geq n_0$

  → tidak menyiratkan seberapa atas fungsi f itu.

- Jadi, menyatakan bahwa

  $T(n) = 2n^2 = O(n^2)$ → benar

  $T(n) = 2n^2 = O(n^3)$ → juga benar

  $T(n) = 2n^2 = O(n^4)$ → juga benar

- Namun, untuk alasan praktis kita memilih fungsi yang sekecil mungkin agar O(f(n)) memiliki makna
- Jadi, kita menulis $2n^2 = O(n^2)$, bukan $O(n^3)$ atau $O(n^4)$

TEOREMA. Misalkan $T_1(n) = O(f(n))$ dan $T_2(n) = O(g(n))$, maka

(*a*) $T_1(n) + T_2(n) = O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n))$

(*b*) $T_1(n)T_2(n) = O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$

(*c*) $O(cf(n)) = O(f(n))$, c adalah konstanta

(*d*) $f(n) = O(f(n))$

Contoh 9. Misalkan $T_1(n) = O(n)$ dan $T_2(n) = O(n^2)$, maka

(a) $T_1(n) + T_2(n) = O(\max(n, n^2)) = O(n^2)$

(b) $T_1(n)T_2(n) = O(n.n^2) = O(n^3)$

Contoh 10. $O(5n^2) = O(n^2)$

$n^2 = O(n^2)$

Pengelompokan Algoritma Berdasarkan Notasi *O*-Besar

Kelompok Algoritma	Nama
$O(1)$	konstan
$O(\log n)$	logaritmik
$O(n)$	lanjar
$O(n \log n)$	$n \log n$
$O(n^2)$	kuadratik
$O(n^3)$	kubik
$O(2^n)$	eksponensial
$O(n!)$	faktorial

Urutan spektrum kompleksitas waktu algoritma adalah :

$$\underbrace{O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < \ldots <}_{\text{algoritma polinomial}} \underbrace{O(2^n) < O(n!)}_{\text{algoritma eksponensial}}$$

Penjelasan masing-masing kelompok algoritma adalah sebagai berikut:

O(1) Kompleksitas *O*(1) berarti waktu pelaksanaan algoritma adalah tetap, tidak bergantung pada ukuran masukan. Contohnya prosedur `tukar` di bawah ini:

```
procedure tukar(var a:integer; var b:integer);
var
  temp:integer;
begin
  temp:=a;
  a:=b;
  b:=temp;
end;
```

Di sini jumlah operasi penugasan (*assignment*) ada tiga buah dan tiap operasi dilakukan satu kali. Jadi, $T(n) = 3 = O(1)$.

$O(\log n)$ Kompleksitas waktu logaritmik berarti laju pertumbuhan waktunya berjalan lebih lambat daripada pertumbuhan *n*. Algoritma yang termasuk kelompok ini adalah algoritma yang memecahkan persoalan besar dengan mentransformasikannya menjadi beberapa persoalan yang lebih kecil yang berukuran sama (misalnya algoritma `pencarian_biner`). Di sini basis algoritma tidak terlalu penting sebab bila *n* dinaikkan dua kali semula, misalnya, log *n* meningkat sebesar sejumlah tetapan.

$O(n)$ Algoritma yang waktu pelaksanaannya lanjar umumnya terdapat pada kasus yang setiap elemen masukannya dikenai proses yang sama, misalnya algoritma `pencarian_beruntun`. Bila n dijadikan dua kali semula, maka waktu pelaksanaan algoritma juga dua kali semula.

$O(n \log n)$ Waktu pelaksanaan yang $n \log n$ terdapat pada algoritma yang memecahkan persoalan menjadi beberapa persoalan yang lebih kecil, menyelesaikan tiap persoalan secara independen, dan menggabung solusi masing-masing persoalan. Algoritma yang diselesaikan dengan teknik bagi dan gabung mempunyai kompleksitas asimptotik jenis ini. Bila $n = 1000$, maka $n \log n$ mungkin 20.000. Bila n dijadikan dua kali semual, maka $n \log n$ menjadi dua kali semula (tetapi tidak terlalu banyak)

$O(n^2)$ Algoritma yang waktu pelaksanaannya kuadratik hanya praktis digunakan untuk persoalana yang berukuran kecil. Umumnya algoritma yang termasuk kelompok ini memproses setiap masukan dalam dua buah kalang bersarang, misalnya pada algoritma urut_maks. Bila n = 1000, maka waktu pelaksanaan algoritma adalah 1.000.000. Bila n dinaikkan menjadi dua kali semula, maka waktu pelaksanaan algoritma meningkat menjadi empat kali semula.

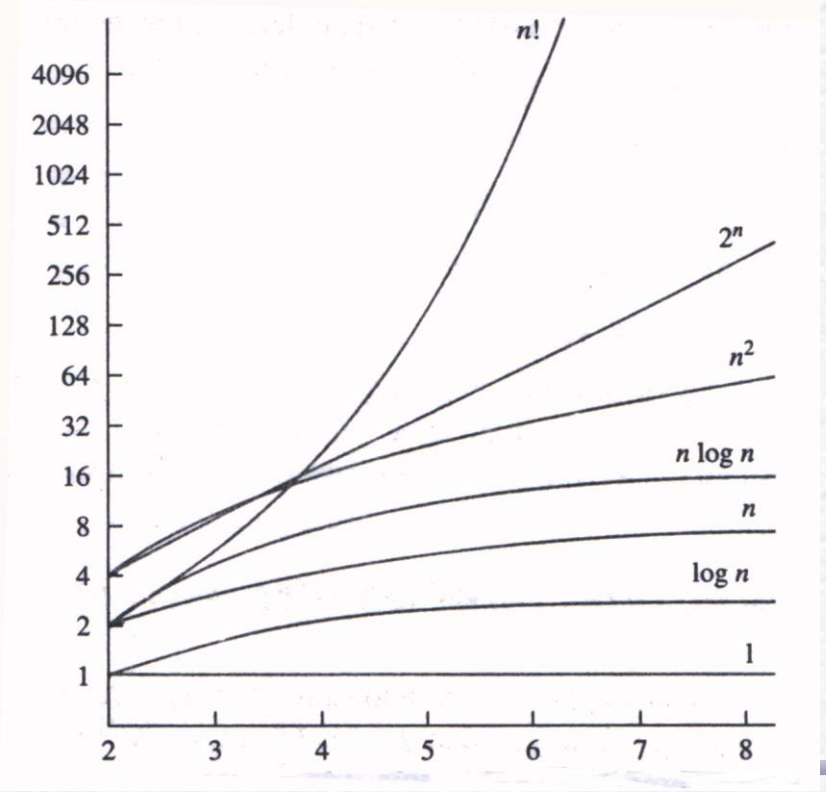
$O(n^3)$ Seperti halnya algoritma kuadratik, algoritma kubik memproses setiap masukan dalam tiga buah kalang bersarang, misalnya algoritma perkalian matriks. Bila n = 100, maka waktu pelaksanaan algoritma adalah 1.000.000. Bila n dinaikkan menjadi dua kali semula, waktu pelaksanan algoritma meningkat menjadi delapan kali semula.

$O(2^n)$ Algoritma yang tergolong kelompok ini mencari solusi persoalan secara "*brute force*", misalnya pada algoritma mencari sirkuit Hamilton (lihat Bab 9). Bila $n = 20$, waktu pelaksanaan algoritma adalah 1.000.000. Bila n dijadikan dua kali semula, waktu pelaksanaan menjadi kuadrat kali semula!

$O(n!)$ Seperti halnya pada algoritma eksponensial, algoritma jenis ini memproses setiap masukan dan menghubungkannya dengan n - 1 masukan lainnya, misalnya algoritma Persoalan Pedagang Keliling (*Travelling Salesperson Problem* - lihat bab 9). Bila $n = 5$, maka waktu pelaksanaan algoritma adalah 120. Bila n dijadikan dua kali semula, maka waktu pelaksanaan algoritma menjadi faktorial dari $2n$.

Nilai masing-masing fungsi untuk setiap bermacam-macam nilai *n*

log n	*n*	*n log n*	n^2	n^3	2^n	*n*!
0	1	0	1	1	2	1
1	2	2	4	8	4	2
2	4	8	16	64	16	24
3	9	24	64	512	256	362880
4	16	64	256	4096	65536	20922789888000
5	32	160	1024	32768	4294967296	(terlalu besar)



$T(n)$	Name	Problems
$O(1)$	constant	
$O(logn)$	logarithmic	
$O(n)$	linear	easy-solved
$O(nlogn)$	linear-logarithmic	
$O(n^2)$	quadratic	
$O(n^3)$	cubic	
$O(2^n)$	exponential	
$O(n!)$	factorial	hard-solved

Kegunaan Notasi *Big-Oh*

- Notasi *Big-Oh* berguna untuk membandingkan beberapa algoritma dari untuk persoalan yang sama → menentukan yang terbaik.

- Contoh: masalah pengurutan memiliki banyak algoritma penyelesaian,

  Selection sort, *insertion sort* → $T(n) = O(n^2)$

  Quicksort → $T(n) = O(n \log n)$

  Karena $n \log n < n^2$ untuk n yang besar, maka algoritma *quicksort* lebih cepat (lebih baik, lebih mangkus) daripada algoritma *selection sort* dan *insertion sort*.

Complexity Summary

Sorting Algorithm	Best Case	Average Case	Worst Case
Selection Sort	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Insertion Sort	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Bubble Sort	$O(N^2)$	$O(N^2)$	$O(N^2)$
Merge Sort	$O(N.\log_2 N)$	$O(N.\log_2 N)$	$O(N.\log_2 N)$
Quick Sort	$O(N.\log_2 N)$	$O(N.\log_2 N)$	$O(N^2)$
Tree Sort	$O(N.\log_2 N)$	$O(N.\log_2 N)$	$O(N^2)$

Notasi Omega-Besar dan Tetha-Besar

Definisi Ω-Besar adalah:

$T(n) = \Omega(g(n))$ (dibaca "$T(n)$ adalah Omega ($g(n)$" yang artinya *T(n) berorde paling kecil g(n)*) bila terdapat tetapan C dan n_0 sedemikian sehingga

$$T(n) \geq C \cdot g(n)$$

untuk $n \geq n_0$.

Definisi Θ-Besar,

$T(n) = \Theta(h(n))$ (dibaca "$T(n)$ adalah tetha $h(n)$" yang artinya $T(n)$ berorde sama dengan $h(n)$ jika $T(n) = O(h(n))$ dan $T(n) = \Omega(h(n))$.

Contoh: Tentukan notasi Ω dan Θ untuk $T(n) = 2n^2 + 6n + 1$.

Jawab:

Karena $2n^2 + 6n + 1 \geq 2n^2$ untuk $n \geq 1$,
maka dengan $C = 2$ kita memperoleh

$$2n^2 + 6n + 1 = \Omega(n^2)$$

Karena $2n^2 + 5n + 1 = O(n^2)$ dan $2n^2 + 6n + 1 = \Omega(n^2)$,
maka $2n^2 + 6n + 1 = \Theta(n^2)$.

Contoh: Tentukan notasi notasi O, Ω dan Θ untuk $T(n) = 5n^3 + 6n^2 \log n$.

Jawab:

Karena $0 \leq 6n^2 \log n \leq 6n^3$, maka $5n^3 + 6n^2 \log n \leq 11n^3$ untuk $n \geq 1$. Dengan mengambil $C = 11$, maka

$$5n^3 + 6n^2 \log n = O(n^3)$$

Karena $5n^3 + 6n^2 \log n \geq 5n^3$ untuk $n \geq 1$, maka maka dengan mengambil $C = 5$ kita memperoleh

$$5n^3 + 6n^2 \log n = \Omega(n^3)$$

Karena $5n^3 + 6n^2 \log n = O(n^3)$ dan $5n^3 + 6n^2 \log n = \Omega(n^3)$, maka $5n^3 + 6n^2 \log n = \Theta(n^3)$

Contoh: Tentukan notasi notasi O, Ω dan Θ untuk $T(n) = 1 + 2 + \ldots + n$.

Jawab:

$1 + 2 + \ldots + n = O(n^2)$ karena

$1 + 2 + \ldots + n \le n + n + \ldots + n = n^2$ untuk $n \ge 1$.

$1 + 2 + \ldots + n = \Omega(n)$ karena

$1 + 2 + \ldots + n \le 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ untuk $n \ge 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n &\ge \lceil n/2 \rceil + \ldots + (n-1) + n \\ &\ge \lceil n/2 \rceil + \ldots + \lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil \\ &= \lceil (n+1)/2 \rceil \lceil n/2 \rceil \\ &\ge (n/2)(n/2) \\ &= n^2/4 \end{aligned}$$

Kita menyimpulkan bahwa

$1 + 2 + \ldots + n = \Omega(n^2)$

Oleh karena itu,

$1 + 2 + \ldots + n = \Theta(n^2)$

Latihan

- Tentukan kompleksitas waktu dari algoritma dibawah ini jika melihat banyaknya operasi a←a+1

```
for i ← 1 to n do
  for j ← 1 to i do
     for k ← j to n do
          a ← a + 1
     endfor
  endfor
endfor
```

- Tentukan pula nilai *O*-besar, *Ω*-besar, dan *Θ*-besar dari algoritma diatas (harus penjelasan)

Jawaban

Untuk $i = 1$,
    Untuk $j = 1$, jumlah perhitungan = n kali

Untuk $i = 2$,
    Untuk $j = 1$, jumlah perhitungan = n kali
    Untuk $j = 2$, jumlah perhitungan = $n - 1$ kali
...
Untuk $i = n$,
    Untuk $j = 1$, jumlah perhitungan = n kali
    Untuk $j = 2$, jumlah perhitungan = $n - 1$ kali
    ...
    Untuk $j = n$, jumlah perhitungan = 1 kali.

Jadi jumlah perhitungan = $T(n) = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1$

- $T(n) = O(n^3) = \Omega(n^3) = \Theta(n^3)$.

- Salah satu cara penjelasan:

  $T(n) = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1$

  $= n(n+1)(2n+1)/6$

  $= 2n^3 + 3n^2 + 1$.

- Diperoleh $T(n) \leq 3n^3$ untuk $n \geq 4$ dan

  $T(n) \geq 2n^3$ untuk $n \geq 1$.

TEOREMA. Bila $T(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ adalah polinom derajat m maka $T(n)$ adalah berorde n^m.

Latihan Soal

Di bawah ini adalah algoritma (dalam notasi Pascal-*like*) untuk menguji apakah dua buah matriks, *A* dan *B*, yang masing-masing berukuran $n \times n$, sama.

```
function samaMatriks(A, B : matriks; n : integer) → boolean
{ true jika A dan B sama; sebaliknya false jika A ≠ B }

Deklarasi
  i, j : integer

Algoritma:
  for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
       if A(i,j) ≠ B(i,j) then
          return false
       endif
    endfor
  endfor
  return true
```

(a) Apa kasus terbaik dan terburuk untuk algoritma di atas?
(b) Tentukan kompleksitas waktu terbaik dan terburuk dalam notasi *O*.

2. Berapa kali instruksi *assignment* pada potongan program dalam notas Bahasa Pascal di bawah ini dieksekusi? Tentukan juga notasi O-besar.

```
for i := 1 to n do
    for j := 1 to n do
      for k := 1 to j do
        x := x + 1;
```

Jawaban: $T(n) = n(1 + 2 + \ldots + n)$

$= n(n(n+1)/2) = (n^3 + n^2)/2 = O(n^3)$

3. Untuk soal (a) dan (b) berikut, tentukan C, $f(n)$, n_0, dan notasi O-besar sedemikian sehingga $T(n) = O(f(n))$ jika $T(n) \leq C \cdot f(n)$ untuk semua $n \geq n_0$:

   (a) $T(n) = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$

   (b) $T(n) = (n + 1)(n + 3)/(n + 2)$

Jawaban:

(a) $2 + 4 + 6 \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$\leq 2(n + n + n + \ldots + n)$ untuk $n \geq 1$

$= 2n^2 = O(n^2)$

(b) $(n + 1)(n + 3)/(n + 2) = (n^2 + 4n + 3)/(n + 2)$

$\leq 8n$ untuk $n \geq 1$

$= O(n)$

4. Algoritma di bawah ini menghitung nilai polinom:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

```
function p(input x:real)→real
{ Mengembalikan nilai p(x)}
Deklarasi
    j, k : integer
    jumlah, suku : real
Algoritma
    jumlah ← a0
    for j ← 1 to n do
       { hitung ajxi }
        suku ← aj
        for k ← 1 to j do
              suku ← suku * x
        endfor
        jumlah ← jumlah + suku
    endfor
    return jumlah
```

Hitunglah berapa operasi perkalian dan berapa operasi penjumlahan yang dilakukan oleh algoritma di atas? Jumlahkan kedua hitungan tersebut, lalu tentukan juga kompleksitas waktu asimptotik algoritma tersebut dalam notasi *O*-Besar.

Jawab:

- Operasi penjumlahan: n kali (loop for $j \leftarrow 1$ to n)
- Operasi perkalian: $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$

- Operasi penjumlahan + operasi perkalian = $n + n(n+1)/2$
  $= O(n^2)$

Algoritma mengevaluasi polinom yang lebih baik dapat dibuat dengan metode Horner berikut:

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)))\ldots))$$

```
function p2(input x:real)→real
{ Mengembalikan nilai p(x) dengan metode Horner}

Deklarasi
   k : integer
   b1, b2, ..., bn : real

Algoritma
   bn←an
   for k←n-1 downto 0 do
      bk←ak + bk+1 * x
   endfor
   return b0
```

Hitunglah berapa operasi perkalian dan berapa operasi penjumlahan yang dilakukan oleh algoritma di atas? Jumlahkan kedua hitungan tersebut, lalu tentukan juga kompleksitas waktu asimptotik algoritma tersebut dalam notasi *O*-Besar. Manakah yang terbaik, algoritma *p* atau *p*2?

Jawab:

- Operasi penjumlahan: n kali (loop for k$\leftarrow$n-1 downto 0)
- Operasi perkalian: n kali

- Operasi penjumlahan + operasi perkalian = n + n = 2n
  = O(n)

Karena O(n) < O(n^2), maka algoritma yang terbaik adalah p2