

Solusi Kuis ke-3 IF2120 Matematika Diskrit (3 SKS) – Rekursi dan Relasi Rekurens, Teori Graf
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Senin, 10 November 2014
Waktu: 50 menit

1. Tentukan relasi rekurens dari $(a_n)_{n=1,2,3,\dots}$ jika diketahui (masing-masing 4 soal):
a. $a_n = 6n + 5$; b. $a_n = 5$; c. $a_n = 5^n$; d. $a_n = 1 + (-1)^n$

Jawaban:

- a. $a_{n+1} = a_n + 6$; $a_1 = 11$
b. $a_{n+1} = a_n$; $a_1 = 5$
c. $a_{n+1} = 5a_n$; $a_1 = 5$
d. $a_{n+1} = a_n + 2(-1)^{n+1}$; $a_1 = 0$

2. Tentukan solusi relasi rekurens berikut: $a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$; $a_0 = 6$ dan $a_1 = 16$

Jawaban:

Persamaan karakteristik : $r^2 - 3r - 10$

akar-akarnya : $(r+2)(r-5) = 0 \rightarrow r_1 = 5$ dan $r_2 = -2$

$$a_n = \alpha_1 5^n + \alpha_2 (-2)^n$$

$$a_0 = \alpha_1 5^0 + \alpha_2 (-2)^0 = 6$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 6$$

$$a_1 = \alpha_1 5^1 + \alpha_2 (-2)^1 = 16$$

$$5\alpha_1 - 2\alpha_2 = 16$$

Diperoleh dari persamaan diatas $\alpha_1 = 4$ dan $\alpha_2 = 2$. Jadi solusinya adalah: $a_n = 4(5^n) + 2(-2)^n$

3. Tentukan rumus eksplisit (solusi) dari relasi rekurensi berikut

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \\ 4(f(x-1) - f(x-2)), & x \geq 2 \end{cases}$$

Jawaban:

Persamaan karakteristik relasi rekurensi di atas adalah $x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$. Karena akar-akarnya kembar, maka bentuk umum solusinya adalah $f(x) = \alpha x \cdot 2^x + \beta \cdot 2^x$.

Substitusi $x = 0$ mendapatkan $\beta = -1$. Substitusi $x = 1$ mendapatkan $2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.

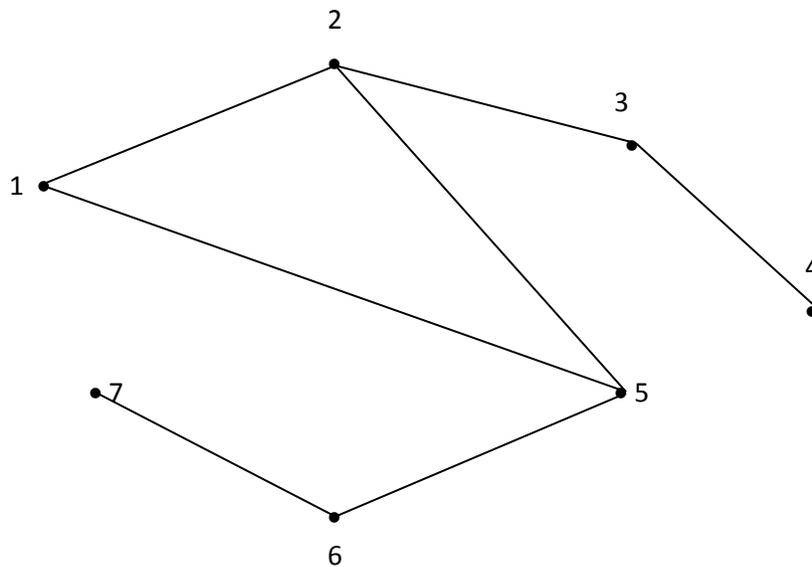
Jadi, solusi dari relasi rekurensi di atas adalah $f(x) = (x - 1)2^x$.

4. Di suatu negara terdapat 7 buah stasiun televisi. Pemerintah menetapkan aturan bahwa dua stasiun televisi yang berjarak ≤ 150 km tidak boleh beroperasi pada saluran frekuensi (UHF) yang sama. Tabel di bawah ini memperlihatkan jarak (km) antar stasiun televisi.
- (a) Gambarkan graf yang memodelkan persoalan ini. Jelaskan pula arti setiap simpul dan sisi pada graf anda.
- (b) Berapa minimal dan maksimal banyak frekuensi berbeda yang dibutuhkan bagi ketujuh stasiun TV tersebut sesuai dengan aturan Pemerintah?

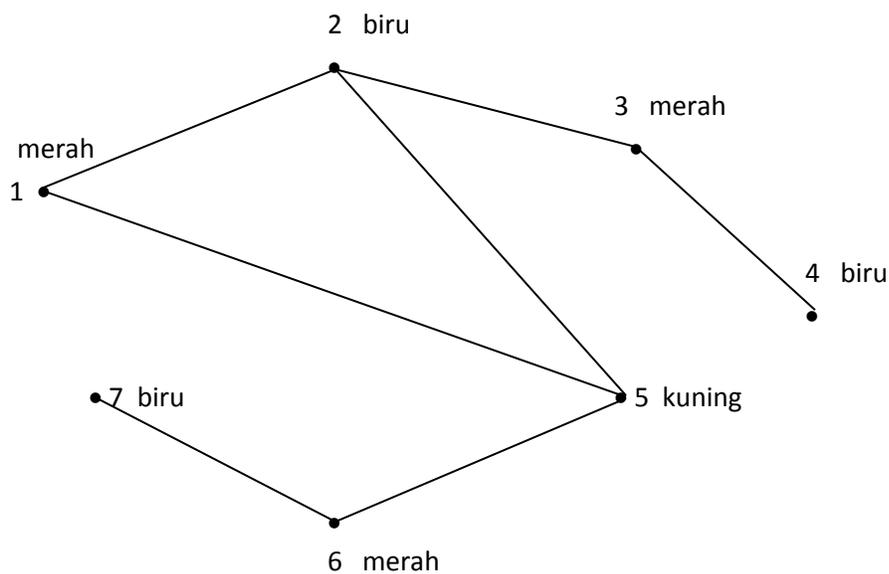
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	85	175	200	50	100	230
2	-	-	125	175	100	160	145
3	-	-	-	100	200	250	160
4	-	-	-	-	210	220	180
5	-	-	-	-	-	100	235
6	-	-	-	-	-	-	120
7	-	-	-	-	-	-	-

Jawaban:

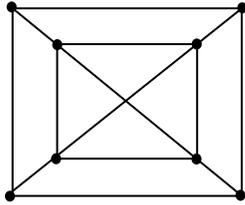
(a) Graf yang merepresentasikan persoalan tersebut. Simpul menyatakan stasiun televisi, sisi menyatakan dua stasiun berjarak ≤ 125 km.



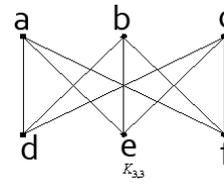
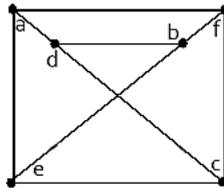
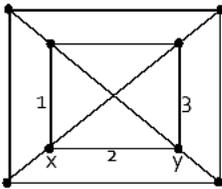
(b) Jumlah frekuensi berbeda maksimal = 7
 Jumlah frekuensi minimal = 3



5. Dengan teorema kuratowski, buktikan bahwa graf di bawah ini bukan merupakan graf planar.



Jawaban:



Perhatikan graf pada soal di gambar paling kiri.

Dengan menghilangkan sisi 1, 2, dan 3. Serta mengeliminasi simpul x dan y. Kita dapatkan graf yang homeomorfik dengan upagraf dari graf pada soal. (gambar tengah)

Dan graf tersebut isomorfik dengan graf $K_{3,3}$

\therefore Berdasarkan teorema kuratowski, karena memiliki homeografik upagraf yang isomorfik dengan $K_{3,3}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa **graf pada soal merupakan graf tidak planar. (QED)**