# Aplikasi Bilangan Prima dalam Pembentukan Basis Bilangan


Freddy Isman - 13513007[1]
*Program Studi Teknik Informatika*
*Sekolah Teknik Elektro dan Informatika*
*Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia*
[1]*freddyisman@students.itb.ac.id*



***Abstrak*—Salah satu topik yang sering dibahas para kaum matematikawan dalam teori bilangan adalah bilangan prima. Mengapa demikian? Karena misteri dari bilangan prima yang sampai sekarang ini masih belum terpecahkan. Misteri yang saya maksud di sini adalah menemukan suatu persamaan tunggal yang berlaku universal untuk semua bilangan prima yang artinya bahwa semua bilangan prima bisa diperoleh dari persamaan tersebut dan persamaan tersebut juga tidak menghasilkan bilangan yang bukan prima.**

**Makalah di sini membahas sedikit tentang definisi bilangan prima dan sejarah panjang pencarian persamaan bilangan prima, kemudian membahas lebih dalam aplikasi bilangan prima dalam pembentukan basis bilangan dan kemudian diikuti dengan penjelasan aplikasinya secara singkat dalam bidang yang lain.**



***Kata kunci*—basis, kombinasi, modulo, prima, teorema.**


## I. PENDAHULUAN

Bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari angka 1, yang hanya bisa dibagi oleh angka 1 dan bilangan itu sendiri. Contoh bilangan prima dari angka 1 sampai 10 yaitu 2, 3, 5, dan 7. Angka 6 bukanlah bilangan prima karena angka 6 bisa dibagi 2 dan dibagi 3. Oleh karena angka 6 bukan bilangan prima, maka angka 6 adalah bilangan komposit, yaitu bilangan yang bukan merupakan bilangan prima dan memiliki faktor selain angka 1 dan bilangan itu sendiri.

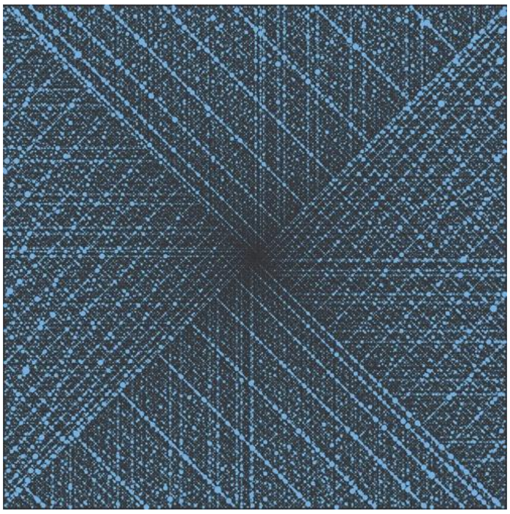
Dari definisi di atas, maka angka 1 bukanlah bilangan prima. Namun beberapa matematikawan beranggapan bahwa 1 adalah bilangan prima. Mereka membuktikannya dengan menganggap angka 1 dapat dinyatakan dalam persamaan 1 = 1 x 1 ,yang berarti bahwa angka 1 dapat dibagi oleh angka 1 dan bilangan itu sendiri yang juga merupakan angka 1.

Salah satu hal yang saya temukan di balik bilangan prima ini adalah bahwa basis bilangan yang “baik” adalah basis bilangan yang dibentuk dari kombinasi perkalian bilangan prima yang berbeda satu sama lain. Saya katakan “baik" karena basis bilangan tersebut memungkinkan pembagian oleh banyak bilangan prima menghasilkan bilangan desimal yang terdefinisi. Untuk pembahasan lebih lanjutnya, akan saya bahas lebih dalam pada Bab III tentang aplikasi bilangan prima dalam pembentukan basis bilangan.

## II. SEJARAH PENCARIAN BILANGAN PRIMA[1]

Sejarah bilangan prima dimulai pada zaman Mesir kuno dengan ditemukannya sebuah catatan yang menyatakan penggunaan bilangan prima pada zaman tersebut. Namun, konsep bilangan prima dan bilangan komposit pada zaman ini berbeda dengan bilangan prima dan bilangan komposit yang dikenal saat ini karena pada zaman tersebut, basis bilangan yang digunakan adalah basis-60 atau basis seksadesimal. Bukti lain permulaan sejarah bilangan prima adalah sebuah catatan penelitian bilangan prima oleh bangsa Yunani kuno. Euclid’s Elements (300 BC) berisi beberapa teorema penting mengenai bilangan prima, termasuk ketakberhinggan bilangan prima dan teorema fundamental aritmetik yang memperlihatkan bagaimana cara menyusun sebuah bilangan sempurna (perfect number) dari sebuah bilangan prima Mersenne yang ditemukan kemudian. Bukti lain adalah Sieve of Eratosthenes, yaitu sebuah cara untuk menghitung seluruh bilangan prima dalam suatu rentang tertentu. Namun dari cara Sieve of Erastosthenes, kita masih belum mampu menemukan pola dari bilangan prima itu sendiri, di mana pola dari bilangan prima-nya terlihat “acak” .


*Gambar Ulam Spiral, salah satu pola bilangan prima (I)*
*Sumber : http://www.hermetic.ch/pns/bluesp2.png*



*Gambar Ulam Spiral, salah satu pola bilangan prima (zoom out ~100x(I))*
*Sumber : http://38.media.tumblr.com/tumblr_lxj6at2Yi01qendcjo1_500.png*

Pada abad XVII, penelitian terhadap bilangan prima dilanjutkan kembali setelah berabad-abad berhenti. Pada tahun 1640, Pierre de Fermat memulainya dengan membuat Teorema Kecil Fermat (Fermat's Little Theorem). Kasus khusus dari teorema ini mungkin telah diketahui oleh bangsa Cina sebelumnya, namun belum ada bukti yang pasti mengenai hal ini. Lama setelah itu, Euler membuktikan bahwa ada "celah" pada teorema ini. Sebagai pengganti, seorang Prancis, Marin Mersenne, membuat suatu bentuk baru dari bilangan prima yang akhirnya namanya diabadikan menjadi nama bilangan ini, yaitu bilangan prima Mersenne (Mersenne prime). Cara penentuan inipun belum sempurna karena masih belum mampu mencari semua kemungkinan bilangan prima yang ada dan juga masih terdapat beberapa prima semu diantaranya.

Sampai abad XIX, banyak matematikawan masih beranggapan bahwa 1 adalah bilangan prima, dengan definisi bilangan prima adalah bilangan yang habis dibagi satu dan bilangan tersebut (yang juga adalah satu) tanpa membatasi jumlah pembagi. Pada abad XIX, Legendre dan Gauss membuat sebuah konjektural untuk menghitung banyaknya bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan suatu bilangan. Konjektural ini akhirnya dibuktikan pada tahun 1896 dan berganti nama menjadi Teorema Bilangan Prima (Prime Number Theorem). Sebelumnya, pada tahun 1859, Riemann mencoba membuktikan konjektural tersebut menggunakan fungsi-zeta.

Pencarian bilangan prima tidak berhenti sampai disitu, khususnya untuk bilangan-bilangan besar. Banyak matematikawan yang meneliti mengenai tes bilangan prima, contohnya: Pepin's test untuk bilangan Fermat (1877), Lucas-Lehmer test untuk bilangan Mersenne (1856), dan Lucas-Lehmer test yang digeneralisasikan.

Penemuan yang cukup mengejutkan terjadi pada tahun 1963, yaitu ketika matematikawan bernama Stanislaw Ulam menemukan pola bilangan prima yang unik ketika menulis bilangan di selembar kertas secara berurutan dalam bentuk spiral seperti yang dicontohkan pada halaman sebelumnya. Pada saat itu Ulam menemukan bahwa ada banyak pasangan bilangan prima yang satu dengan bilangan prima yang lain berada dalam satu garis diagonal pada gambar. Dan ketika gambarnya diperbesar dan dihitung dengan menggunakan komputer, diperoleh gambar seperti di samping kiri berikut.

Pada abad XX, penggunaan bilangan prima di luar bidang matematika mulai dikembangkan. Pada era 1970-an, ketika konsep kriptografi kunci-publik ditemukan, bilangan prima menjadi salah satu dasar pembuatan kunci algoritma enkripsi seperti RSA.

Kemudian yang terakhir adalah menemukan bilangan prima terbesar, meskipun secara matematis tidak ada yang namanya "bilangan prima terbesar". Bilangan prima terbesar yang pernah dihitung adalah bilangan prima Mersenne yang ke-48 yaitu $2^{57,885,161} - 1$. Bilangan yang mempunyai 17,425,170 digit ini ditemukan oleh Curtis Cooper pada 25 Januari 2013 yang merupakan professor dari *University of Central Missouri* bekerja sama dengan puluhan ribu anggota lainnya dari proyek GIMPS.[2]

## III. APLIKASI BILANGAN PRIMA DALAM PEMBENTUKAN BASIS BILANGAN

### *A. Basis Bilangan*[3]

Basis bilangan atau disebut dasar bilangan adalah suatu sistem pengelompokan bilangan yang kita sepakati bersama. Sistem bilangan yang kita pakai sekarang disebut sistem desimal yaitu menggunakan basis (dasar) sepuluh. Basis sepuluh artinya penulisan lambang bilangan yang didasarkan pada pengelompokan sepuluh-sepuluh. Pada basis sepuluh angka (lambang bilangan) yang dipakai adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.
Adapun basis-basis bilangan yang lain yaitu:
1. Basis dua (biner), yaitu basis bilangan yang menggunakan dua angka, yaitu 0 dan 1
2. Basis empat, yaitu basis bilangan yang menggunakan empat angka, yaitu 0, 1, 2, dan 3
3. Basis enam-belas (hexadesimal), yaitu basis bilangan yang menggunakan sepuluh angka dan 6 karakter, yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Adapun contoh mengubah bilangan dari suatu basis ke basis yang lain diberikan dalam contoh berikut ini :

1. Mengubah bilangan basis 2 ke basis 16 (hexadesimal)

Biner : 11 | 1100 | 1010 | 1101 | 1011 | 0011
Hexadesimal : 3 | C | A | D | B | 3

Keterangan : untuk bilangan hexadesimal, dikelompokkan per karakter/angka dari kanan, sedangkan untuk bilangan biner, dikelompokkan per 4 angka dari kanan, karena nilai maksimum dari 4 angka biner sama dengan nilai maksimum dari karakter pada hexadesimal ($1111_{(2)} = F_{(16)}$)

2. Mengubah bilangan basis 16 ke basis 10 (desimal)

Hexadesimal : F5
Desimal : $(15x16^1)+(5x16^0) = 240+5 = 245$

## *B. Kombinatorial*[4]

Salah satu persoalan yang sering muncul dalam kehidupan sehari-hari adalah bagaimana cara memilih k buah benda dari n buah benda yang ada, di mana urutan dari benda tersebut tidak diperhatikan. Banyaknya cara tersebut dinyatakan dengan C(n,k), dimana

$$C(n,k) = n!/(k!(n-k)!)$$

Dari persamaan diatas, maka dapat kita hitung. Jika diberikan n buah bilangan prima, maka banyaknya basis bilangan yang dapat dibentuk adalah

$$\sum_{k=1}^{k=n} C(n,k) = \sum \text{basis bilangan}$$

Jadi misalkan diberikan 4 bilangan prima pertama (n=4), maka banyaknya basis bilangan yang dapat dibentuk dari 4 bilangan prima tersebut adalah

$$\sum_{k=1}^{k=4} C(4,k) = C(4,1)+C(4,2)+C(4,3)+C(4,4)$$
$$= 15 \text{ basis bilangan}$$

## *C. Pembentukan Basis Bilangan dari Bilangan Prima*

(Catatan : Dalam penjelasan di bawah, bilangan prima yang dimaksud adalah bilangan prima relative terhadap basis 10, yaitu $2_{(10)}$, $3_{(10)}$, $5_{(10)}$, $7_{(10)}$, $11_{(10)}$, $13_{(10)}$, ...$dst_{(10)}$).

Dalam kehidupan sehari-hari, seperti yang kita ketahui bahwa kita sering menggunakan angka dengan basis 10 sebagai basis standar. Basis 10 seperti yang kita ketahui menggunakan angka 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, dan setelah itu adalah angka 10. Dalam proses pembagiannya, ketika bilangan dibagi dengan suatu bilangan prima, misalnya dibagi oleh bilangan 2 atau bilangan 5, maka akan menghasilkan bilangan desimal (bilangan berkoma) yang berhingga (tidak berulang). Misalnya

1/2 = 0.5
1/5 = 0.2

Namun ketika dibagi dengan bilangan prima selain oleh 2 dan 5, misalnya dibagi oleh bilangan 3, 7 , 11, dan seterusnya, maka akan menghasilkan bilangan desimal (bilangan berkoma) yang tak berhingga namun memiliki pola atau berulang. Misalnya

1/3 = 0.33333333…
1/7 = 0.142857…
1/11= 0.090909…

Kenapa bisa demikian? Jawabannya sederhana, karena faktor prima dari nilai basis itu sendiri, yaitu 10 adalah 2 dan 5.

Dari pembuktian di atas, kita ketahui bahwa jika kita ingin membuat suatu basis bilangan, dimana bilangan itu habis dibagi suatu bilangan prima tertentu, misalnya habis dibagi 2 dan 3, maka kita buat suatu bilangan dengan basis bernilai 2x3 = 6 . Untuk membuktikan bahwa bilangan dengan basis 6 habis dibagi oleh bilangan prima 2 dan 3, Mari kita perhatikan contoh berikut ini.

Misalkan kita ketahui bahwa bilangan basis 6 terdiri atas angka 0,1,2,3,4,5, dan setelah itu adalah angka 10. Dalam proses pembagiannya, ketika bilangan dibagi dengan suatu bilangan prima, misalnya dibagi oleh bilangan 2 atau bilangan 3, maka

1/2 = (1/10) x (10/2) = (1/10) x 3 = 0.3
1/3 = (1/10) x (10/3) = (1/10) x 2 = 0.2

Dari perhitungan di atas mungkin terlihat bahwa pembagian oleh angka 2 dan 3 menghasilankan bilangan berkoma yang berhingga (tidak berulang). Namun apa yang terjadi jika bilangan tersebut kita bagi dengan bilangan prima yang lain, misalnya kita bagi dengan bilangan 5, 11 dan 13 (angka 7 tidak digunakan karena tidak dikenali pada basis 6).

1/5 = (1/10) x (10/5) = (1/10) x (1+(1/5)) = 0.111111…
1/11 = (1/10) x (1/10) x (100/11)
= (1/10) x (1/10) x (5+1/11) = 0.050505…
1/13 = (1/10) x (1/10) x (100/13)
= (1/10) x (1/10) x (4) = 0.04

Terlihat dari perhitungan di atas bahwa pembagian oleh bilangan prima selain oleh angka 2 dan 3 menghasilkan bilangan berkoma yang tak berhingga atau berulang.

Namun, mengapa pembagian oleh bilangan prima seperti angka 13 menghasilkan bilangan berkoma yang berhingga (tidak berulang)? Alasannya adalah karena angka 13 adalah angka dalam basis 6, sehingga ketika diubah ke basis 10, maka angkanya akan menjadi angka 9 atau dapat ditulis juga $13_{(6)} = 9_{(10)}$ . Dari sini kita ketahui bahwa angka 13 dalam basis 6 bukanlah bilangan prima dan kita ketahui juga bahwa faktor prima dari 9 adalah 3 sehingga mengakibatkan angka 1 habis dibagi angka 13 pada basis 6 .Begitupun angka 11 dalam basis 6, sehingga ketika diubah ke basis 10, akhirnya kita ketahui bahwa sesungguhnya angka 11 pada basis 6 adalah angka 7 pada basis 10 atau dapat ditulis juga $11_{(6)} = 7_{(10)}$. Karena 7 adalah bilangan prima selain dari 2 dan 3, maka hasil pembagiannya adalah bilangan berkoma berulang atau tak berhingga. Kita juga tidak mempertimbangkan angka 2,3, dan 5 terhadap basisnya karena ketiga bilangan prima tersebut dikenali oleh kedua basis, yaitu

$2_{(6)}=2_{(10)}$ ;$3_{(6)}=3_{(10)}$ ;$5_{(6)}=5_{(10)}$

Demikian seterusnya jika kita ingin membuat basis bilangan dan bilangan di dalamnya habis dibagi oleh bilangan prima 2,3, dan 5 maka bilangan tersebut harus berbasis (2x3x5)=30.

Jadi, dari perhitungan tersebut dapat disimpulkan bahwa jika kita ingin membuat suatu basis bilangan dan bilangan di dalam basis tersebut habis dibagi oleh bilangan prima :

->P1,P2,P3,..., Pk

maka bilangan tersebut harus berbasis :

->(P1xP2xP3x…xPk).

Saya berharap teorema di atas mampu membuktikan apakah bilangan pada zaman Mesir yang berbasis-60 atau seksadesimal dapat dibagi oleh faktor prima-nya, yaitu 2, 3 dan 5.

## IV. APLIKASI BILANGAN PRIMA DALAM BIDANG LAINNYA

### *A. Check-Digit ISBN*[5]

ISBN 388053101-3

9 703880 531016

*Sumber :* [5]

Kode yang dimiliki oleh setiap buku yang diterbitkan disebut dengan istilah International Standard Book Number atau ISBN. Pengecekan ISBN dilakukan dengan menggunakan modulo 11. Pertama-tama yaitu menentukan posisi setiap angka dari kanan, dan kemudian mengalikannya dan menentukan digit ke-10 sebagai check digit hingga mengakibatkan jumlah semua perkalian kongruen dengan 0 modulo 11.

Namun dalam penulisan seringkali terjadi beberapa kesalahan. Kesalahan yang sering dilakukan adalah pertukaran dua digit dan kesalahan satu digit. Tapi kedua kesalahan ini dapat dideteksi hanya dengan melakukan check-digit ISBN. Hal ini bisa dilakukan karena bilangan modulo 11 yang digunakan adalah bilangan prima.

Contoh: ISBN 0–3015–4561–8

0 : kode kelompok negara berbahasa Inggris,
3015 : kode penerbit
4561 : kode unik buku yang diterbitkan
8 : karakter uji.

Karakter uji ini didapatkan sebagai berikut:

1 x 0 + 2 x 3 + 3 x 0 + 4 x 1 + 5 x 5 + 6 x 4 + 7 x 5 + 8 x 6 + 9 x 1 = 151

Jadi, karakter ujinya adalah 151 mod 11 = 8

### *B. Kriptografi Kunci Publik*[5]

Sumber : *[5]*

Pada tahun 1977, Ron Rivest, Adi Shamir dan Leonard Adleman menemukan algoritma untuk enskripsi-deskripsi data yang ingin dirahasiakan. Algoritma itu dinamakan atas singkatan nama ketiga orang tersebut, algoritma RSA. Proses kerjanya yaitu pertama-tama terdapat dua kunci yang dibutuhkan, satu untuk mendekripsi data dan untuk selanjutnya disebut sebagai kunci privat, dan satunya lagi untuk mengenkripsi data dan untuk selanjutnya disebut sebagai kunci publik. Algortima RSA ini bergantung kepada bilangan prima yang digunakan RSA, disebut juga bilangan RSA, yang merupakan hasil kali dua bilangan prima yang sangat besar dan biasa disimbolkan dengan n. Pada pelaksanaannya, nilai n memiliki lebih dari 200 digit. Untuk menentukan pnilai dari dua bilangan prima yang dangat besar ini, diperlukan algoritma uji keprimaan. Semakin mangkus algoritma uji keprimaan, maka semakin besar dua pasang bilangan prima yang dapat dihasilkan, dan semakin sulit untuk memfaktorkan hasil kali keduanya. Sehingga data yang dienkripsi menggunakan algoritma RSA ini pun akan semakin aman.

Algoritma pembangkitan pasangan kunci

1. Pilih dua bilangan prima, p dan q (rahasia)
2. Hitung n = pq. Besaran n tidak perlu dirahasiakan.
3. Hitung m = (p – 1)(q – 1).
4. Pilih sebuah bilangan bulat untuk kunci publik, e, relatif prima terhadap m.
5. Hitung kunci dekripsi, d, melalui kekongruenan

   ed ≡ 1 (mod m).

### *C. Bilangan Prima di Alam*[6]

Mungkin awalnya kita mengira kalau bilangan prima hanya merupakan salah satu produk matematikawan untuk menghasilkan penemuan yang bermanfaat bagi manusia. Ternyata tidak hanya sebatas itu saja. Pola atau gejala di alam juga mengikuti prinsip bilangan prima. Misalkan spesies jangkrik dari genus magicicada yang hidup di Amerika bagian utara memanfaatkan sifat unik dari bilangan prima. Sebagian besar waktunya dihabiskan sebagai larva di dalam tanah. Setiap 13 atau 17 tahun, maka jangkrik akan keluar untuk berkembang biak.

Tampak sebagai suatu kebetulan, bukan?

Tapi kenyataan yang lebih mengejutkan lagi membuktikan kalau sesungguhnya jangkrik memiliki siklus hidup sekitar 12-18 tahun. Apa yang terjadi dengan jangkrik yang siklus hidupnya 12, 14, 15, 16, dan 18 tahun? Jangkrik-jangkrik tersebut lebih sering bertemu dengan pemangsa yang muncul setiap 6 tahun. Dengan angka demikian, maka peluang hidup jangkrik yang siklus hidupnya 13 dan 17 tahun lebih besar karena peluang bertemu dengan pemangsanya sangat kecil dibanding dengan jangkrik yang siklus siklus hidupnya 12, 14, 15, 16, dan 18 tahun.

Hal tersebut dapat dijelaskan secara matematis sebagai berikut. Misalkan p bilangan prima, siklus hidup jangkrik dan b bilangan bulat, siklus hidup pemangsa dan $p \neq b$. Oleh karena itu, maka b tidak membagi habis p. Misal k suatu bilangan bulat, maka b tidak membagi habis kp, kecuali jika k adalah kelipatan b.

## V. KESIMPULAN

Bilangan prima, secara terpisah, merupakan bilangan yang paling misterius dibanding bilangan yang lain. Begitu banyak penurunan dibuat untuk menemukan persamaan bilangan prima, mulai dari zaman Mesir hingga saat ini. Namun selalu ada celah di balik rumus tersebut, misalnya Teorema Fermat untuk bilangan prima, di mana untuk kasus bilangan yang sangat besar, dihasilkan bilangan yang bukan prima, atau bilangan prima Mersenne yang tidak mampu menghasilkan semua kemungkinan bilangan prima yang ada, seperti contoh angka 11 tidak termasuk ke dalam bilangan prima Mersenne, namun 11 juga merupakan bilangan prima. Lebih mengejutkan lagi adalah ketika saya menemukan bahwa basis bilangan yang “baik” merupakan basis bilangan yang dibentuk dari kombinasi perkalian bilangan prima yang berbeda satu sama lain seperti yang telah saya bahas sebelumnya.

## VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Saya mengucapkan terima kasih kepada Bu Harlili dan Pak Rinaldi Munir atas bimbingannya dalam kuliah Matematika Diskrit IF2120 selama ini dan juga karena telah memberikan tugas ini sehingga saya sebagai penulis mampu menuangkan ide-ide terbaru saya dalam makalah ini. Tidak lupa juga saya ucapkan terima kasih atas dukungan dan bantuan teman-teman seperjuangan satu studi selama ini.

## REFERENSI

[1] M. M. Laitinen-Carnevale, *The History and Development of Prime Number Theory*, pp 475-482, (online) (people.math.umass.edu/~tevelev/475_2014/laitinen.pdf, diakses 10 Desember 2014, 18:15 WIB).

[2] Mersenne Research Inc., *Mersenne Prime Discovery : 2^57,885,161-1 is Prime!*, (online), (http:// http://www.mersenne.org/primes/?press=M57885161, diakses 10 Desember 2014, 17:20 WIB).

[3] Randal E. Bryant and David R. O'Hallaron. *Computer Systems: A Programmer’s Perspective*, 2nd Ed., Prentice Hall, 2011.

[4] K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications 7th. NewYork: McGraw-Hill, 2012

[5] M. Rinaldi, *Teori Bilangan Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit.ppt*, Tahun 2014.

[6] BBC News Magazine, *Nature's hidden prime number code*, (online), (http://www.bbc.co.uk/news/magazine-14305667, diakses 10 Desember 2014, 20:16 WIB).

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2014

ttd

Freddy Isman (13513007)