

God's Number for Rubik's Cube with Combinatorics

Luminto (13513080)

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

luminto17@students.itb.ac.id

Abstract—Siapa yang masih belum mengenal istilah Rubik? Rubik adalah permainan mekanik yang dapat dimainkan segala kalangan, baik anak-anak, remaja maupun dewasa. Namun, apa yang dimaksud dengan God's Number pada Rubik? God's Number yang berasal dari God's Algorithm merupakan suatu algoritma yang dapat mengenumerasi banyaknya langkah yang (cukup) dibutuhkan untuk menyelesaikan suatu permainan Rubik. Sekedar informasi, God's Algorithm bukan hanya terdapat pada Rubik namun juga terdapat pada permainan menara Hanoi.

Keywords—Rubik, God's Number, Kombinatorial.

I. PENDAHULUAN

Beberapa tahun yang lalu, permainan Rubik sempat booming di seluruh dunia termasuk Indonesia dan mendapat respon positif dari setiap kalangan baik anak-anak, remaja, sampai orang dewasa. Permainan ini cukup banyak diminati lantaran permainannya yang terkesan unik dan menantang karena permainan ini tidak mudah untuk diselesaikan.

Kubus Rubik atau Rubik's Cube adalah sebuah permainan teka-teki mekanik yang ditemukan pada tahun 1974 oleh pemahat dan profesor arsitektur Hungaria, Ernő Rubik. Semenjak penemuannya itu, rubik menjadi permainan yang paling banyak dibeli dengan penjualan hampir 350 juta unit. Kubus ini terbuat dari plastik dan terdiri atas 27 bagian kecil yang berputar pada poros yang terlihat. Setiap sisi dari kubus ini memiliki sembilan permukaan yang terdiri dari enam warna yang berbeda. Ketika terselesaikan/terpecahkan, setiap sisi dari kubus ini memiliki satu warna dan warna yang berbeda dengan sisi lainnya.



Erno Rubik saat berada di Genius Gala 2014. Sumber: http://en.wikipedia.org/wiki/Ern%C5%91_Rubik#media/File:Erno_Rubik_Genius_Gala_2014.jpg yang diakses pada tanggal 10 Desember 2014 pada pukul 11:35

Rubik tersedia dalam berbagai ukuran kubus seperti 2x2x2, 3x3x3, dst. Bahkan sekarang tersedia beberapa variasi Rubik dalam bentuk Pyraminx, Megaminx dsb. Permainan ini selain membutuhkan skill untuk menyelesaikannya juga memerlukan kecepatan (speedcubing) agar dapat bertanding dengan pemain yang lain. Pemilihan algoritma yang tepat dan kelihaihan tangan dalam menyelesaikan problem yang ada dapat meminimalisir waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan 1 game permainan.

Rekor dunia untuk kategori Rubik 3x3x3 sementara dipegang oleh pemain asal Belanda *Mats Walk*, dengan waktu 5.55s. Sementara untuk kategori 4x4x4 dipegang oleh pemain asal German, *Sebastian Weyer*, pada Euro 2014 dengan waktu tercepat tercatat 21.97s dan untuk kategori 5x5x5 dengan waktu 48.42s dipegang oleh *Feliks Zemdegs*. (sumber World Cube Association : <https://www.worldcubeassociation.org/results/regions.php> yang diakses pada tanggal 07 Desember 2014 pukul 19:10).

Rubik's Cube sejatinya tersusun atas 27 kubus berukuran 1x1x1. Setiap komponen pada Rubik memiliki nama tersendiri. Umumnya, Rubik's Cube terdiri dari 3 komponen, yakni *Center*, *Edge*, dan *Corner*.

1. *Center*

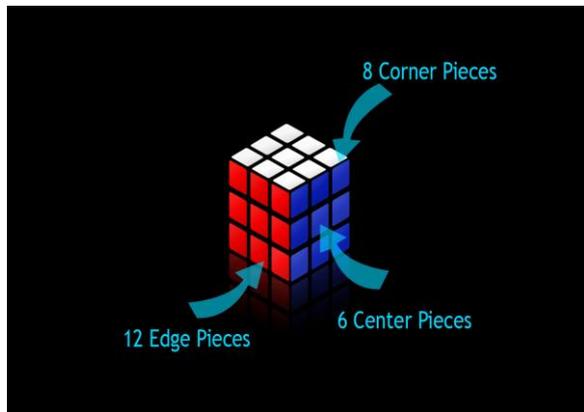
Center merupakan bagian tengah dari setiap sisi pada rubik. *Center* merupakan kubus yang 'mati' karena hanya bersifat sebagai penanda warna pada sisi tersebut dan satu-satunya komponen yang memiliki sifat yang tidak dapat diputar/dipindah-pindahkan.

2. *Edge*

Edge atau disebut semi-*Center* merupakan bagian tengah dari pinggiran/tepi suatu rubik. *Edge* berfungsi sebagai pengatur warna antara *Center* dan *Corner*. *Edge* sendiri terdiri atas merupakan tahap pertama yang harus diselesaikan sebelum mempersatukan *Center* dan *Corner*.

3. *Corner*

Corner merupakan sudut dari suatu rubik yang terdiri dari 3 warna. Penyelesaian sudut-sudut tersebut terkadang memakan waktu karena memiliki jumlah yang paling banyak dari komponen-komponen yang lainnya.



sumber : <http://solvetheRubikscube.blogspot.com/> yang diakses pada tanggal 09 Desember 2014 pada pukul 21:35

Kombinatorial merupakan cabang matematika yang mempelajari jumlah pengaturan objek-objek tanpa harus mengenumerasi semua kemungkinan susunannya. Solusi yang ingin kita peroleh dari kombinatorial ini adalah jumlah cara pengaturan objek-objek didalam kumpulannya. Kombinatorial didasarkan pada hasil yang diperoleh dari suatu percobaan (experiment) atau kejadian (event). Percobaan adalah proses fisis yang hasilnya dapat diamati. Contoh : melempar dadu, melempar koin uang logam, memilih 5 orang wakil dari 100 orang, dll.

Permutasi dan kombinasi merupakan bagian dari kombinatorial. Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek yang merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian. Definisi 1 yaitu untuk $n \geq 0$, n faktorial yang dituliskan dengan $n!$ didefinisikan sebagai $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Definisi 2 yaitu andaikan terdapat n sembarang objek. Akan diadakan pengaturan r objek dengan $1 \leq r \leq n$. Banyaknya permutasi ditulis dengan : nPr atau $P(n,r)$ didefinisikan sebagai : $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Dalam permutasi hal yang perlu diperhatikan adalah pengaturan dan urutan.

Sedangkan kombinasi merupakan bentuk khusus dari permutasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan. Notasi kombinasi sering ditulis dengan $C(n,r)$ yang sering dibaca “ n diambil r ” artinya r objek diambil dari n buah objek atau jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

III. CARA MENYELESAIKAN RUBIK

Banyak cara untuk menyelesaikan rubik. Namun pada bagian ini, alangkah baiknya penyelesaian rubik menggunakan tahap beginner saja agar lebih mudah dipahami. Beberapa tahapan lainnya seperti tahap advance, expert, dll memerlukan keahlian dan pemikiran yang tinggi dalam menyelesaikan permainan.

Sekilas mengenai cara menyelesaikan rubik dengan tahap beginner :

- [LAYER 1] Menyatukan *Edge* dengan *Center*

Pada tahap ini, pemain diharapkan mampu menyelesaikan tahap pertama ini yaitu menyatukan *Edge* pada *Center* yang sewarna pada 1 layer pertama.



sumber : <http://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-beginners-method/> diakses pada tanggal 10 Desember 2014 pukul 12:35

- [LAYER 1] Menyelesaikan *Corner*

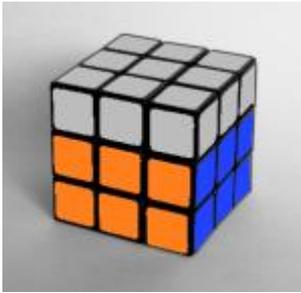
Edge dan *Center* yang telah “disatukan” (sewarna) pada layer 1 kemudian akan memasuki tahap ini dimana *Corner* yang warnanya berkaitan dengan 3 warna lain (*Edge* kiri, *Edge* kanan, *Center* layer 1) akan dimasukkan ke tempat seharusnya. Penyelesaiannya cukup mudah yaitu mencari sudut yang bersangkutan tersebut kemudian dimasukkan pada tempatnya. Lakukan tahap ini sampai top layer 1 berwarna sama dengan border layer 1 sewarna (seperti yang tampak pada gambar)



sumber : <http://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-beginners-method/> diakses pada tanggal 10 Desember 2014 pukul 12:35

- [LAYER 2] Melengkapi *Edge*

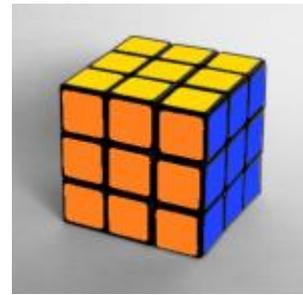
Setelah layer 1 telah terlihat bagus, maka pada tahap ini kita hendak menyelesaikan/menyatukan warna pada layer 2. Awalnya kita akan memutar rubik tersebut dengan layer 1 menghadap ke selatan agar lebih mudah menyelesaikan tahap ini. Kemudian carilah *Edge* pada 2 warna yang bersangkutan dan posisi dimana potongan tersebut hendak diletakkan. Selanjutnya pilih salah satu warna dari 2 warna target dan kemudian fokus pada salah satu *Center* tersebut. Putar layer 3 berlawanan arah dengan posisi target dari hadapan kita (misalnya posisi target berada pada sebelah kiri, maka kita akan memutar layer 3 ke sebelah kanan). Kemudian posisi target naik, layer 3 kembali ke posisi awal, posisi target turun. Intinya kita hendak memasukkan potongan tersebut ke posisi tujuan tanpa merusak layer 1. Setelah tahap ini selesai, maka rubik sekarang akan tampak seperti gambar berikut :



sumber : <http://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-beginners-method/> diakses pada tanggal 10 Desember 2014 pukul 12:35

- [LAYER 3] Finishing

Pada tahap ini, terdapat 3 tahap. Tahap-tahap tersebut diantaranya menyatukan *Edge* dengan *Center* (sama seperti tahap 1), menyelesaikan *Corner* pada top layer 3 tanpa memedulikan border telah sewarna atau belum, kemudian menyelesaikan border dengan menggunakan Perm. Mari kita mulai dengan menyatukan *Edge* dengan *Center*. Sekilas mengenai tahapan-tahapan ini, pada langkah yang pertama ini objektif kita adalah sama seperti yang dilakukan pada layer 1, hanya saja dengan kondisi yaitu tidak boleh menghancurkan layer 1 dan layer 2 yang telah dibuat. Cara yang dilakukan pada tahap ini pun sedikit berbeda dengan yang dilakukan pada layer 1. Cara ini lebih menggunakan rumus yang telah disediakan. Setelah langkah ini selesai, selanjutnya sama seperti pada layer 1, kita akan menyelesaikan *Corner*. Pada tahapan ini penyelesaian *Corner* juga tidak boleh menghancurkan layer 1 dan layer 2 tapi diperkenankan untuk menghasilkan border yang tidak sewarna (acak). Ada banyak cara untuk menyelesaikan langkah kedua ini. Meskipun banyak, cara-cara tersebut tidak akan menghancurkan layer 1 dan layer 2 asalkan pemain mengikuti petunjuk dengan benar. Terakhir, kita akan menyelesaikan border dengan menggunakan Perm. Sedikit mengenai Perm yaitu suatu langkah-langkah yang telah dibuat sedemikian rupa sehingga dapat membantu pemain dalam menyelesaikan border yang acak tersebut bergantung dengan kondisi rubik yang berbeda-beda pula. Maksud disini adalah Perm bergantung pada kondisi rubik setelah penyelesaian *Corner*. Perm juga turut membantu menghemat langkah yang diperlukan untuk menyelesaikan border. Oleh karena itu, Perm memiliki banyak jenis diantaranya A Perm (dasar), F Perm, H Perm, J Perm, Y Perm, dan masih banyak lagi. Semua jenis ini tergantung pada kondisi rubik setelah penyelesaian *Corner*. Pemilihan Perm yang benar dapat mengurangi efektifitas langkah kita dan tentu saja menghemat waktu penyelesaian. Tetapi, pemilihan Perm yang salah juga tidak terlalu dipermasalahkan sebagaimana rubik yang telah “menerima” perm yang salah dapat diselesaikan dengan A Perm asalkan langkah-langkah pada setiap Perm telah dilakukan dengan baik.



sumber : <http://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-beginners-method/> diakses pada tanggal 10 Desember 2014 pukul 12:35

IV. GOD’S NUMBER

A. God’s Number History

Angka Tuhan (God’s Number) pada Rubik merupakan langkah optimal yang cukup dilakukan untuk menyelesaikan permainan Rubik. Angka Tuhan sendiri ini adalah 20. Setiap posisi dari Rubik dapat diselesaikan dengan 20 *movements* atau kurang.

Dengan 35-tahun-CPU yang menggunakan komputer-komputer yang didonasi oleh Google, sekelompok peneliti telah memecahkan setiap langkah/posisi dari Rubik’s Cube dan menunjukkan bahwa tidak ada posisi yang memerlukan lebih dari 20 gerakan (*movements*).

Setiap Rubik Solver menggunakan algoritma, yaitu urutan langkah-langkah untuk memecahkan/menyelesaikan Cube. Salah satu algoritma menggunakan urutan langkah untuk terlebih dahulu menyelesaikan satu sisi (top face), kemudian menyelesaikan *middle Edges*, dsb. Ada banyak algoritma-algoritma yang berbeda, tetapi algoritma yang dapat dihafal oleh manusia biasanya membutuhkan lebih dari 40 langkah untuk menyelesaikannya.

Beberapa orang mungkin mengira Tuhan akan menggunakan algoritma yang jauh lebih efisien, yang selalu menggunakan langkah-langkah minimal yang dibutuhkan untuk menyelesaikan satu permainan; ini yang dikenal sebagai Algoritma Tuhan (God’s Algorithm). Angka yang dibutuhkan dalam algoritma ini dalam kasus terburuknya itulah yang disebut Angka Tuhan (God’s Number). Akhirnya, Angka Tuhan telah terbukti bernilai 20.

Pembuktian ini memerlukan waktu 15 tahun setelah peluncuran permainan Rubik ini untuk membuktikan bahwa 20 langkah merupakan langkah yang cukup untuk menyelesaikan permainan. Dan pada 15 tahun itu juga, peneliti-peneliti telah membuktikan bahwa 20 merupakan langkah yang cukup untuk mencakup setiap posisi yang ada.

Berikut sedikit sejarah dari Angka Tuhan :

Waktu	Lower Bound	Upper Bound	Gap	Catatan
Juli, 1981	18	52	34	Morwen Thistlethwaite

				menunjukkan bahwa 52 langkah cukup
Desember, 1990	18	42	24	Hans Kloosterman memperbaikinya menjadi 42 langkah
Mei, 1992	18	39	21	Michael Reid menunjukkan 39 langkah selalu cukup untuk menyelesaikan permainan
Mei, 1992	18	37	19	Dik Winter menurunkannya menjadi 37 langkah 1 hari kemudian!
Januari, 1995	18	29	11	Michael Reid menurunkan batas atas menjadi 29 langkah dengan menganalisa algoritma 2 fase Kociemba
Januari, 1995	20	29	9	Michael Reid membuktikan bahwa posisi "superflip" (<i>Corner</i> terletak pada posisi yang benar, tetapi <i>Edge</i> berwarna terbalik dengan <i>Center</i>) membutuhkan 20 langkah.
Desember, 2005	20	28	8	Silviu Radu menunjukkan 28 langkah selalu cukup
April, 2006	20	27	7	Silviu Radu memperbaikinya menjadi 27 langkah
Mei, 2007	20	26	6	Dan Kunkle dan Gene Cooperman membuktikan 26 langkah cukup
Maret, 2008	20	25	5	Tomas Rokicki memotong batas atas menjadi 25 langkah
April, 2008	20	23	3	Tomas Rokicki dan John

				Welborn mengurangnya lagi menjadi 23 langkah
Agustus, 2008	20	22	2	Tomas Rokicki dan John Welborn kembali mengurangi batas atas menjadi 22 langkah
Juli, 2010	20	20	0	Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, dan John Dethridge menunjukkan Angka Tuhan untuk Rubik adalah tepat 20

(sumber : <http://www.cube20.org/>, diakses pada tanggal 08 Desember 2014 pukul 11:00)

B. Mengenai Penemuan Angka Tuhan

Bagaimana peneliti dapat berhasil menemukan angka Tuhan tersebut? Berikut jawaban mengenai pertanyaan tadi :

- Peneliti melakukan partisi posisi-posisi menjadi 2,217,093,120 set dengan jumlah posisi sebanyak 19,508,428,800 tiap setnya. Setiap sub-sub masalah yang telah dipartisi ini ukurannya sudah cukup *fit* di memory pada PC modern, dan dengan cara memecah/memartisinya ini menyebabkan peneliti mampu menyelesaikan setiap set dengan cepat.
- Peneliti mengurangi jumlah set yang perlu diselesaikan menjadi 55,882,296 posisi dengan menggunakan kesimetrian dan set-covering.
- Peneliti tidak menemukan solusi optimal pada setiap posisi, tetapi hanya mendapatkan solusi dengan panjang 20 atau kurang.
- Peneliti menulis sebuah program yang mampu menyelesaikan 1 set permainan dalam 20 detik.
- Peneliti menggunakan sekitar 35-tahun-CPU untuk menemukan solusi dari semua posisi-posisi pada tiap 55,882,296 set-set yang ada.

V. KESIMPULAN

Pada dasarnya manusia selalu ingin mencari jalan terbaik dalam setiap persoalan yang ada seperti pada kasus God's Number pada rubik ini. Melalui kombinatorial inilah, salah satu ciptaan manusia yaitu God's Number ditemukan. God's Number merupakan angka yang bernilai 20. Dikatakan bahwa semua rubik yang diacak dapat diselesaikan cukup dengan 20 langkah saja. Akan tetapi,

manusia awan yang pikirannya lebih luas belum tentu bisa mengimplementasi God's Algorithm tersebut pada saat bermain. Pasalnya manusia memiliki kemampuan berpikir yang jauh lebih terbuka sehingga mampu melakukan sesuatu hal dengan berbagai cara tanpa bergantung pada cara yang itu-itu saja terkecuali para pemain-pemain rubik yang sudah *expert* di bidang ini. Kombinatorial sendiri sangat penting bagi kehidupan manusia. Selain aplikasinya pada menghitung God's Number pada Rubik, kombinatorial sendiri juga memiliki banyak aplikasi yang tidak kalah pentingnya. Pada God's Algorithm sendiri juga terdapat pada permainan Menara Hanoi (Hanoi Tower) dalam mengenumerasi banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan 64 buah piringan (disk) ke menara lainnya.

REFERENSI

- [1] www.cube20.com diakses pada tanggal 08 Desember 2014
- [2] <http://ruwix.com/the-rubiks-cube/how-to-solve-the-rubiks-cube-beginners-method/> diakses pada tanggal 10 Desember 2014
- [3] Munir, Rinaldi. 2003. Matematika Diskrit Edisi Kedua. Bandung: Penerbit Informatika.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2014



Luminto 13513080