

Russel Paradox dan The Barber Puzzle

Lucky Cahyadi Kurniawan / 13513061
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
lucky.cahyadi@s.itb.ac.id

Abstrak—Dimisalkan ada sebuah instansi pemerintah Indonesia yang mengumpulkan data seluruh wilayah Indonesia untuk dijadikan sebuah data besar mengenai Indonesia. Data tersebut kemudian diolah sedemikian rupa sehingga memudahkan ketika diperlukan untuk mencari data yang spesifik. Di dalam data yang besar itu tentu saja bisa dicari misalkan data luas wilayah setiap kota, jumlah penduduk, bahkan bisa juga data yang spesifik misalkan data penduduk yang lahir pada tahun 2000. Data yang besar tersebut di dalam matematika bisa dianggap sebagai sebuah himpunan yang di dalamnya berisi himpunan. Data yang berada di dalam data besar tersebut juga bisa dianggap sebagai sebuah himpunan yang khusus menangani syarat tertentu. Data ini tidak menjadi masalah, tetapi ketika syarat keanggotaan data besar tersebut diubah sehingga isinya merupakan data dari setiap data yang tidak memasukkan data itu sendiri sebagai elemen dari data tersebut. Sekarang pertanyaan yang diajukan adalah, apakah data besar tersebut merupakan elemen dari data besar itu sendiri?

Kata Kunci— Himpunan, Russell, Paradox, Barber Puzzle

I. PENDAHULUAN

Himpunan (*Set*) merupakan salah satu bidang bahasan dalam mata kuliah Matematika Diskrit, walau demikian kita sudah mengenal himpunan jauh sebelum kita mengambil mata kuliah ini. Himpunan sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari bahkan himpunan bisa saja ada di dekat kita, contoh yang sederhana lemari pakaian atau lemari buku Anda, lemari tersebut bisa saja disebut sebagai sebuah himpunan, yaitu himpunan pakaian atau buku yang anda miliki, contoh lain himpunan mahasiswa ITB, yang anggotanya merupakan seluruh mahasiswa ITB. Di dalam himpunan tersebut juga bisa saja terdapat himpunan-himpunan bagian (*Subset*), misalnya dalam kasus himpunan mahasiswa ITB, terdapat himpunan mahasiswa dengan fakultas Z, himpunan mahasiswa dengan unit X, atau himpunan mahasiswa dengan jurusan Y, ataupun himpunan mahasiswa angkatan P yang anggotanya juga terdapat di dalam himpunan mahasiswa ITB.

Teori himpunan itu sendiri baru ramai dibicarakan pada akhir abad ke-18, tetapi awal mula munculnya teori himpunan berawal sebelum tahun masehi dimulai. Pada jaman tersebut para matematikawan dan filsuf yunani masih belum menemukan definisi yang jelas untuk himpunan berhingga (*finite set*) dan himpunan tak

berhingga (*infinite set*). Ide tentang tak berhingga (*infinite*) pertama kali diemukakan oleh seorang filsuf yunani yang bernama Zeno dari Elea (490-425 tahun sebelum masehi). Walau kelihatannya tidak berhubungan, tetapi bahasan tentang tak berhingga inilah yang kemudian menjadi awal mula munculnya teori himpunan. Aristoteles (384-322 tahun sebelum masehi) menyatakan tak berhingga sebagai sesuatu yang tidak sempurna dan belum selesai sehingga tidak dapat dibayangkan karena tidak berbentuk dan memusingkan. Pada tahun 1847, Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Bolzano, 1781-1848) menyatakan himpunan sebagai sebuah perwujudan dari ide atau konsep yang dibentuk manusia yang susunan bagian-bagiannya tidak begitu diperhatikan. Bolzano kemudian berhasil mempertahankan pandangannya terhadap himpunan tak berhingga dengan cara mengkorespondensikan satu-satu setiap elemen himpunan tak berhingga tersebut dengan himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari himpunan tersebut. Ide ini kemudian digunakan dalam definisi himpunan berhingga.

Kemudian pada tahun 1874, Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (Cantor, 1845-1918) membuat sebuah artikel yang membahas mengenai tak berhingga, dan yang menjadi awal mula munculnya teori himpunan. Cantor terus mempublikasi artikel-artikel pekerjaannya dan pada akhirnya pada tahun 1895, Cantor mengeluarkan buku mengenai teori himpunan (*set theory*), yang isinya menjelaskan definisi himpunan, himpunan bagian, dan lain lain. Hasil pekerjaannya berhasil menjadi kontroversi pada saat itu, dan teori yang diberikan oleh Cantor tersebut disebut sebagai *naïve set theory*, tetapi matematikawan pada saat itu tidak begitu saja menerimanya dan terus meneliti kebenaran teori himpunan tersebut. Akhirnya pada tahun 1899 mulai muncul kontradiksi dan paradoks di dalam teori himpunan Cantor. Paradoks yang paling terkenal adalah Russel Paradox yang akan dibahas di dalam makalah ini. [1][2]

II. DASAR TEORI

A. Beberapa simbol yang sering digunakan

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, himpunan bilangan natural.

$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, himpunan bilangan bulat.

$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, himpunan bilangan bulat positif.

$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, \text{ and } q \neq 0\}$, himpunan bilangan rasional. contoh, $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$.

\mathbf{R} , himpunan bilangan riil,

\mathbf{R}^+ , himpunan bilangan riil positif, contoh, $1,2345 \in \mathbf{R}$.
 \mathbf{C} , himpunan bilangan kompleks, contoh, $1 + i \in \mathbf{C}$.

B. Cara Penulisan Himpunan

B.1. Keanggotaan

Notasi $a \in A$, menyatakan bahwa a anggota dari himpunan A. Notasi $a \notin A$ menyatakan bahwa a bukan anggota dari himpunan A.

B.2. Roster Method

Cara penulisan ini menuliskan isi himpunan secara rinci.

Contoh:

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C = \{a, \text{Johan}, \text{mobil}, \text{Bandung}\}$

Terkadang untuk elemen yang sudah jelas pendahulu dan penerusnya, digunakan notasi (...) untuk menyingkat penulisan. Misalnya, himpunan bilangan ganjil lebih kecil sama dengan $100 = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$ atau himpunan bilangan bulat (\mathbf{Z}) = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

B.3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi : $A = \{x \mid \text{syarat}\}$

Cara pembacaannya A adalah himpunan semua x di mana x memenuhi suatu syarat.

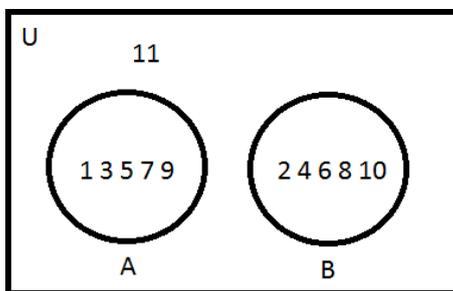
Contoh:

- $A = \{x \mid x \text{ adalah bilangan genap kurang dari } 10\}$
- $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x < 3\}$
- $C = \{x \mid f(x)\}$

B.4. Diagram Venn

Misal $U = \{1 \dots 11\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$



Gambar 1. Contoh Diagram Venn

C. Himpunan

Himpunan adalah sebuah kumpulan objek-objek yang berbeda dan tidak beraturan. Objek-objek tersebut kemudian disebut sebagai anggota (member) atau elemen dari sebuah himpunan. Biasanya himpunan ditandai dengan huruf kapital (A,B,C) dan huruf kecil biasanya dipakai sebagai anggota dari himpunan. Himpunan juga bisa berisi himpunan yang lain, misal $\{\mathbf{N}\}$ yang berarti himpunan dari himpunan bilangan natural.

C.1. Kardinalitas

Notasi : $n(A) / |A|$

Kardinalitas adalah banyaknya elemen di dalam sebuah himpunan.

Contoh:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$, $|A| = 5$
- $B = \{A, C, D, \{\{\}\}\}$, $|B| = 4$

C.2. Himpunan Kosong (Empty Set / Null Set)

Himpunan kosong adalah himpunan dengan kardinalitas 0.

Himpunan kosong ditandai dengan $\{\}/\emptyset$.

$\{\{\}\}/\{\emptyset\}$ bukan merupakan himpunan kosong karena memiliki sebuah elemen yaitu $\{\}$.

C.3. Himpunan Tunggal (Singleton Set)

Himpunan tunggal adalah himpunan dengan kardinalitas 1

Contoh :

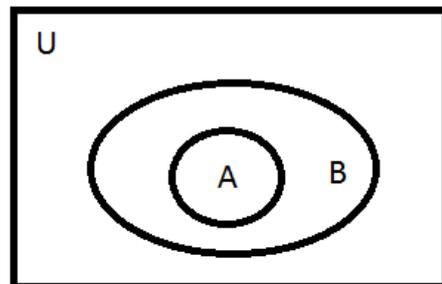
- $\{a\}$
- $\{\emptyset\}$

C.4. Himpunan Bagian

Notasi : $A \subseteq B$

Himpunan A merupakan himpunan bagian dari B jika setiap elemen A merupakan elemen B.

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$



Gambar 2. Diagram Venn yang menunjukkan A himpunan bagian dari B

Contoh:

- $\{a, b, c\} \subseteq \{a \dots z\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$

Teorema:

Untuk sembarang himpunan A

- (i). A adalah himpunan bagian dari himpunan A itu sendiri.
- (ii) himpunan kosong (\emptyset) adalah himpunan bagian dari A.
- (iii) jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$.

\emptyset dan A adalah himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari A.

Contoh:

$A = \{x,y,z\}$, maka \emptyset dan $\{x,y,z\}$ merupakan *improper subset* dari A .

$A \subset B \neq A \subseteq B$, pada $A \subset B$, A merupakan himpunan bagian dari B , tetapi $A \neq B$, jadi A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B , sedangkan $A \subseteq B$ memungkinkan $A = B$.

Contoh:

$\{x\}, \{x,y\}, \{y\}$ merupakan proper subset dari $\{x,y,z\}$.
dinotasikan $\{x\} \subset \{x,y,z\}, \{x,y\} \subset \{x,y,z\}, \{y\} \subset \{x,y,z\}$

[6]

D. Russell Paradox

Pada umumnya sebuah himpunan bukan elemen dari himpunan itu sendiri, misalnya himpunan sapi bukannya sebuah sapi, himpunan sepeda motor bukannya sebuah sepeda motor, tetapi kita bisa membuat sebuah kemungkinan dimana sebuah himpunan bisa menjadi elemen dari himpunan itu sendiri. Contoh ilustrasi dari *Russel Paradox* ini adalah himpunan dari semua himpunan yang tidak memasukkan himpunan itu sendiri sebagai elemen dari himpunan tersebut dan *the barber puzzle*

D.1 Himpunan dari semua himpunan yang tidak memasukkan himpunan itu sendiri sebagai elemen dari himpunan tersebut

Menurut Bertrand Russel, kita dapat membuat sebuah himpunan S , yang merupakan himpunan dari semua himpunan yang himpunan tersebut bukanlah elemen dari himpunan itu sendiri.

$$S = \{ A \mid A \text{ adalah himpunan dan } A \notin A \}$$

$$S \in S \leftrightarrow S \notin S$$

yang bernilai benar dan mengakibatkan kontradiksi

Ketika diberi pertanyaan apakah S merupakan elemen dari S itu sendiri, jawabannya bukan ya dan bukan tidak. Karena jika $S \in S$, maka S memenuhi syarat pertama, tetapi tidak memenuhi syarat ke-2 maka S harus dikeluarkan dari himpunan S sehingga $S \notin S$, tetapi ketika $S \notin S$ maka S memenuhi syarat pertama dan ke-2, jika S dimasukkan ke dalam S maka akan menyatakan bahwa $S \in S$ sehingga S harus dikeluarkan. Kejadian ini berulang terus menerus sehingga jawaban dari pertanyaan tersebut adalah bukan ya dan bukan tidak yang menghasilkan sebuah paradoks. Untuk membantu menjelaskan penemuannya itu secara lebih mudah, maka Russell membuat sebuah teka-teki yang disebut *the barber puzzle* yang solusinya sama dengan *russel paradox*. [3]

D.2 The Barber Puzzle

Di sebuah kota terdapat seorang tukang cukur yang mencukur semua laki-laki dan hanya laki-laki yang tidak mencukur dirinya sendiri di kota tersebut. Pertanyaan yang diberikan adalah apakah tukang cukur tersebut mencukur dirinya sendiri?

Solusi dari pertanyaan tersebut bukan ya dan juga bukan tidak. Jika tukang cukur tersebut mencukur dirinya

sendiri maka dia termasuk kelompok orang yang mencukur dirinya sendiri, tetapi tukang cukur tersebut tidak pernah mencukur orang dari kelompok tersebut, sehingga tukang cukur itu tidak mencukur dirinya sendiri, tetapi jika tukang cukur itu tidak mencukur dirinya sendiri maka dia termasuk ke dalam kelompok laki-laki yang tidak mencukur dirinya sendiri dan tukang cukur tersebut mencukur setiap laki-laki yang ada di dalam kelompok tersebut sehingga tukang cukur tersebut mencukur dirinya sendiri.

Pada akhirnya kalimat “tukang cukur tersebut mencukur diirnya sendiri” atau “tukang cukur tersebut tidak mencukur dirinya sendiri” memiliki 2 buah nilai, yaitu benar dan salah

E. Menghindari Russel Paradox

Kemudian Russel pun menawarkan 2 buah solusi agar paradoks ini tidak terjadi, yaitu dengan menggunakan *type theory* atau *axiomatic set theory*.

E.1 Type Theory

Di dalam *type theory*, cara yang digunakan untuk menghindari paradoks ini adalah dengan cara mengelompokkan kalimat-kalimat ke dalam suatu tingkatan-tingkatan. Pada tingkat terendah berisi kalimat-kalimat yang berhubungan dengan sebuah atau banyak elemen, pada tingkat selanjutnya berisi kalimat-kalimat yang berhubungan dengan sebuah atau banyak himpunan, level selanjutnya lagi berisi kalimat-kalimat yang berhubungan dengan sebuah atau banyak himpunan dari himpunan, dan begitu seterusnya.

Jadi sekarang paradoks bisa dihindari karena sebuah syarat / kondisi yang diberikan agar suatu elemen bisa masuk ke dalam himpunan, hanya berlaku jika mereka berada di level atau jenis yang sama. Jika diterapkan pada *Russel paradox*, maka S tidak dapat menjadi elemen dari dirinya sendiri karena perbedaan level/jenis, isi dari himpunan S memiliki level di mana mereka adalah himpunan, sedangkan S memiliki level sebagai himpunan dari himpunan, tetapi *type theory* menuai banyak kritik karena dianggap hanya menyelesaikan sebagian paradoks saja.

E.2 Axiomatic Set Theory

Lalu digunakanlah *axiomatic set theory* sebagai cara lain untuk menghindari paradoks. *Axiomatic set theory* yang digunakan merupakan *Zermelo-Fraenkel set theory*, yang di jaman modern ini paling umum digunakan. *Zermelo-Frankel set theory* bekerja dengan cara membatasi teori himpunan yang dibuat oleh Cantor, teori himpunan ini membatasi operasi apa yang diperbolehkan dan kapan operasi tersebut diperbolehkan. Teori ini tidak bekerja dengan cara membandingkan elemen yang memenuhi suatu aturan kemudian dimasukkan ke dalam himpunan, tetapi teori ini bekerja dengan membandingkan himpunan dan aturan yang diberikan dengan subset dari himpunan yang diberikan yang memenuhi aturan yang

diberikan. [4][5]

III. CONTOH PERSOALAN

Dimisalkan ada sebuah instansi pemerintah Indonesia yang mengumpulkan data seluruh wilayah Indonesia untuk dijadikan sebuah data besar mengenai Indonesia. Data tersebut kemudian diolah sedemikian rupa sehingga ketika diperlukan untuk mencari data yang spesifik, data tersebut mudah dicari. Data yang ada di dalam data Indonesia tersebut bisa dianggap sebagai sebuah himpunan, misalnya data mengenai luas wilayah suatu tempat merupakan sebuah himpunan luas wilayah suatu tempat, data penduduk suatu tempat menjadi himpunan penduduk di suatu tempat dan sebagainya. Lalu data Indonesia tersebut bisa dianggap sebagai himpunan yang berisi himpunan. Jika dibiarkan begini data Indonesia sudah benar sebagai sebuah wadah yang berisi himpunan data, bahkan apabila data Indonesia tersebut dijadikan elemen dirinya sendiri, tidak akan memberikan pengaruh apa-apa, hanya memasukkan data Indonesia ke dalam data Indonesia, tetapi ketika syarat diubah seperti dalam *Russel Paradox*, misalkan data Indonesia adalah B

$$B = \{A \mid A \text{ adalah himpunan dan } A \notin A\}$$

maka hal ini akan menjadi masalah untuk data Indonesia.

Awalnya data Indonesia tersebut tidak memiliki elemen dirinya sendiri di dalamnya, sehingga data Indonesia tersebut memenuhi syarat untuk masuk menjadi elemen data Indonesia tersebut, tetapi hal itu menimbulkan permasalahan yang lain karena data besar tersebut jadi memiliki elemen dirinya sendiri di dalamnya yang menyalahi syarat keanggotaan data tersebut sehingga elemen data besar tersebut harus dikeluarkan dari data, tetapi hal ini kembali mengakibatkan data besar tersebut memenuhi syarat untuk menjadi elemen dari data besar tersebut dan hal ini berulang terus menerus dan mengakibatkan paradoks. Dan mengakibatkan

$$B \in B \leftrightarrow B \notin B$$

yang menghasilkan nilai benar. Karena kalimat “data Indonesia merupakan elemen dari data Indonesia” atau “data Indonesia bukan merupakan elemen dari data Indonesia” memiliki 2 nilai, yaitu benar dan salah

Pertama-tama dimisalkan dulu isi dari data Indonesia, misalkan di dalamnya ada data nama-nama kota di suatu wilayah (elemen: nama kota), data nama-nama penduduk (elemen: nama penduduk) di suatu wilayah, data pulau-pulau di Indonesia (elemen: nama pulau), data lengkap seorang penduduk (elemen: nama, umur, tanggal lahir, dll), data lengkap sebuah kota (elemen: luas wilayah, jumlah penduduk, walikota, dll.), dan lain lain.

Jika kita menyelesaikan paradoks ini dengan *type theory*, misal kita asumsikan bahwa elemen-elemen

(nama orang, luas wilayah, nama pulau, dll) memiliki tingkat 0, himpunan dari elemen (data nama kota, data nama penduduk di suatu wilayah, dll) memiliki tingkat 1, dan himpunan dari himpunan (data Indonesia) memiliki tingkat 2. Maka notasi himpunan menjadi

$$B = \{A \mid A \text{ adalah himpunan, } A \text{ bertingkat } 1 \text{ dan } A \notin A\}$$

Sehingga data Indonesia tidak mungkin menjadi elemen dirinya sendiri.

Jika kita menyelesaikan paradoks ini dengan *Axiomatic Set Theory*, pertama kita berikan sebuah bentuk dalam postulat abstraksi (*axiom of abstraction*), yaitu

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow f(x))$$

Dimana $f(x) = x \notin x$ sehingga

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \notin x)$$

Ketika kita instansiasi $x = y$ maka muncullah bentuk

$$y \in y \leftrightarrow y \notin y$$

yang sama dengan kontradiksi pada *Russel Paradox*. Jika kita menginstansiasi y dengan B dalam kasus ini. Untuk menghindari paradoks ini maka diubahlah bentuk awal

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow f(x))$$

menjadi

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \in z \ \& \ f(x))$$

Dan $f(x) = x \notin x$ sehingga

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \in z \ \& \ x \notin x)$$

Kembali instansiasi $x = y$ dan $z = B$ sehingga

$$(y \in y \leftrightarrow y \in B \ \& \ y \notin y)$$

yang tidak akan memberikan kontradiksi, untuk membuktikannya instansiasi y dengan B maka

$$(B \in B \leftrightarrow B \in B \ \& \ B \notin B)$$

yang menghasilkan nilai salah sehingga tidak menghasilkan sebuah kontradiksi. [7]

IV. KESIMPULAN

Walaupun *Russel Paradox* ini kita anggap sebagai hal yang bisa diabaikan karena tidak mungkin terjadi di dunia nyata, tetapi para matematikawan pada jaman tersebut menganggap hal ini sebagai sebuah hal yang menarik dan

membahas persoalan ini.

Karena muncul *Russel Paradox* ini juga lah teori himpunan yang sekarang kita pakai menjadi lebih sempurna

V. UCAPAN TERIMAKASIH

Pertama-tama saya ucapkan terimakasih kepada Tuhan, karena dengan rahmatnya lah saya bisa menyelesaikan makalah ini. Kemudian saya juga mengucapkan terimakasih kepada Ibu Harlili dan Bapak Rinaldi Munir selaku dosen mata kuliah IF 2120 Matematika Diskrit yang telah banyak membagi ilmunya selama semester ini. Dan juga pihak-pihak lain yang telah membantuk penulis dalam penulisan makalah ini.

REFERENCES

- [1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html
Tanggal akses : 7 Desember 2014, pukul 12:04
- [2] <http://www.mathresource.iitb.ac.in/project/history.htm>
Tanggal akses : 7 Desember 2014, pukul 15:12
- [3] http://www.suitcaseofdreams.net/Paradox_Russell.htm
Tanggal akses : 10 Desember 2014, pukul 00:21
- [4] http://www.suitcaseofdreams.net/Set_theory_Paradox.htm
Tanggal akses : 10 Desember 2014, pukul 09:35
- [5] S. Epp, Susanna. 2010. *Discrete Mathematics with Applications*, Fourth Edition. Cengage Learning
- [6] Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete M Mathematics and Its Application*, Seventh Edition. McGraw–Hill International Edition: New York.
- [7] <http://philogb.github.io/notes/zermelo-fix-russell-paradox/>
Tanggal akses 10 Desember 2014, pukul 21:58

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2014



Lucky Cahyadi Kurniawan 13513061