

# Pembuktian Sifat Barisan Keterbagian Kuat pada Barisan Fibonacci

Aufar Gilbran – 13513015<sup>1</sup>

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

<sup>1</sup>aufargilbran@students.itb.ac.id

**Abstrak**—Teori bilangan adalah salah satu cabang paling tua dan paling dasar dalam matematika. Banyak penemuan yang ditemukan dengan bantuan teori bilangan, salah satunya adalah penemuan tentang barisan. Banyak sekali barisan bilangan dalam matematika dan masing-masing memiliki definisi dan kegunaannya. Salah satu contoh barisan dalam matematika adalah barisan Fibonacci. Barisan Fibonacci adalah salah satu barisan yang banyak digunakan dengan memanfaatkan sifat barisan Fibonacci seperti identitas, keprimaan, keterbagian. Dengan membuktikan satu demi satu sifat Fibonacci menggunakan metode induksi dan teori bilangan, kita akan menemukan salah satu sifat pada barisan Fibonacci yaitu  $f_{pb}(F_m, F_n) = F_{f_{pb}(m,n)}$  atau biasa disebut sebagai sifat barisan keterbagian kuat.

**Kata Kunci**—Teori bilangan, barisan Fibonacci, induksi, sifat barisan keterbagian.

## I. PENDAHULUAN

Dalam matematika, terdapat banyak barisan bilangan. Masing-masing barisan memiliki definisi dan aplikasinya. Salah satu contohnya adalah barisan Fibonacci yang dikenalkan oleh Leonardo Bonacci.

Pada tahun 1202, Leonardo Bonacci (atau lebih dikenal sebagai Fibonacci) mengenalkan sebuah barisan pada bukunya yang berjudul *Liber Abaci*, yang didefinisikan sebagai

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (1)$$

dengan  $F_0 = 0$  dan  $F_1 = 1$ .

Sudah banyak sifat barisan Fibonacci yang sudah ditemukan dimulai dari (1) yaitu identitas, keprimaan, dan sifat-sifat lainnya sampai akhirnya dapat digunakan oleh berbagai bidang keilmuan lainnya. Salah satu contoh aplikasi barisan Fibonacci adalah untuk membuat pembangkit bilangan acak semu.

Namun, perlu dipertanyakan apakah sifat-sifat terkait barisan Fibonacci benar. Hal ini dilakukan agar tidak terjadi kerugian besar karena asumsi seperti pada permasalahan Y2K yang terjadi pada tahun 2000.

Dalam membuktikan sifat suatu barisan, kita

membutuhkan metode pembuktian dan juga dasar teori yang terkait dengan barisan. Dalam makalah ini, kita akan melihat bagaimana menggunakan metode induksi dan teori bilangan untuk membuktikan kebenaran sifat barisan Fibonacci. Secara khusus, kita akan membuktikan sifat barisan keterbagian pada barisan Fibonacci dengan menggunakan metode induksi dan teori bilangan.

## II. DASAR TEORI

Pada bab ini, penulis akan mendefinisikan dasar teori yang akan digunakan dalam bab-bab selanjutnya.

### A. Induksi

Induksi adalah salah satu metode pembuktian langsung untuk membuktikan sebuah proposisi untuk seluruh bilangan natural [1]. Induksi dilakukan dengan tiga langkah sebagai berikut

1. Membuktikan bahwa proposisi benar dengan basis induksi. Basis induksi biasanya adalah  $n_0$ , dengan  $n_0$  adalah batas bawah bilangan dimana proposisi tersebut benar.
2. Buat hipotesis yang terkait dengan proposisi. Hipotesis dibuat dengan asumsi hipotesis tersebut benar untuk bilangan natural berurutan dari  $n_0$ .
3. Buktikan bahwa jika  $k=n$  adalah benar, maka  $k=n+1$  juga benar. Pada langkah ini, kita dapat menggunakan hipotesis untuk membuktikannya.

Kita dapat menyatakan proposisi benar untuk setiap bilangan natural yang lebih besar atau sama dengan  $n_0$  dengan metode induksi [1]. Hal ini dikarenakan ketika kita membuktikan  $n_0$  benar, kita membuktikan bahwa  $n_0+1$  juga benar. Ketika kita membuktikan  $n_0+1$  benar, kita membuktikan  $n_0+2$  juga benar dan seterusnya sehingga proses induksi mencakup seluruh bilangan mulai dari  $n_0$  dan seterusnya.

Untuk lebih jelasnya, mari kita gunakan metode induksi untuk membuktikan

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}, \quad n \geq 1$$

Mari kita coba buktikan proposisi tersebut dengan metode induksi.

1. Buktikan untuk basis induksi proposisi tersebut benar. Basis induksi pada proposisi ini adalah  $n_0=1$ . Maka

$$1 = \frac{1^2+1}{2}$$

Terbukti bahwa untuk basis induksi proposisi tersebut benar.

2. Buat hipotesis terkait proposisi, asumsikan  $n=k$  dan untuk seluruh bilangan natural  $k=1, 2, 3, \dots, n$  proposisi tersebut benar.

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k^2+k}{2}$$

3. Buktikan jika  $k=n$  benar, maka  $k=n+1$  juga benar.

$$1+2+3+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}$$

Karena  $k=n$  benar, kita bisa gunakan hipotesis dalam pembuktian.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n^2+n}{2}$$

Dengan menambahkan  $n+1$  pada masing-masing sisi, kita akan mendapatkan

$$1+2+3+\dots+(n+1) = (n+1) + \frac{n^2+n}{2}$$

Sederhanakan dan kita akan dapatkan bahwa hipotesis pada saat  $k=n+1$  juga benar.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+(n+1) &= \frac{2(n+1)+n^2+n}{2} \\ &= \frac{2n+2+n^2+n}{2} \\ &= \frac{(n^2+2n+1)+(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Karena hipotesis benar saat  $k=n$  dan  $k=n+1$ , maka proposisi awal kita juga benar.

## B. Keterbagian

Notasi  $a|b$  menyatakan bahwa  $a$  habis membagi  $b$ . Kita sebut  $a$  habis membagi  $b$  jika terdapat bilangan bulat  $c$  sehingga  $b=ac$ .

Sifat habis membagi pada bilangan bulat yang akan

digunakan adalah:

1. Pada persamaan  $a=b+c$ , jika  $d|a$  dan  $d|b$ , maka  $d|c$ .
2. Pada persamaan  $a=b+c$ , jika  $d|b$  dan  $d|c$ , maka  $d|a$ .

Barisan keterbagian adalah sebuah barisan bilangan bulat  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dimana untuk semua bilangan natural  $m, n$ , berlaku

$$\text{jika } m|n \text{ maka } a_m|a_n$$

sehingga ketika suatu indeks kelipatan indeks yang lain, maka suku di indeks tersebut kelipatan suku di indeks yang lain [2].

Barisan keterbagian kuat adalah sebuah barisan bilangan bulat  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dimana untuk semua bilangan natural  $m, n$ , berlaku

$$\text{fpb}(a_m, a_n) = a_{\text{fpb}(n, m)}$$

dengan  $\text{fpb}(m, n)$  adalah faktor perbagi terbesar dari  $m$  dan  $n$  [2]. Barisan keterbagian kuat juga merupakan barisan keterbagian, karena jika  $m|n$  maka  $\text{fpb}(m, n)=m$ . Maka menurut barisan keterbagian kuat,  $\text{fpb}(a_m, a_n)=a_m$  sehingga  $a_m|a_n$ .

## C. Algoritma Euclidean

Dalam buku *Elements*, Algoritma Euclid muncul sebagai solusi untuk permasalahan

“Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure.” [3]

Apa yang Euclid sebut sebagai *common measure* adalah *common divisor* atau faktor pembagi.

Algoritma Euclid muncul berdasarkan dua buah observasi. Definisikan  $F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$  dan  $\text{fpb}(a, b)$  sebagai fungsi yang menghasilkan faktor pembagi terbesar dari  $a$  dan  $b$ , maka

1. Jika  $b|a$  maka  $\text{fpb}(a, b)=b$  [3].

Ini benar karena tidak ada bilangan yang memiliki faktor pembagi terbesar lebih besar daripada bilangan itu sendiri.

2. Jika  $a=bt+r$  untuk bilangan bulat  $t$  dan  $r$  maka  $\text{fpb}(a, b)=\text{fpb}(b, r)$  [3].

Setiap faktor pembagi  $a$  dan  $b$  pasti habis membagi  $r$  menurut sifat keterbagian 1. Maka dari itu,  $\text{fpb}(a, b)$  juga habis membagi  $r$ . Karena  $\text{fpb}(a, b)|b$ , maka  $\text{fpb}(a, b)$  adalah faktor pembagi  $b$  dan  $r$ , sehingga berlaku  $\text{fpb}(a, b) \leq \text{fpb}(b, r)$ . Hal ini berlaku juga sebaliknya karena setiap faktor pembagi  $b$  dan  $r$  juga membagi  $a$  menurut sifat keterbagian 2.

Algoritma Euclid dimulai dengan dengan  $\text{fpb}(a, b)$ , yang kemudian jika  $a=bt+r$ , kita cari  $\text{fpb}(b, r)$  dan seterusnya sampai suatu ketika, saat kita ingin mencari  $\text{fpb}(a', b')$  dimana  $a'|b'$ , maka kita dapatkan  $\text{fpb}(a, b)=\text{fpb}(b, r)=\text{fpb}(a', b')=a'$ .

Sebagai contoh, mari kita cari  $fpb(2322,654)$ .

$$\begin{array}{ll} 2322=654 \cdot 3+360 & fpb(2322,654)=fpb(654,360) \\ 654=360 \cdot 1+294 & fpb(654,360)=fpb(360,294) \\ 360=294 \cdot 1+66 & fpb(360,294)=fpb(294,66) \\ 294=66 \cdot 4+30 & fpb(294,66)=fpb(66,30) \\ 66=30 \cdot 2+6 & fpb(66,30)=fpb(30,6) \\ 6|30 & fpb(30,6)=6 \end{array}$$

Maka,  $fpb(2322,654)=6$ .

Algoritma Euclid pasti akan berhenti karena pada setiap langkah menghasilkan permasalahan yang sama untuk pasangan bilangan bulat yang lebih kecil [3].

#### D. Identitas Barisan Fibonacci

Di dalam bukunya, Fibonacci mendefinisikan barisan Fibonacci sebagai (1). Seiring berjalannya waktu, matematikawan di berbagai penjuru dunia dan masa menemukan berbagai macam identitas barisan Fibonacci.

Banyak sekali identitas dari barisan Fibonacci, namun yang akan kita gunakan adalah relasi rekurens yang berbentuk

$$F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1} \quad (2)$$

untuk  $n, m \in \mathbb{N}$ , dengan  $F_1 = 1$  dan  $F_2 = 1$ .

Kita akan membuktikan bahwa (2) benar. Untuk membuktikan kebenarannya, kita akan menggunakan metode induksi dengan (2) sebagai proposisi yang ingin kita buktikan kebenarannya.

Agar tetap konsisten dengan simbol-simbol yang sudah didefinisikan sebelumnya, kita tukar peubah  $n$  dan  $m$  pada (2), sehingga (2) memiliki bentuk

$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1} \quad (3)$$

Kemudian, kita lanjutkan dengan melakukan langkah induksi pada (3)

1. Buktikan untuk basis induksi proposisi tersebut benar. Dalam kasus ini, kita memiliki dua buah peubah. Maka, kita dapat menentukan nilai tetap untuk  $m$ , dan ambil basis induksi  $n_0 = 1$ .

$$F_{m+1} = F_{m-1} F_1 + F_m F_2$$

Dengan fakta bahwa  $F_1 = 1$  dan  $F_2 = 1$ , maka persamaan sebelumnya dapat kita ubah menjadi

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_{m-1} \cdot 1 + F_m \cdot 1 \\ &= F_{m-1} + F_m \end{aligned}$$

Hasil yang kita dapat adalah (1) dengan peubah  $n$  disubstitusikan dengan  $m+1$ . Maka, (2) benar merupakan identitas barisan Fibonacci untuk basis induksi.

Dalam kasus ini, kita juga perlu membuktikan proposisi ini benar untuk  $n_0 = 2$ .

$$F_{m+2} = F_{m-1} F_2 + F_m F_3$$

Menurut (1),  $F_3 = F_2 + F_1$  (peubah  $n$  disubstitusikan dengan 3). Dengan fakta bahwa  $F_1 = 1$  dan  $F_2 = 1$ , maka persamaan sebelumnya dapat kita ubah menjadi

$$\begin{aligned} F_{m+2} &= F_{m-1} \cdot F_2 + F_m \cdot (F_2 + F_1) \\ &= F_{m-1} + F_m \\ &= F_{m-1} + F_m + F_m \end{aligned}$$

Menurut (1),  $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$  (peubah  $n$  disubstitusikan dengan  $m+1$ ). Maka, persamaan sebelumnya dapat kita ubah menjadi

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$$

Hasil yang kita dapat adalah (1) dengan peubah  $n$  disubstitusikan dengan  $m+2$ . Maka, (2) benar merupakan identitas barisan Fibonacci untuk basis induksi kedua.

2. Buat hipotesis terkait dengan proposisi, asumsikan untuk seluruh bilangan natural  $k = 2, 3, \dots, n$  proposisi tersebut benar.

$$F_{m+k} = F_{m-1} F_k + F_m F_{k+1}$$

3. Buktikan jika  $k = n$  benar, maka  $k = n+1$  juga benar. Untuk kasus ini kita juga memerlukan  $k = n-1$ .

Pada saat  $k = n-1$  kita dapatkan

$$F_{m+n-1} = F_{m-1} F_{n-1} + F_m F_n$$

dan pada saat  $n = k$  kita dapatkan

$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

Jika kita jumlahkan dua persamaan sebelumnya, kita akan mendapatkan persamaan

$$F_{m+n-1} + F_{m+n} = (F_{m-1} F_n + F_{m-1} F_{n-1}) + (F_m F_{n+1} + F_m F_n)$$

Dengan menggunakan (1), maka persamaan sebelumnya dapat kita ubah menjadi

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m-1} F_{n+1} + F_m F_{n+2} \\ F_{m+(n+1)} &= F_{m-1} F_{(n+1)} + F_m F_{(n+1)+1} \end{aligned}$$

Karena hipotesis benar saat  $k = n$  dan  $k = n+1$ , maka proposisi awal kita juga benar.

### III. PEMBUKTIAN SIFAT BARISAN KETERBAGIAN PADA BARISAN FIBONACCI

Barisan Fibonacci memiliki sifat barisan keterbagian. Pada bab ini, kita akan membuktikan sifat barisan keterbagian pada barisan Fibonacci.

Proposisi:

$$\text{Untuk } m, n \geq 1, F_m \mid F_{mn}$$

Pembuktian:

Kita akan gunakan metode pembuktian induksi terhadap peubah  $n$  dengan memisalkan  $m$  tetap. Lakukan langkah induksi

1. Pembuktian dengan basis  $n_0=1$ . Jelas bahwa  $F_m \mid F_m$ .
2. Asumsikan  $n=k$  dan hipotesis induksi benar untuk  $k=1,2,3,\dots,n$ .

$$\text{Untuk } m, k \geq 1, F_m \mid F_{mk}$$

3. Buktikan jika  $k=n$  benar, maka  $k=n+1$  juga benar.

$$F_{m(n+1)} = F_{mn+m}$$

Dengan (2) kita dapat ubah persamaan sebelumnya menjadi

$$F_{mn+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$$

Jelas bahwa  $F_m \mid F_m$  yang berarti  $F_m \mid F_{mk-1}F_m$  dan menurut hipotesis induksi  $F_m \mid F_{mk}$  yang berarti  $F_m \mid F_{mk}F_{m+1}$ . Dengan sifat keterbagian 2, maka  $F_m \mid F_{mn+m}$ .

Karena hipotesis benar saat  $k=n$  dan  $k=n+1$ , maka proposisi awal kita juga benar.

Proposisi diatas sama seperti mengatakan

$$\text{Untuk } m, n \geq 1, \text{ jika } m \mid n \text{ maka } F_m \mid F_n$$

Maka dari itu, kita telah membuktikan sifat barisan keterbagian dari barisan Fibonacci.

### IV. PEMBUKTIAN SIFAT BARISAN KETERBAGIAN KUAT PADA BARISAN FIBONACCI

Setelah membuktikan bahwa barisan Fibonacci memiliki sifat barisan keterbagian, kita akan mencoba untuk memperkuat sifat tersebut. Pada bab ini, kita akan membuktikan sifat barisan keterbagian kuat pada barisan Fibonacci.

Proposisi:

$$\text{Untuk } m, n \geq 1, \\ fpb(F_m, F_n) = F_{fpb(m,n)}$$

Lema 1:

$$\text{Untuk bilangan bulat } n, m, \\ fpb(m, n) = fpb(m, n \pm m)$$

Lema 1 benar karena sifat keterbagian 2 mengatakan faktor pembagi  $m$  dan  $n$  juga membagi  $n \pm m$ . Faktor pembagi terbesar  $n \pm m$  tidak akan dapat lebih besar daripada faktor pembagi  $m$  dan  $n$ .

Jelas untuk kasus  $n-m$ , faktor pembagi terbesarnya tidak akan lebih besar daripada  $n$ .

Sedangkan untuk kasus  $n+m$ , sifat keterbagian 2 mengatakan faktor pembagi  $m$  dan  $n$  juga membagi  $n+m$ . Namun, sifat keterbagian 1 mengatakan faktor pembagi terbesar  $n+m$  dan  $m$  juga membagi  $n$ . Karena itu faktor pembagi terbesar  $n+m$  dan  $m$  juga merupakan faktor pembagi dari  $n$ . Karena  $n$  lebih kecil dari  $n+m$ , tidak mungkin faktor pembagi terbesar  $m$  dan  $n$  lebih besar dari faktor pembagi terbesar  $n+m$  dan  $m$ .

Lema 2:

$$\text{Untuk } n > 0, fpb(F_n, F_{n-1}) = 1$$

Lema 2 dapat dibuktikan dengan metode induksi. Lakukan langkah induksi

1. Pada basis  $n_0=1$  jelas bahwa

$$fpb(F_1, F_0) = 1$$

Maka proposisi benar pada basis induksi.

2. Asumsikan  $n=k$  dan hipotesis induksi benar untuk  $k=1,2,3,\dots,n$ .

$$\text{Untuk } k > 0, fpb(F_k, F_{k-1}) = 1$$

3. Buktikan jika  $k=n$  benar, maka  $k=n+1$  juga benar.

Dengan (1) kita dapat ubah menjadi

$$fpb(F_n, F_{n+1}) = fpb(F_n, F_n + F_{n-1})$$

Lalu dengan observasi 2 algoritma Euclid kita dapat ubah persamaan sebelumnya menjadi

$$fpb(F_n, F_{n+1}) = fpb(F_n, F_{n-1})$$

Menurut hipotesis,  $fpb(F_n, F_{n-1}) = 1$  saat  $k=n$ . Maka persamaan tersebut menjadi

$$fpb(F_n, F_{n+1}) = 1$$

Karena hipotesis benar saat  $k=n$  dan  $k=n+1$ , maka proposisi awal kita juga benar.

Lema 3:

jika  $\text{fpb}(m, n) = 1$ ,  
maka  $\text{fpb}(m, nk) = \text{fpb}(m, k)$

[3] Euclid, *Euclid's Elements*, Green Lion Press (2002), (p. 158)

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Lema 3 benar karena faktor pembagi  $m$  hanya dapat membagi  $k$  dan tidak dapat membagi  $n$ . Sehingga faktor pembagi terbesar  $m$  dan  $nk$  sama dengan faktor pembagi terbesar  $m$  dan  $k$ .

#### Pembuktian:

Misal  $n = mk + r$ ,  $0 \leq r < m$ . Kita akan mendapatkan bahwa

$$\begin{aligned} \text{fpb}(F_m, F_n) &= \text{fpb}(F_m, F_{mk+1}F_r + F_{mk}F_{r-1}) \text{ karena (2)} \\ &= \text{fpb}(F_m, F_{mk+1}F_r) \text{ karena } F_m \mid F_{mk} \\ &= \text{fpb}(F_m, F_r) \text{ karena Lema 2, 3} \end{aligned}$$

Jika kita hilangkan simbol fungsi  $F$ , indeks dari fungsi membentuk sebuah langkah pada algoritma Euclid. Maka, proses ini akan terus berlanjut sampai sisa  $r$  menjadi nol. Pada saat sisa  $r$  menjadi nol, kita tahu bahwa sisa  $r$  sebelumnya adalah faktor pembagi terbesar dari  $m$  dan  $n$ .

Apa yang telah kita lihat adalah melakukan algoritma Euclid pada  $F_m$  dan  $F_n$  berlaku paralel pada indeksnya. Pada saat kita sampai pada,  $\text{fpb}(m, n) = \text{fpb}(s, 0)$ , dan menyatakan bahwa  $\text{fpb}(m, n) = s$ , pada saat yang bersamaan kita dapat berkata bahwa  $\text{fpb}(F_m, F_n) = F_s$ . Maka

$$\text{fpb}(F_m, F_n) = F_s = F_{\text{fpb}(m, n)}$$

#### V. KESIMPULAN

Dari pembahas diatas, dapat disimpulkan bahwa barisan Fibonacci memiliki sifat barisan keterbagian kuat. Secara formal

$$\begin{aligned} \text{Untuk } m, n \geq 1, \\ \text{fpb}(F_m, F_n) = F_{\text{fpb}(m, n)} \end{aligned}$$

Selain itu, kita juga membuktikan bahwa setiap dua bilangan berurutan pada barisan Fibonacci koprima satu dengan lain.

#### VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Saya mengucapkan terima kasih kepada Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga saya masih diberikan waktu dan kesempatan untuk menyiapkan dan menulis makalah ini. Terima kasih kepada Bu Harlili dan Pak Rinaldi Munir atas bimbingan, pelajaran, dan nasihatnya selama berjalannya kuliah. Tidak lupa saya ucapkan terima kasih kepada keluarga dan teman-teman satu mata kuliah atas do'a, bantuan, dukungan yang diberikan.

#### REFERENSI

- [1] Franklin, J.; A. Daoud, *Proof in Mathematics: An Introduction*, Sydney: Kew Books (2011). (Ch. 8.)
- [2] Clark Kimberling, *Strong divisibility sequences and some conjectures*, The Fibonacci Quarterly 17 (1979), (p. 13–17)

Bandung, 10 Desember 2014



Aufar Gilbran - 13513015