

Representasi Model Pohon Berakar pada Permainan Hidra dalam Pembuktian Teorema Goodstein

Tifani Warnita (13513055)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
tifaniwarnita@students.itb.ac.id

Abstrak—Makalah ini menjelaskan bagaimana suatu graf berbentuk pohon berakar dapat digunakan sebagai representasi model dari Hidra Lerna, seekor reptil berkepala sembilan dalam mitologi Yunani Kuno untuk pembuktian kekonvergenan suatu deret yang bersifat rekursif. Teorema Goodstein yang dianggap tidak cukup dibuktikan dengan Aritmetika Peano menuntun Laurence Kirby dan Jeff Paris untuk membuat *Hydra Game*, sebuah permainan bertajuk usaha Herakles dalam membunuh Hidra yang direpresentasikan sebagai pohon berakar. Kirby dan Paris menjadikan permainan tersebut sebagai landasan dalam pembuktian Teorema Goodstein. Teorema Goodstein sendiri menjelaskan bahwa setiap Deret Goodstein pada akhirnya akan konvergen ke 0.

Kata kunci—Teorema Goodstein, Hidra, pohon berakar, rekursif

I. PENDAHULUAN

Herakles, anak dari Zeus dan Alkmene merupakan salah seorang pahlawan terbesar dalam mitologi Yunani Kuno. Kemasyhurannya tak terbantahkan lagi bahkan hingga zaman modern seperti saat ini. Di antara banyak cerita mengenai kepahlawanannya, salah satu yang paling terkenal adalah Dua Belas Tugas Herakles. Kedua belas tugas tersebut dilaksanakan oleh Herakles dalam rangka membersihkan dosa-dosa setelah membunuh keluarganya sendiri. Salah satu ujian yang paling terkenal dari tugas-tugas tersebut adalah tugas kedua, pertempuran Herakles melawan seekor makhluk bernama Hidra Lerna.



Gambar 1. Lukisan pada guci yang menggambarkan Hercules sedang melawan Hidra Lerna (Museum J. Paul Getty, Malibu, California)^[1]

Dalam mitologi Yunani, Hidra adalah seekor makhluk reptil menyerupai ular-naga dengan kepala berjumlah sembilan buah. Di antara kesembilan kepala Hidra Lerna, delapan tidak abadi dan satu abadi. Setiap kali Herakles berusaha memotong kepala Hidra ini, alih-alih berkurang, jumlah kepala Hidra tersebut justru bertambah. Setiap kepala yang Hidra yang dipotong Herakles akan digantikan oleh dua kepala lain yang tumbuh.

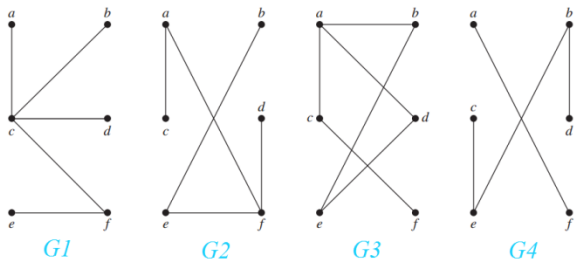
Legenda tersebut mengilhami dua orang matematikawan, Laurence Kirby dan Jeff Paris, menemukan *Hydra Game*, permainan Herakles melawan Hidra Lerna yang direpresentasikan dalam bentuk pohon berakar pada tahun 1982. Permainan ini merupakan sarana pembuktian kebenaran Teorema Goodstein mengenai Deret Goodstein. Dalam permainan ini, Kirby dan Paris membuktikan bahwa setiap strategi rekursif yang diterapkan pada permainan ini akan menuntun kepada kemenangan bagi Herakles atas Hidra Lerna, sesuai dengan Deret Goodstein yang pada akhirnya akan konvergen ke 0.

II. DASAR TEORI

Dasar ilmu yang digunakan pada makalah ini adalah mengenai pohon berakar yang merupakan cabang matematika khususnya matematika diskrit. Teorema Goodstein berkenaan dengan Deret Goodstein yang bersifat rekursif, serta sedikit penerapan dari *Cantor normal form*.

2.1 Pohon (*Tree*)

Pohon merupakan suatu bentuk graf terhubung namun tak berarah yang tidak memiliki sirkuit. Definisi dari graf sendiri merupakan struktur diskrit yang terdiri atas himpunan simpul (*vertex*) tak kosong dengan sisi (*edge*) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Seperti graf pada umumnya, pohon sering digunakan sebagai representasi model dalam memecahkan berbagai masalah. Berikut adalah contoh pohon dan bukan pohon.



Gambar 2. G1 dan G2 merupakan pohon sedangkan G3 dan G4 bukan pohon karena pada G3 terdapat sirkuit sedangkan graf G4 bukanlah graf terhubung^[2]

Misalkan untuk suatu graf (G) dengan simpul (V) dan sisi (E) di mana $G = (V, E)$ adalah graf tak berarah sederhana dengan jumlah simpul n . Maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen:

1. G adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dalam suatu lintasan tunggal.
3. G terhubung dengan semua sisinya adalah jembatan.
4. G tidak mengandung sirkuit.
5. Jumlah sisi pada G adalah $e = n - 1$ buah sisi.
6. G tidak mengandung sirkuit.
7. Penambahan satu sisi pada graf hanya akan membuat satu sirkuit saja.

Berikut adalah istilah-istilah yang biasa digunakan pada suatu pohon:

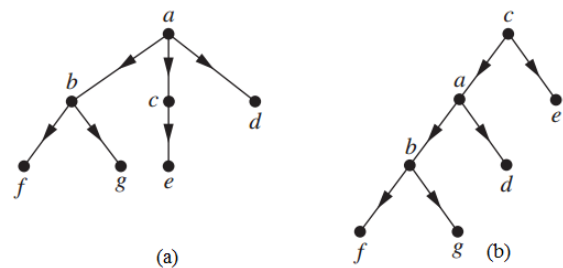
- a. Akar (*root*): suatu simpul dikatakan sebagai akar suatu pohon apabila simpul tersebut menjadi simpul teratas dari suatu pohon dan memiliki aras 0.
- b. Daun (*leaf nodes*): semua simpul yang tidak mempunyai anak lagi.
- c. Simpul dalam (*internal nodes*): semua simpul dari suatu pohon yang memiliki anak dan bukan merupakan daun.
- d. Cabang (*branch*): jalur yang menghubungkan akar dengan daun
- e. Simpul orang tua (*parent*): suatu simpul dikatakan simpul orang tua dari simpul A yang memiliki aras H apabila simpul tersebut terhubung dengan simpul A dan memiliki aras H-1. Suatu simpul pada pohon maksimal memiliki satu simpul orang tua.
- f. Simpul anak (*child*): suatu simpul dikatakan simpul anak dari simpul B yang memiliki aras H apabila simpul tersebut terhubung dengan simpul B dan memiliki aras H+1. Atau suatu simpul dikatakan sebagai simpul anak dari simpul C apabila simpul C adalah simpul orang tua dari simpul tersebut.
- g. Simpul bersaudara: dua atau lebih simpul dikatakan bersaudara apabila keduanya memiliki simpul orang tua yang sama.
- h. *Grandparent node*: suatu simpul C dikatakan *grandparent node* dari simpul E apabila simpul E

memiliki suatu simpul orang tua dan orang tua dari simpul tersebut adalah simpul C.

- i. *Leluhur (ancestor)*: leluhur dari suatu simpul adalah setiap simpul yang terhubung pada jalur dari simpul tersebut ke akar dan termasuk pula ke dalamnya akar dari pohon, namun tanpa simpul tersebut.
- j. *Keturunan (descendant)*: satu atau lebih simpul dikatakan sebagai keturunan dari simpul D apabila simpul D adalah leluhur dari simpul-simpul tersebut.
- k. *Upapohon (subtree)*: pohon yang akarnya dibentuk melalui pengambilan suatu simpul pada suatu pohon dengan elemen dari upapohon tersebut adalah seluruh keturunan dari simpul yang dijadikan akar beserta sisi yang menghubungkannya.
- l. *Hutan (forest)*: kumpulan pohon yang tidak terhubung satu sama lain.
- m. *Derajat (degree)*: jumlah upapohon atau jumlah anak pada suatu simpul.
- n. *Aras (level)*: aras dari suatu simpul adalah jumlah sisi yang menghubungkannya dengan akar.
- o. *Tinggi (height)* atau *kedalaman (depth)*: aras maksimum dari suatu pohon.

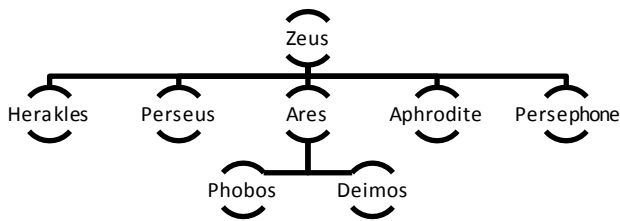
2.2 Pohon Berakar (*Rooted Tree*)

Pada banyak penerapan dari pohon, kerap kali sebuah simpul dari suatu pohon dianggap sebagai akar. Dengan menjadikan satu buah simpul sebagai pohon, setiap sisi pada pohon tersebut dapat diberi arah. Pohon berakar sendiri secara definisi mencakup pengertian tersebut di mana pohon berakar merupakan sebuah pohon dengan salah satu simpul yang dijadikan sebagai akar dan setiap sisi memiliki arah menjauh dari akar.



Gambar 3. Contoh pohon berakar dengan penulisan akar pada setiap sisinya. Pada Gbr. 3(a), simpul a menjadi akar dari pohon tersebut sedangkan pada Gbr. 3(b), simpul c menjadi akar dari pohon tersebut.

Sebagai perjanjian, telah disepakati bahwa arah-arah yang digambarkan pada setiap sisi dari suatu pohon berakar dapat dihilangkan. Berikut adalah contoh pohon berakar keluarga Dewa Zeus dengan simpul menggambarkan anggota keluarga sedangkan sisi menggambarkan hubungan ayah dan anak.



Gambar 4. Pohon keluarga Zeus

Sesuai dengan representasi pohon untuk keluarga Zeus pada Gbr. 4 di atas, kumpulan simpul terdiri atas Zeus, Hercules, Perseus, Ares, Aphrodite, Persephone, Phobos, dan Deimos. Himpunan simpul tersebut menggambarkan setiap anggota keluarga Zeus dengan Zeus sebagai akar. Setiap sisi pada pohon berakar tersebut menggambarkan hubungan kekerabatan yang ada di mana arah yang dituju dari sisi tersebut adalah anggota keluarga yang hubungannya lebih muda, misalkan anak. Sisi yang menghubungkan Zeus dengan Herakles adalah hubungan kekerabatan antara ayah dan anak dengan Zeus sebagai ayah dan Herakles sebagai anak.

2.3 Teorema Goodstein

Pada tahun 1944, seorang matematikawan asal Inggris bernama Reuben Louis Goodstein mencetuskan idenya mengenai Deret Goodstein melalui makalahnya yang berjudul *On the Restricted Ordinal Theorem*. Menurut Teorema Goodstein, setiap Deret Goodstein pada akhirnya akan menuju ke 0. Deret Goodstein tersebut didefinisikan dalam sebuah konsep yang disebut notasi turunan basis n . Pada notasi basis n , apabila terdapat suatu n di mana n adalah bilangan asli lebih besar dari 1, maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian rupa sehingga m merupakan penjumlahan dari perpangkatan n dengan suatu koefisien tertentu.

$$m = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0 \quad (1)$$

Dengan setiap koefisien a_i memenuhi $0 \leq a_i < n$ dan $a_k \neq 0$. Berikut adalah contoh representasi turunan dari 53 dalam notasi basis 2, 266 dalam notasi basis 2, 100 dalam notasi basis 3 sesuai dengan persamaan (1):

$$\begin{aligned} 53 &= 32 + 16 + 4 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 \\ 266 &= 256 + 8 + 2 = 2^8 + 2^3 + 2^1 \\ 100 &= 81 + 18 + 1 = 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 3^0 \end{aligned}$$

Kedua contoh di atas tidak ditulis dalam bentuk notasi turunan basis n . Untuk mengubah suatu representasi basis n ke notasi turunan basis n , hal pertama yang perlu dilakukan adalah mengubah seluruh pangkat eksponen di dalam di dalam setiap bilangan eksponen yang ada ke dalam representasi notasi basis n sampai setiap angka

yang terbentuk adalah n atau kurang.

Berikut adalah notasi turunan basis n dari tiga contoh sebelumnya:

$$\begin{aligned} 53 &= 2^{2^2+1} + 2^{2^2} + 2^2 + 2^1 \\ 266 &= 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1 \\ 100 &= 3^{3+1} + 2 \cdot 3^2 + 3^0 \end{aligned}$$

Melalui bentuk notasi turunan basis n tersebut, terbentuklah suatu deret bernama Deret Goodstein atau $G(m)$ dengan m adalah urutan bilangan asli. Pada setiap Deret Goodstein, ambil sebuah bilangan asli positif m yang direpresentasikan dengan notasi turunan dengan basis n . Elemen pertama dari deret $G(m)$ adalah m sendiri. Untuk mendapatkan elemen selanjutnya dari deret $G(m)$, adalah dengan menuliskan m dalam bentuk notasi basis n . Setelah itu, ubah seluruh n menjadi $n + 1$ dan kurangi hasilnya dengan angka 1. Langkah tersebut terus dilakukan sampai didapatkan hasil akhir 0.

Basis	Notasi Turunan	Nilai
2	$2^1 + 1$	3
3	$3^1 + 1 - 1 = 3^1$	3
4	$4^1 - 1 = 3 = 4^0 - 1$	3
5	$5^0 + 2 - 1 = 2 = 5^0 + 1$	2
6	$6^0 + 1 - 1 = 1 = 6^0$	1
7	$7^0 - 1 = 0$	0

Tabel I. Deret Goodstein $G(3)$ untuk $m = 3$ dan basis awal $n=2$

Dari tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa secara rekursif, Deret Goodstein yang dimulai dengan m di mana $(m)_1 = m$ dan $k \geq 1$ didefinisikan sebagai:

$$(m)_{k+1} = \begin{cases} R_{k+1}((m)_k) - 1, & (m)_k > 0 \\ 0, & (m)_k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Sesuai fungsi rekursif di atas, Deret Goodstein merupakan deret rekursif dengan basis 0. Untuk nilai m yang tidak terlalu besar, maka mudah untuk dilihat bahwa Deret Goodstein untuk nilai tersebut akan menuju ke 0.

$$\begin{aligned} (1)_0 &= 1 \\ (1)_1 &= R_2(1) - 1 = 0 \\ (2)_0 &= 2 \\ (2)_1 &= R_2(2) - 1 = 3 - 1 = 2 \\ (2)_2 &= R_3(2) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ (2)_3 &= R_4(1) - 1 = 1 - 1 = 0 \\ (3)_0 &= 3 \\ (3)_1 &= R_2(3) - 1 = 3 + 1 - 1 = 3 \\ (3)_2 &= R_3(3) - 1 = 3 \\ (3)_3 &= R_4(3) - 1 = 2 \\ (3)_4 &= R_5(2) - 1 = 1 \\ (3)_5 &= R_6(1) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Namun, untuk nilai $m > 3$, menemukan kekonvergenan menuju 0 dari Deret Goodstein tidak semudah contoh-contoh di atas.

$$\begin{aligned} (4)_0 &= 4 \\ (4)_1 &= R_2(4) - 1 = 3^3 - 1 = 26 \\ (4)_2 &= R_3(26) - 1 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 - 1 = 41 \\ (4)_3 &= R_4(41) - 1 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 - 1 = 60 \\ (4)_4 &= R_5(60) - 1 = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 - 1 = 83 \\ (4)_5 &= R_6(83) - 1 = 2 \cdot 7^2 + 7 + 5 - 1 = 109 \\ (4)_6 &= R_7(109) - 1 = 2 \cdot 8^2 + 8 + 4 - 1 = 139 \\ &\dots \end{aligned}$$

Pada $G(4)$ seperti contoh di atas, Deret Goodstein berkembang begitu cepat pada setiap langkah rekursif yang dilakukan. Tetapi, $G(4)$ mencapai maksimum pada $3 \cdot 2^{402653210} - 1$, tetap berada pada nilai tersebut sebanyak $3 \cdot 2^{402653209}$ langkah, lalu nilainya mulai menurun, konvergen ke 0. Hal ini berlaku pula untuk nilai m lain dengan $m > 4$ pada $G(m)$ di mana Deret Goodstein $G(m)$ akan berkembang begitu cepat hingga akhirnya mencapai batas maksimum dari deret tersebut lalu menurun hingga akhirnya konvergen ke 0 meski dengan jumlah elemen deret yang begitu banyak.

2.4 Cantor Normal Form

Cantor normal form menyediakan cara standarisasi penulisan bilangan. Misalkan x sebagai suatu bilangan ordinal dan misalkan k adalah bilangan asli. ω dalam hal ini melambangkan bilangan tak hingga minimum pertama.

$$x = \omega^{\beta_1} c_1 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

Sesuai rumus di atas, $\langle \beta_i \rangle$ adalah deret menurun di mana dengan meningkatnya i maka nilai β_i akan menurun atau dapat pula dituliskan bahwa $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \dots > \beta_k$ serta $\langle c_i \rangle$ adalah bilangan positif tidak nol. Dalam hal ini, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \omega$, dan secara general, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega^n}$.

2.5 Tugas Kedua Herakles Melawan Hydra Lerna

Menurut mitologi yang ada, Herakles dalam rangka pembersihan dosa, mendapat beberapa tugas dari Eurystheus. Tugas kedua yang ia dapatkan adalah membunuh Hydra Lerna yang hidup di dekat rawa Lerna, sebelah selatan Mycenae.

As a second labour he [Eurystheus] ordered him to kill the Lernean hydra.

That creature, bred in the swamp of Lerna, used to go forth into the plain and ravage both the cattle and the country.

Now the hydra had a huge body, with nine heads, eight mortal, but the middle one immortal...

By pelting it with fiery shafts he forced it to come out,

and in the act of doing so he seized and held it fast. But the hydra wound itself about one of his feet and clung to him.

Nor could he effect anything by smashing its heads with his club, for as fast as one head was smashed there grew up two...^[3]

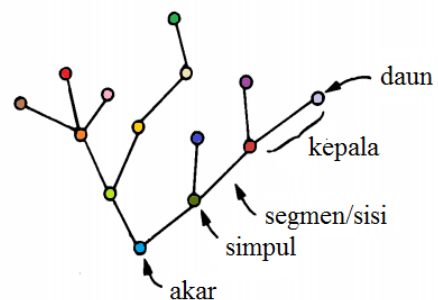
Sesuai dengan kutipan di atas, Hydra Lerna mampu membinasakan ternak di ladang. Darahnya beracun dan bahkan ada pula yang mengatakan bahwa napasnya dapat mematikan. Menurut deskripsi Apollodorus, Hydra Lerna memiliki kepala sejumlah sembilan buah. Setiap kali Herakles berusaha memotong kepalanya, alih-alih berkurang satu, justru tumbuh dua buah kepala Hydra yang baru.

Menurut legenda, Herakles diharuskan untuk memotong kepala abadi dari Hydra agar dapat dikalahkan. Pada akhirnya, atas bantuan Iolaos, sepupunya, Herakles mampu menyelesaikan tugas kedua ini dengan cara setiap kali berhasil memotong kepala dari Hydra Lerna, mereka harus menggunakan obor untuk membakar leher tersebut agar tidak menumbuhkan kepala lain yang tidak ada habisnya.

III. REPRESENTASI POHON BERAKAR PADA PERMAINAN HIDRA

Hydra Game, diciptakan oleh Laurence Kirby dan Jeff Paris, merupakan sebuah permainan yang menggambarkan Herakles, salah seorang pahlawan termasyhur Yunani, yang sedang menyelesaikan tugas keduanya dalam rangka pembersihan dosa. Tugas kedua Herakles tersebut tidak lain adalah membunuh Hydra Lerna, salah satu makhluk paling mengerikan dalam mitologi Yunani Kuno.

Pada permainan ini, Hydra direpresentasikan dalam bentuk pohon berakar yang dapat diibaratkan sebagai himpunan terbatas dari beberapa segmen garis atau sisi (*edge*) dengan setiap garisnya menghubungkan dua buah simpul (*node*). Sebagai pohon berakar, setiap simpul pada Pohon Hydra ini terhubung ke satu buah simpul yang ditetapkan sebagai akar pohon. Daun dari sebuah pohon berakar adalah simpul yang hanya memiliki satu buah sisi yang terhubung padanya dan simpul tersebut bukan merupakan akar. Maka dari itu, kepala dari Hydra adalah daun beserta sisi yang terhubung padanya.



Gambar 5. Representasi Hydra dalam bentuk pohon berakar^[4]

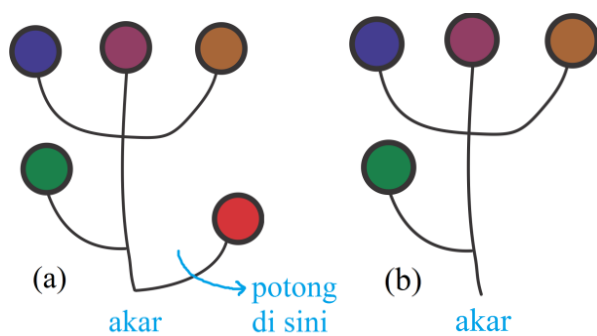
Sesuai dengan apa yang diceritakan pada legenda, mengalahkan seekor Hydra bukanlah perkara yang mudah bahkan bagi Herakles sekalipun. Setiap kali Herakles memotong salah satu saja kepala dari Hydra, maka alih-alih kepala Hydra yang semula berjumlah sembilan dapat berkurang, kepala dari Hydra tersebut justru tumbuh kembali dengan jumlah dua kali lipat. Sama halnya dengan apa yang ada pada kisah tersebut, Hydra dalam permainan ini juga memiliki perilaku yang serupa namun memiliki beberapa keadaan khusus. Jika dalam legenda Herakles harus membakar kepala setiap Hydra yang ia potong agar tidak tumbuh lagi, kali ini Herakles harus mencari cara lain karena pada permainan ini tidak ada satupun korek apalangi obor yang tersedia.

Jika Hydra diibaratkan sebagai sebuah pohon berakar bernama H dengan n adalah *stage*, maka (H, n) melambangkan Permainan Hydra yang sedang berlangsung.

Berikut adalah tata aturan dalam Permainan Hydra:

1. Pada setiap *stage*, Herakles dapat menentukan kepala mana yang ingin dia potong.
2. Apabila kepala (*leaf node*) yang dipotong oleh Herakles tidak memiliki *grandparent node* maka kepala Hydra akan hilang tanpa mengalami penambahan jumlah.
3. Apabila kepala (*leaf node*) yang dipotong oleh Herakles memiliki *grandparent node* maka kepala Hydra akan bertambah sejumlah perkalian dari n dengan upapohon yang terhubung ke simpul orang tua dari kepala yang baru saja dipotong dengan.
4. Herakles akan menang saat kepala Hydra sudah habis yang direpresentasikan dengan Pohon Hydra yang kosong.

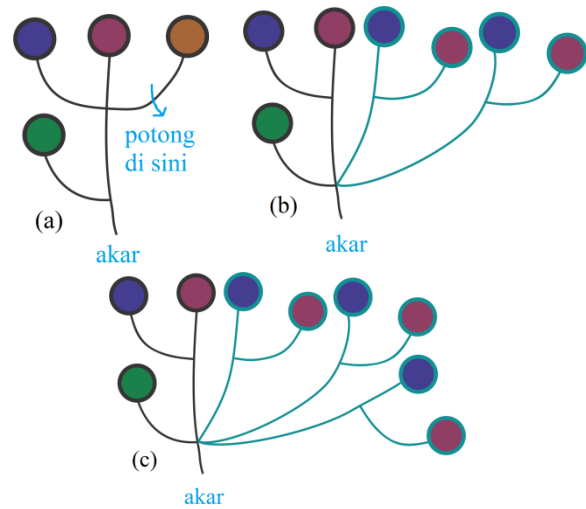
Berikut adalah contoh hal yang dapat terjadi akibat pemotongan kepala Hydra oleh Herakles pada setiap *stage* yang ada:



Gambar 6. Hasil pemotongan kepala Hydra menurut tata aturan 2. Gbr. 6(a). menggambarkan keadaan Hydra sebelum dipotong kepalanya dan Gbr. 6(b) menggambarkan keadaan Hydra setelah dipotong kepalanya.

Sesuai dengan Gbr. 6(a), pemain sebagai Herakles memilih untuk memotong kepala yang berwarna merah. Karena simpul tersebut tidak memiliki *grandparent node*, maka berlaku tata aturan nomor 2 yaitu kepala yang dipotong akan hilang dan tidak ada penambahan simpul

lain dalam bentuk apa pun sesuai yang ada pada Gbr. 6(b). Kondisi seperti ini tidak terpengaruh oleh n (*stage*) karena jumlah kepala pada Pohon Hydra hanya akan berkurang 1.



Gambar 7. Hasil pemotongan kepala Hydra menurut tata aturan 3. Gbr. 7(a) menggambarkan keadaan Hydra sebelum dipotong kepalanya sedangkan Gbr. 7(b) dan Gbr. 7(c) menggambarkan alternatif keadaan Hydra setelah dipotong kepalanya.

Selain itu, kondisi seperti pada Gbr. 7 juga dapat terjadi menurut tata aturan Permainan Hydra poin ketiga. Kali ini, kepala Hydra yang dipotong oleh Herakles disimbolkan dengan simpul berwarna coklat sesuai dengan Gbr. 7(a) Jika ditelusuri, simpul coklat ini memiliki *grandparent node* yang juga merupakan simpul ayah dari simpul hijau. Maka dari itu, alih-alih jumlah kepala Hydra berkurang sebanyak satu, kepala Hydra justru bertambah menurut aturan perkalian jumlah kepala yang terhubung dengan simpul orangtua yang sama dengan simpul coklat. Dalam hal ini, kepala yang dimaksudkan disimbolkan dengan simpul biru dan simpul ungu. Jumlah penambahan kepala Hydra berdasarkan pada *stage* permainan (n). Untuk $n = 2$, jumlah kepala Hydra akan bertambah sebanyak $2 \times n = 4$ seperti pada Gbr. 7(b), sedangkan untuk $n = 3$, jumlah kepala Hydra akan bertambah sebanyak $3 \times n = 6$ seperti pada Gbr. 7(c)

Selain itu, Hydra yang ada dapat pula direpresentasikan dalam bentuk senarai (*list*) yang berasal dari Pohon Hydra yang dibaca secara berurutan dari kiri ke kanan. Misalkan *nil* merepresentasikan senarai kosong, *concat*(x, y) adalah senarai yang didapatkan dari penggabungan x dengan y di mana x adalah elemen lebih kiri jika dibandingkan dengan senarai y yang lebih kanan.

Untuk contoh pada Gbr. 6(a), dapat dituliskan sebagai berikut dengan aturan $l = \text{concat}(\text{nil}, \text{nil})$.

$$\text{concat}(l, \text{concat}(\text{concat}(\text{concat}(l, \text{concat}(l, \text{nil})), \text{concat}(l, \text{nil})), \text{concat}(l, \text{nil})))$$

Asumsikan dua buah fungsi $\text{left}(\text{concat}(x, y)) = x$ dan $\text{right}(\text{concat}(x, y)) = y$ mengambil elemen

pertama dari senarai tidak kosong dan sisa dari senarai (*tail*). Maka pertandingan antara Herakles dan Hydra dapat diubah menjadi fungsi rekursif sebagai berikut.

$$H_0(x)$$

$$H_n(x) = \begin{cases} nil & x = nil \\ H_{n+1}(D_n(x)) & x \neq nil \end{cases}$$

$$D_n(x) = \begin{cases} left(x) & left(x) = nil \\ F_n(right(left(x)), right(x)) & left(left(x)) = nil \\ concat(D_n(left(x)), right(x)) & lainnya \end{cases}$$

$$F_n(y, x) = \begin{cases} x & n = 0 \\ concat(y, f_{n-1}(y, x)) & n \neq 0 \end{cases}$$

$H_n(x)$ pada fungsi rekursif di atas menggambarkan Hydra dengan x sebagai sebagai Hydra awal, dimulai pada *stage* n . Permainan akan berakhir saat $x = nil$ pada fungsi rekursif H_n di mana itu berarti Hydra telah berupa pohon kosong. Fungsi rekursif D_n menentukan apakah Herakles melakukan langkah yang sesuai dengan tata aturan nomor 2 atau 3. Selanjutnya, digunakan F_n untuk menghasilkan kepala baru sejumlah perkalian *stage* (n) dengan dengan $y = right(left(z))$ sampai x .

Menurut Kirby dan Paris, Herakles akan menang dan ini hanya bergantung pada masalah waktu yang berimbas pada jumlah *stage* yang harus dimainkan dan bukan permasalahan lagi bahwa kemenangan itu akan Herakles dapatkan atau tidak karena setiap strategi rekursif yang diterapkan oleh Herakles selamanya akan berujung pada kemenangan.

IV. PENGGUNAAN TEOREMA GOODSTEIN PADA PERMAINAN HIDRA

Teorema Goodstein mengenai Deret Goodstein yang pada akhirnya akan konvergen ke 0 dapat direpresentasikan melalui permainan Herakles melawan Hydra Lema ini. Melihat kembali pada Deret Goodstein yang dikatakan konvergen ke 0, cukup sulit untuk membuktikan Deret Goodstein dengan elemen pertama yang cukup besar karena deretnya akan naik membesar secara cepat, bahkan mungkin bisa mencapai tak hingga. Masalah di sini adalah bagaimana cara menemukan nilai penurunan dari angka tak hingga pada suatu Deret Goodstein.

Dalam rangka membuktikan Teorema Goodstein tersebut, kita mendefinisikan sebuah aturan mengenai urutan dari kumpulan bilangan asli dalam *Cantor normal form*.

1. Urutan pertama berisi bilangan asli, yaitu 0, 1, 2, 3, ...
2. Definisikan ω sebagai angka yang muncul setelah bilangan asli atau dapat dikatakan sebagai elemen pertama bilangan tak hingga.
3. Hitung nilai yang muncul setelah ω , yaitu $\omega +$

$$1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4 \dots$$

4. Seperti yang telah dilakukan pada langkah ketiga, definisikan setelah $2\omega, 3\omega, 4\omega, 5\omega, \dots$ Hitung pula angka yang muncul di antara $n\omega$ tersebut seperti pada langkah 3.
5. Definisikan ω^2 sebagai angka yang muncul setelah semua angka pada pada langkah 4. Ulangi langkah 3 sampai 4 untuk mendefinisikan angka-angka seperti $2\omega^2, 3\omega^2, 4\omega^2, 5\omega^2, \dots$ beserta angka-angka yang berada di antaranya.
6. Definisikan pula $\omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \dots$ beserta angka-angka yang berada di antaranya.
7. Deklarasikan pula $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots$ beserta angka-angka yang berada di antaranya.

Berdasarkan aturan di atas, maka kita dapat mendefinisikan urutan dari bilangan tak hingga sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 1 &< 2 < 3 < \dots < n < n + 1 < n + 2 < \dots \\ &< \omega < \omega + 1 < \omega + n < \omega + n + 1 < \dots \\ &< 2\omega < \dots < n\omega < \dots < \omega^2 < \dots < \omega^3 < \dots \\ &< \omega^\omega < \dots < \omega^{\omega^\omega} < \dots < \omega^{\omega^{\omega^\omega}} < \dots \end{aligned}$$

Sesuai dengan aturan di atas, maka kita bisa mengambil contoh untuk beberapa elemen pada Deret Goodstein. Misal untuk contoh-contoh sebelumnya, terdapat dua buah notasi turunan basis n dengan $n = 2$ dan $n = 3$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} G_1 &= 53 = 32 + 16 + 4 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 \\ G_2 &= 100 = 81 + 18 + 1 = 3^4 + 2 \cdot 3^2 + 3^0 \end{aligned}$$

Untuk mengubah 53 yang dinotasikan pada basis 2 ke dalam ω , maka ubah semua 2 ke bentuk ω . Hal yang sama berlaku pula untuk 100, ubah semua bentuk 3 ke dalam bentuk ω .

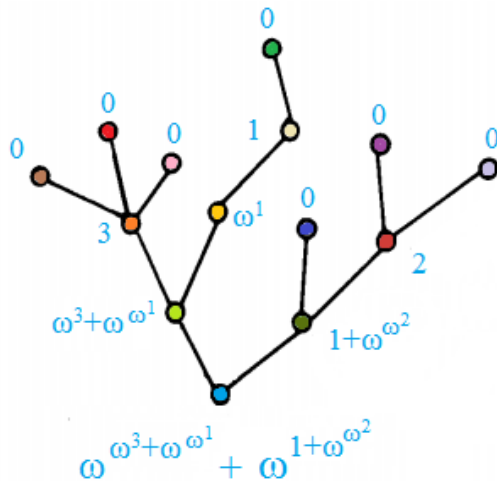
$$\begin{aligned} G_1 &= 53 = \omega^5 + \omega^4 + \omega^\omega + \omega^1 \\ G_2 &= 100 = \omega^4 + 2 \cdot \omega^2 + \omega^0 \end{aligned}$$

Untuk menjadikan suatu Pohon Hydra sebagai landasan pembuktian Teorema Goodstein, perlu digambarkan kompleksitas dari Pohon Hydra yang terbentuk melalui beberapa tahap secara rekursif. Berikut langkah-langkah untuk mendefinisikan kompleksitas dari Pohon Hydra:

1. Tulis angka 0 pada setiap daun yang ada.
2. Turun satu simpul ke simpul orangtua dari setiap daun. Nilai dari simpul ini adalah jumlah dari daun yang terhubung ke simpul ini.
3. Turun satu simpul. Jika hanya terdapat satu buah simpul anak dari simpul tersebut, maka nilai dari simpul ini adalah ω^L , dengan L adalah nilai dari simpul anak dari simpul tersebut. Jika simpul tersebut memiliki lebih dari satu anak dengan nilai L_1, L_2, \dots, L_n maka nilai dari simpul tersebut adalah $\omega^{L_1} + \omega^{L_2} + \dots + \omega^{L_n}$.
4. Lakukan kembali langkah 1-3 sampai mencapai

akar dari Pohon Hidra. Kompleksitas dari Hidra merupakan nilai dari akar Pohon Hidra tersebut.

Berikut adalah contoh perhitungan kompleksitas suatu Pohon Hidra.



Gambar 7. Bentuk penulisan kompleksitas dari pohon Hidra yang terdapat pada Gbr. 5.

Misalkan (H, n) merepresentasikan konfigurasi Permainan Hidra dan S sebagai strategi yang telah diambil oleh Herakles. Lalu, $(H)_n^S$ sebagai Hidra yang baru setelah strategi S digunakan kepada H pada *stage* n . Ini berarti konfigurasi permainan selanjutnya setelah S digunakan adalah $((H)_n^S, n + 1)$. Menurut Kirby dan Paris, untuk strategi S apapun, Hidra H , serta bilangan asli n , maka didapatkan $H >_{or} (H)_n^S$ yang berarti representasi Hidra pada *stage* n lebih besar daripada representasi Hidra pada *stage* $n + 1$ setelah menggunakan strategi S .

Untuk membuktikan bahwa Herakles akan selalu memenangkan pertempuran melawan Hidra, terdapat dua hal yang harus digaris bawahi, yaitu:

1. Jika Herakles memotong kepala yang memiliki kurang dari dua leluhur atau itu berarti kepala yang Herakles potong terhubung pada akar Pohon Hidra, maka total kepala yang ada akan berkurang sebanyak 1. Atau jika pada saat sebelumnya Pohon Hidra didefinisikan sebagai H , maka hasil yang didapat setelah pemotongan simpul tersebut adalah $H - 1$.
2. Jika Herakles memotong kepala yang memiliki dua atau lebih leluhur dan jika Herakles sedang berada pada *stage* n , maka suatu $\omega^{\alpha+1}$ akan berubah menjadi $\omega^\alpha n$ yang memiliki kompleksitas yang lebih kecil sesuai dengan aturan deret yang telah dijelaskan sebelumnya. Atau jika pada saat sebelumnya *grandparent node* didefinisikan sebagai $G = \omega^k$, maka hasil pemotongan kepala Hidra akan menjadi $G = n\omega^{k-1}$ untuk n yang terbatas.

Sesuai dengan dua hal di atas, maka setiap kali Herakles memotong kepala Hidra, maka kompleksitas

dari pohon tersebut akan terus berkurang. Hal itu berarti strategi apapun yang diterapkan oleh Herakles pada permainan ini akan selalu dapat membunuh Hidra, atau dapat dikatakan bahwa setiap strategi adalah strategi kemenangan. Dengan berlakunya teori tersebut, maka dapat dibuktikan pula bahwa Deret Goodstein memang konvergen ke 0.

V. KESIMPULAN

Deret Goodstein merupakan deret bilangan asli yang menurut Teorema Goodstein akan menuju ke 0 di mana deret tersebut memang merupakan sebuah deret rekursif dengan basis 0. Kirby dan Jeff, dua orang matematikawan yang menemukan fakta bahwa teorema tersebut tidak dapat dibuktikan dengan Aritmetika Peano. Maka dari itu, melalui Permainan Hidra yang merepresentasikan Deret Goodstein, Kirby dan Jeff memastikan bahwa Deret Goodstein memang konvergen ke 0 karena untuk strategi rekursif apapun yang dilakukan pada permainan tersebut akan menuntun pada kemenangan Herakles.

Pembuktian kekonvergenan dari Deret Goodstein ke angka 0 dapat dilihat dari fakta dua hal yang terjadi setiap Herakles memotong kepala Hidra, yaitu:

1. Apabila kepala yang dipotong oleh Herakles tidak memiliki *grandparent node*, maka jumlah kepala akan berkurang satu ($H_{n+1} = H_n - 1$).
2. Apabila kepala yang dipotong oleh Herakles memiliki *grandparent node*, maka nilai dari *grandparent node* akan turun kompleksitasnya dan berkurang untuk n yang terbatas atau jika $G_n = \omega^k$ maka $G_{n+1} = n\omega^{k-1}$.

Sesuai dengan dua aturan di atas, maka memang benar strategi rekursif yang dilakukan dalam permainan ini akan selalu menuntun kepada kemenangan Herakles dan sekaligus membuktikan bahwa Deret Goodstein memang konvergen ke 0.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala kenikmatan yang telah diberikan baik berupa nikmat iman, kesehatan, maupun kekuatan dalam menyusun makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua penulis yang telah mendidik dan membesarkan penulis dengan penuh kasih sayang. Selanjutnya, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dra. Harlili S., M.Sc. dan Bapak Dr.Ir. Rinaldi Munir, MT. selaku dosen pengajar mata kuliah Matematika Diskrit atas segala bimbingan serta ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Tidak lupa penulis sampaikan pula rasa terima kasih kepada rekan-rekan penulis yang selalu mendukung, mendorong, serta memberi semangat kepada penulis dalam menyelesaikan makalah ini. Terakhir, penulis juga menyampaikan terima kasih kepada seluruh pihak yang ikut membantu

pembuatan makalah ini baik yang secara langsung maupun tidak langsung.

REFERENSI

- [1] <http://hardhatters.brazosnow.netdna-cdn.com/hh-media/uploads/2014/04/hercules-hydra.jpg>, diakses pada 9 Desember 2014.
- [2] Rosen, Kenneth H., *Discrete Mathematics and Its Application*, 7th ed., New York: McGraw-Hill, 2012, pp. 641, 747.
- [3] Frazer, James George, *Appolodorus The Library*, London: Harvard University Press, 1921, Apollod. 2.5.3.
- [4] Kirby, L.; Paris, J., "Accessible independence results for Peano arithmetic", *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1982, pp. 285–293.
- [5] Munir, Rinaldi, *Matematika Diskrit*, Bandung: Penerbit Informatika Bandung.
- [6] Stephen M. Trzaskoma; R. Scott Smith; Stephen Brunet; Thomas G. Palaima, *Anthology of Classical Myth: Primary Sources in Translation*. Hackett Publishing, 2004. pp. 226.
- [7] J. Parker, A. Mills, J. Stanton, *Mythology: Myths, Legends and Fantasies*. Struik, 2007. pp. 123.
- [8] Caicedo, Andr'es Eduardo, "Goodstein's Function", *California Institute of Technology*, pp. 381-391.
- [9] Lorenzo Carlucci, "A new proof-theoretic proof of the independence of Kirby-Paris' Hydra Theorem", *Theoretical Computer Science*, 2003, pp. 365-378.
- [10] Sladek, Will, "The Termite and the Tower: Goodstein sequences and provability in PA", Mei 2007.
- [11] Rathjen, Michael, "Goodstein's theorem revisited", *School of Mathematics, University of Leeds*, Mei 2014.
- [12] Huber, Michael, *Mythematics: Solving the Twelve Labors of Hercules*, New Jersey: Princeton University Press, 2009, pp. 13-14.
- [13] Leobl, Martin, "Hercules and Hydra", *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1998, pp. 85-95.
- [14] Kim, Mark H., *Killing the Hydra*, <http://markkim.com/2013/10/killing-the-hydra/>, diakses pada 10 Desember 2014.
- [15] Prawitz, D., Skyrms, B., *Logic*, Westerståhl, W., *Methodology and Philosophy of Science IX*, Elsevier, 1995, pp. 32-33.
- [16] Dershowitz, Nachum dan Georg Moser, "The Hydra Battle Revisited", *School of Computer Science, Tel Aviv University; Microsoft Research, Redmond; Institute of Computer Science, University of Innsbruck*.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2014



Tifani Warnita (13513055)