Aplikasi Matematika Diskrit dalam Permainan Nonogram

Mahesa Gandakusuma (13513091)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
ezza3224@students.itb.ac.id

***Abstrak*—Makalah ini akan membahas tentang nonogram dan penggunaan matematika diskrit dalam permainan nonogram. Nonogram adalah suatu permainan puzzle yang membutuhkan logika dalam penyelesaiannya. Materi matematika diskrit yang berhubungan dengan nonogram yang akan dibahas adalah induksi matematika dan kombinatorial. Dalam permainan nonogram, induksi matematika digunakan dalam penentuan berapa banyak solusi puzzle yang mungkin, sedangkan kombinatorial dipakai dalam pembentukan pola gambar dan kemungkinan peletakan arsiran hitam.**

***Kata kunci*—induksi matematik, kombinatorial, nonogram, permainan logika, puzzle**

I. PENDAHULUAN

Permainan puzzle adalah suatu permainan yang mempunyai minimal sebuah solusi untuk diselesaikan, dengan mengikuti aturan dalam permainan tersebut. Seseorang dapat dikatakan menang apabila solusi dalam permainan tersebut tercapai. Dalam suatu permainan puzzle biasanya digunakan logika dalam proses penyelesaiannya, sehingga permainan tipe ini sering juga disebut permainan logika.

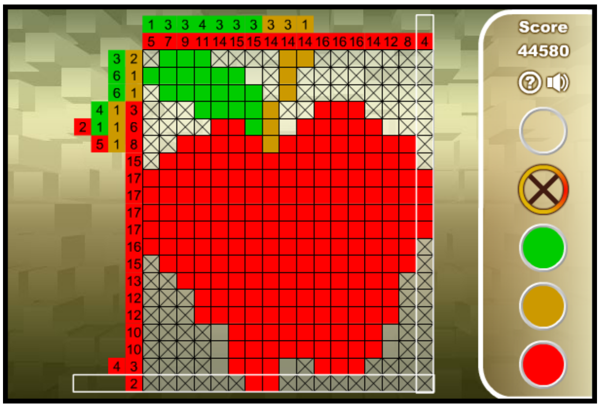
Saat ini permainan logika telah beragam macamnya. Contoh permainan logika adalah sudoku, lights on, ABC path, hitori, kakuro, nonogram, battleship, dan lain-lain. Masing-masing permainan logika ini memiliki bentuk dan aturan yang unik dan variatif antara satu macam permainan dengan yang lain. Salah satu permainan logika yang akan dibahas dalam makalah ini adalah nonogram.

II. NONOGRAM

A. Apa itu nonogram?

Nonogram adalah sebuah permainan logika yang terdiri dari grid kotak berukuran tertentu yang harus diisi dengan arsiran hitam atau tidak diisi, yang akan membentuk sebuah gambar biner. Nonogram dibuat pertama kali pada tahun 1988 oleh Non Ishida dengan nama Window Art Puzzles. Kemudian pada tahun 1990, Window Art Puzzles berubah nama menjadi nonogram yang berasal dari "non", yaitu nama pembuat pertama nonogram, dan "gram" yang berasal dari kata diagram. Nonogram memiliki banyak sebutan lain seperti Griddlers, Paint by numbers, CrossPix, Japanese crosswords, dan Picross. Normalnya, jika sebuah nonogram diselesaikan, grid kotak pada nonogram tersebut akan membentuk sebuah gambar yang berarti, namun dalam beberapa nonogram generator, gambar akhir yang dibuat bisa saja terlihat hanya seperti gambar abstrak. Hal ini sebenarnya baik, agar pemain tidak mudah menebak-nebak gambar dan memaksa pemain lebih banyak menggunakan logikanya.

Dalam perkembangannya nonogram tidak harus menggunakan warna hitam sebagai warna arsiran, tetapi bisa saja menggunakan warna lain atau menggunakan lebih dari 1 warna dalam pewarnaan gridnya. Pada gambar 1 berikut, ditunjukkan sebuah nonogram yang menggunakan warna hijau, coklat, dan merah.



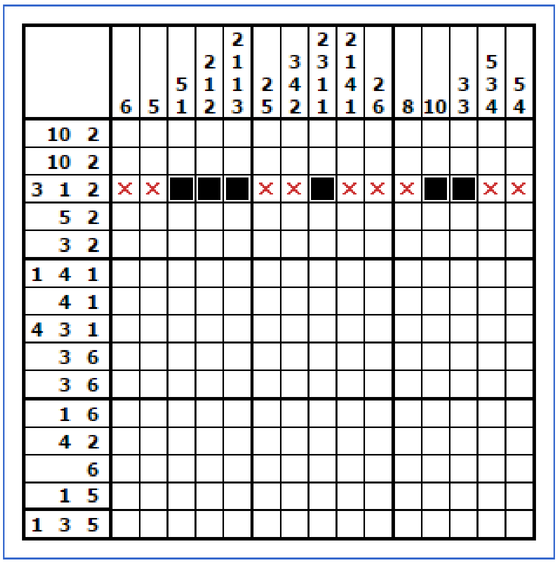
Gambar 1 Nonogram dengan lebih dari 1 warna
(Sumber: http://coolmath-games.com/0-nonogram/)

Nonogram yang akan dibahas di makalah ini adalah nonogram yang menggunakan arsiran hitam saja, dan kotak yang tidak diarsir diisi dengan X.

B. Cara bermain nonogram

Aturan dalam permainan nonogram cukup sederhana. Pada awal permainan, disediakan sebuah grid kotak berukuran MxN, dimana M dan N berturut-turut menyatakan banyak kolom dan banyak baris, yang harus diarsir hitam atau ditandai dengan X. Di samping setiap baris dan atas atau bawah setiap kolom tertulis deretan angka yang menyatakan panjang arsiran hitam pada baris atau kolom tersebut berturut-turut. Setiap arsiran hitam dengan panjang tertentu pada suatu baris atau kolom dipisahkan dengan minimal sebuah X.

Misalkan pada suatu baris tertulis “3 1 2”, artinya pada baris tersebut terdapat arsiran hitam yang panjangnya 3, lalu diikuti sejumlah X, lalu diikuti arsiran hitam yang panjangnya 1, lalu diikuti sejumlah X, lalu diikuti arsiran hitam yang panjangnya 2. Sisa kotak dalam baris yang belum terisi diisi dengan X. Untuk lebih jelasnya, lihat gambar Z berikut.



Gambar 2 Contoh penempatan arsiran hitam pada baris yang bertuliskan “3 1 2”

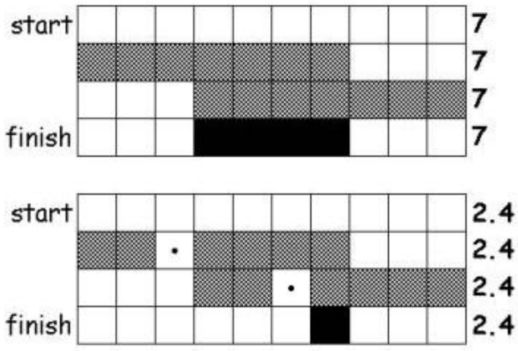
Tujuan dari permainan ini adalah untuk menentukan mana saja semua kotak yang diarsir hitam sesuai dengan aturan di atas.

C. Trik mengisi nonogram

Perhatikan angka-angka pembantu yang berada di pinggir grid. Jika deretan angkanya sama dengan “0” saja, artinya tidak ada arsiran hitam di baris atau kolom tersebut, sehingga baris atau kolom tersebut hanya berisi X. Jika angka pada suatu baris sama dengan banyak kolomnya, maka arsirlah semua kotak dalam baris tersebut, berlaku juga apabila angka pada suatu kolom sama dengan banyak barisnya, maka arsirlah semua kotak dalam kolom tersebut.

Jika hasil penjumlahan deretan angka pada suatu baris ditambah banyak angka pada deretan tersebut dikurangi 1 sama dengan banyak kolomnya, maka baris tersebut dapat langsung diselesaikan, berlaku juga untuk kolom. Misalkan pada nonogram dengan X baris dan 15 kolom terdapat suatu baris dengan deretan angka “3 6 2 1”. Karena 3+6+2+1+4-1=15, maka baris tersebut dapat langsung diselesaikan.

Jika hasil penjumlahan deretan angka pada suatu baris lebih besar daripada setengah banyak kolom, maka cobalah mengisi kemungkinan pengisian dari ujung kiri dan ujung kanan. Arsirlah kotak yang selalu terisi pada kedua kemungkinan tersebut. Apabila deretan angkanya terdiri dari lebih dari 1 angka, lakukan hal yang sama dengan menganggap semua arsiran hitam pada baris tersebut sebagai 1 arsiran hitam dengan hasil penjumlahan deretan angka ditambah banyak angka dalam deretan tersebut dikurangi 1. Perlu diperhatikan bahwa untuk deretan angka yang terdiri dari lebih dari 1 angka, tidak semua kotak yang selalu terisi pada kedua kemungkinan dapat diarsir. Kotak tersebut hanya dapat diarsir apabila berasal dari arsiran hitam yang sama. Untuk lebih jelasnya, lihat gambar Z (Pada gambar berikut, X diganti dengan dot). Hal yang sama juga berlaku untuk kolom.



Gambar 3 Langkah yang perlu dilakukan apabila hasil penjumlahan deretan angka lebih besar dari setengah banyak kolom
(Sumber: http://www.puzzlemuseum.com/griddler/gridins.htm)

Trik sebelumnya juga dapat digunakan dengan menganggap jarak 2 buah X atau jarak X dengan tepi grid sebagai panjang baris atau kolom.

Suatu arsiran hitam dengan panjang Y hanya dapat diletakkan jika ada jarak 2 buah X atau jarak X dengan tepi grid yang lebih dari atau sama dengan Y. Apabila jaraknya kurang dari Y, tentu saja arsiran hitam tersebut tidak dapat diletakkan di tempat tersebut karena tidak cukup tempat. Trik ini dapat membantu peletakan arsiran hitam dengan panjang Y apabila suatu kotak telah terisi X lebih dahulu.

Jika pada suatu baris atau kolom terletak suatu arsiran hitam berturutan dan pada baris atau kolom tersebut tertulis sebuah angka, maka beri tanda X untuk kotak yang tidak mungkin dicapai. Misalnya pada suatu kolom terdapat arsiran hitam dengan panjang 2 dan pada kolom tersebut tertulis angka “5”, maka beri tanda X untuk kotak yang jaraknya lebih dari 3 kotak, karena kotak-kotak tersebut tidak mungkin dicapai. Angka 3 didapat dari banyak kotak yang belum terarsir dari 5 kotak.

Semua trik yang terlah disebutkan berlaku baik pada suatu baris maupun suatu kolom. Apabila trik-trik yang terlah disebutkan digunakan dengan baik, maka nonogram dapat dengan lebih mudah diselesaikan.

III. DASAR TEORI

A. Induksi matematika

Induksi matematika adalah salah satu cara yang digunakan dalam pembuktian persoalan matematika yang melibatkan bilangan bulat. Induksi matematika mengurangi langkah-langkah pembuktian sehingga menjadi sejumlah langkah terbatas.

Prinsip pembuktian melalui induksi matematika terbagi menjadi 3 berdasarkan basis induksi dan langkah induksinya, yaitu:

1. Prinsip induksi sederhana
   Misalkan sebuah pernyataan p(n) akan dibuktikan kebenarannya untuk semua bilangan bulat positif n. Langkah yang dilakukan adalah pembuktian p(1) benar sebagai basis induksi, lalu membuktikan kebenaran jika p(n) benar, maka p(n+1) benar untuk semua bilangan bulat positif n.
2. Prinsip induksi yang dirampatkan
   Misalkan sebuah pernyataan p(n) akan dibuktikan kebenarannya untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Langkah yang dilakukan adalah pembuktian $p(n_0)$ benar sebagai basis induksi, lalu membuktikan kebenaran jika p(n) benar, maka p(n+1) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.
3. Prinsip induksi kuat
   Misalkan sebuah pernyataan p(n) akan dibuktikan kebenarannya untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Langkah yang dilakukan adalah pembuktian $p(n_0)$ benar sebagai basis induksi, lalu membuktikan kebenaran jika $p(n_0)$, $p(n_0+1)$, $p(n_0 + 2)$, ... , p(n) benar, maka p(n+1) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

B. Kombinatorial

Kombinatorial adalah sebuah cabang matematika yang mempelajari berapa banyak kemungkinan penyusunan objek tanpa perlu menyebutkan semua kemungkinan penyusunannya.

Kaidah dasar menghitung dalam kombinatorial ada 2, yaitu kaidah perkalian (*rule of product*) dan kaidah penjumlahan (*rule of sum*). Kaidah perkalian dipakai untuk menghitung banyak hasil percobaan 1 **dan** percobaan 2 yang dilakukan bersama-sama. Sedangkan kaidah penjumlahan dipakai untuk menghitung banyak hasil percobaan 1 **atau** percobaan 2. Misalkan percobaan 1 memiliki P banyak kemungkinan dan percobaan 2 memiliki Q banyak kemungkinan. Banyak kemungkinan dari percobaan 1 atau percobaan 2 sama dengan P+Q (kaidah penjumlahan), sedangkan banyak kemungkinan dari percobaan 1 dan percobaan 2 yang dilakukan bersama-sama sama dengan P×Q.

Kaidah-kaidah dasar dalam kombinatorial tersebut masing-masing dapat diperluas. Untuk kaidah perkalian, perluasan kaidah tersebut menjadi

$$p_{total} = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n$$

sedangkan perluasan kaidah penjumlahan akan menjadi

$$p_{total} = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

Permutasi adalah suatu bentuk khusus dari kaidah penghitungan dalam kombinatorial yang menghitung berapa banyak kemungkinan penempatan sejumlah objek berbeda dengan memperhatikan urutan penempatan objeknya. Jika banyak objek lebih banyak daripada banyak posisi penempatan, maka permutasi yang berlaku adalah permutasi r pada n elemen, dengan r adalah posisi penempatan dan n adalah banyak objek berbeda. Permutasi r pada n elemen dapat dinyatakan sebagai

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

dengan r ≤ n.

Kombinasi adalah bentuk khusus dari permutasi. Pada kombinasi urutan penempatan objek diabaikan, sedangkan pada permutasi urutan penempatan objek diperhitungkan. Kombinasi r dari n elemen (juga sering disebut “dari n elemen diambil sebanyak r elemen”) dapat dinyatakan sebagai

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

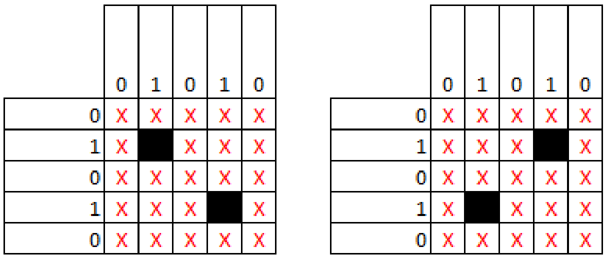
IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Penggunaan induksi matematika dalam nonogram

Akan dibuktikan bahwa sebuah nonogram hanya dapat memiliki sebuah solusi berdasarkan semua angka yang tertulis di baris dan kolom.

Basis induksi adalah ketika seluruh deretan angka pada baris dan kolom bernilai “0”, artinya solusi yang mungkin hanyalah tidak ada satupun arsiran hitam. Kemudian pada kasus kotak yang diarsir hitam hanya 1, deretan angka pada baris dan kolom yang mengandung arsiran hitam tersebut adalah “1”, sedangkan pada deretan angka lainnya adalah “0”. Jika kotak yang diarsir hitam ditambah 1 lagi, maka angka pada baris atau kolom yang mengandung arsiran hitam tersebut bertambah 1 apabila arsiran tersebut bersebelahan dengan arsiran sebelumnya atau berubah menjadi “1 1” jika arsiran tersebut masih satu kolom atau baris dengan arsiran sebelumnya, namun tidak berdempetan.

Namun pernyataan ini tidak berlaku dalam kasus seperti pada gambar 4.



Gambar 4 Sebuah nonogram yang memiliki lebih dari 1 solusi

Pada gambar 4, terlihat bahwa dengan langkah induksi seperti yang telah disebutkan sebelumnya, dapat menghasilkan nonogram yang memiliki lebih dari satu solusi. Hal ini menunjukkan bahwa tidak dapat dibuktikan bahwa nonogram hanya memiliki sebuah solusi, sehingga nonogram dapat memiliki lebih dari 1 solusi yang memenuhi.

B. Penggunaan kombinatorial dalam nonogram

Kombinatorial dalam nonogram diperlukan dalam pembentukan pola gambar dan kemungkinan pengisian arsiran hitam. Pada pembentukan pola gambar, setiap kotak hanya mungkin berisi 2 kemungkinan, yaitu diarsir hitam atau diberi tanda X. Apabila terdapat nonogram dengan M kolom dan N baris, maka banyak kotak pada nonogram tersebut adalah sebanyak M×N, sehingga banyak kemungkinan pola gambar yang berbeda-beda adalah $2^{(M \times N)}$.

Efek dari kombinatorial pada pola gambar ini adalah angka-angka pada baris dan kolom akan ikut berbeda sesuai dengan posisi kotak arsiran hitam, namun seperti yang telah dibahas di atas bahwa nonogram dapat memiliki lebih dari sebuah solusi, beberapa kemungkinan pola gambar akan memiliki set angka yang sama. Angka-angka inilah yang akan membantu pemain dalam pengisian kotak yang diarsir hitam.

Selain itu, kombinatorial juga dipakai dalam penempatan arsiran hitam pada suatu baris atau kolom. Misalkan pada suatu baris dalam nonogram 20×20 tertulis “1 4 6 3”, maka sesuai aturan permainan pada baris tersebut dari kiri ke kanan terdapat arsiran hitam dengan panjang berturut-turut 1, 4, 6, dan 3. Masing-masing arsiran hitam tersebut dipisahkan oleh minimal sebuah X. Pada persoalan di atas, kombinasi dapat digunakan untuk menghitung berapa banyak kemungkinan peletakan arsiran hitam tersebut. Banyak kemungkinan peletakan arsiran hitam pada baris tersebut adalah 35 kemungkinan, dihitung dari

$$\frac{(10-3)!}{4!(10-7)!}$$
$$= \frac{(10-3)(10-4)(10-5)(10-6)}{4!}$$
$$= 35$$

dengan 10 menyatakan banyak objek berupa kelompok arsiran hitam yang banyaknya 4 dan kotak berisi X yang banyaknya 20-(1+4+6+3) = 6, dan 3 menyatakan panjang kotak berisi X terbanyak yang mungkin dibentuk yang didapatkan dengan cara menaruh semua arsiran hitam di tepi kiri suatu baris atau tepi atas suatu kolom dengan tiap kelompok arsiran hitam dipisahkan oleh 1 kotak berisi X.

Rumus untuk menentukan banyak kemungkinan peletakan arsiran hitam pada suatu baris dan suatu kolom adalah

$$p(n,x) = \frac{(n-(x-1))!}{x!(n-(2x-1))!}$$

dimana $p(n,x)$ menyatakan banyak kemungkinan peletakan, n menyatakan banyak objek berupa kotak yang diberi X ditambah banyak kelompok kotak yang diarsir hitam, dan x menyatakan berapa banyak kelompok kotak yang diarsir hitam yang ada pada baris atau kolom tersebut.

Perlu diperhatikan bahwa apabila pada suatu baris atau kolom terdapat kotak yang telah terlebih dahulu diisi dengan X, kotak tersebut dapat pula dianggap sebagai pemecah suatu baris atau kolom dengan menganggap kotak tersebut sebagai tepi baris atau kolom. Hal ini tentu saja akan mengakibatkan hasil kenyataan dapat lebih kecil daripada hasil penghitungan, karena baris atau kolom yang dihasilkan akan lebih kecil daripada baris atau kolom pada permainan.

V. KESIMPULAN

Permainan nonogram tidak selalu hanya memiliki sebuah solusi. Beberapa nonogram dapat memiliki lebih dari 1 solusi. Semua kemungkinan pola gambar yang dapat dihasilkan dari suatu nonogram dapat dihitung dengan kombinatorial. Kombinatorial juga dipakai dalam kemungkinan peletakan arsiran hitam, walaupun hasil kenyataan bisa saja lebih kecil daripada banyak kemungkinan peletakan yang disebabkan oleh adanya kotak yang telah terisi X lebih dahulu.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama-tama saya mengucapkan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan berkatnya selama pengerjaan makalah ini sampai selesai. Saya juga mengucapkan terima kasih kepada bapak Rinaldi Munir dan ibu Harlili yang telah memberikan materi mata kuliah matematika diskrit yang membantu dalam proses penyelesaian makalah ini. Saya juga mengucapkan terima kasih kepada Non Ishida yang telah menemukan puzzle nonogram sebagai dasar topik dalam makalah ini.

REFERENSI

[1] http://www.puzzle-nonograms.com/
Diakses pada 9 Desember 2014, pukul 16.17 WIB.

[2] http://www.puzzlemuseum.com/griddler/gridins.htm
Diakses pada 9 Desember 2014, pukul 18.54 WIB

[3] http://puzzlemuseum.com/griddler/gridhist.htm
Diakses pada 9 Desember 2014, pukul 19.34 WIB

[4] Slide Presentasi IF2120: Kombinatorial
Diakses pada 10 Desember 2014, pukul 10.37 WIB

[5] Slide Presentasi IF2120: Induksi Matematik
Diakses pada 10 Desember 2014, pukul 23.07 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2014

ttd

Mahesa Gandakusuma (13513091)