

Berdo'alah terlebih dahulu sebelum mengerjakan ujian ini.

**Soal dari Dra. Harlili, M.Sc.**

1. Successor dari himpunan A didefinisikan sebagai himpunan  $A \cup \{A\}$  ditulis  $\{A, \{A\}\}$ . Tentukan successor dari :  
a)  $\{1,2,3\}$                       b)  $\emptyset$                       c)  $\{\emptyset\}$                       d)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$                       **(Nilai: 10)**
2. Misalkan  $f$  adalah fungsi dari  $X = \{0,1,2,3,4\}$  ke  $X$  yang didefinisikan oleh  $f(x) = 3x \text{ mod } 5$ . Tuliskan  $f$  ini sebagai himpunan pasangan terurut. Apakah  $f$  merupakan fungsi satu-satu atau pada. **(Nilai: 10)**
3. Matriks-matriks dibawah ini menyatakan suatu pasangan terurut dari relasi  $R$  pada  $\{1,2,3\}$ . Tentukan apakah relasi  $R$  adalah refleksif, simetri (setangkup), anti simetri (tolak setangkup), dan/ atau transitif (menghantar). Beri alasannya. **(Nilai: 15)**

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Misalkan  $R$  adalah suatu relasi pada himpunan dari semua string biner dengan aturan  $s R t$  jika dan hanya jika  $s$  dan  $t$  adalah string-string biner yang memiliki banyak simbol 1 sama. Perhatikan  $R$  adalah relasi ekuivalen. **(Nilai: 15)**

**Soal dari Dr. Ir. Rinaldi Munir**

5. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk  $f(x) = (\sin x)^n$  maka turunan pertamanya adalah  $f'(x) = n (\sin x)^{n-1} \cos x$ . **(Nilai: 10)**

**Jawaban :**

*Basis Induksi*

Untuk  $n = 1$ ,  $f(x) = \sin x$ , maka  $f'(x) = 1 \cdot \sin^{1-1} x \cdot \cos x = \cos x$  (terbukti benar)

*Langkah Induksi*

Asumsikan untuk  $n = k$ ,  $f(x) = \sin^k x$ , maka  $f'(x) = k \cdot \sin^{k-1} x \cdot \cos x$  benar. Untuk  $n = k + 1$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^{k+1} x = \sin^k x \cdot \sin x \\ f'(x) &= \frac{d(f(x))}{dx} = \frac{d(\sin^k x)}{dx} \sin x + \sin^k x \frac{d(\sin x)}{dx} \\ &= k \cdot \sin^{k-1} x \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^k x \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$= k \cdot \sin^k x \cdot \cos x + \sin^k x \cdot \cos x$$

$$= (k+1) \sin^k x \cdot \cos x \text{ (terbukti benar)}$$

6. Selesaikan relasi rekurens berikut:  $T(n) = 7T(n - 1) - 6T(n - 2)$ ;  $T(0) = 2$ ,  $T(1) = 7$  dengan menggunakan metode persamaan karakteristik. (Catatan:  $T_n$  ditulis  $T(n)$ ,  $T_{n-1}$  ditulis  $T(n - 1)$ , dst). **(Nilai: 15)**

**Jawaban:** Persamaan karakteristik:  $r^2 - 7r + 6 = (r - 6)(r - 1) = 0$ , akar-akarnya adalah  $r_1 = 6$  dan  $r_2 = 1$

Bentuk umum solusi:  $T(n) = c_1 6^n + c_2 (1)^n = c_1 6^n + c_2$

$$T(0) = 2 = c_1 + c_2$$

$$T(1) = 7 = 6c_1 + c_2$$

Dari kedua persamaan tersebut diperoleh  $c_1 = 1$  dan  $c_2 = 1$

Jadi, solusinya adalah  $T(n) = 6^n + 1$

7. Dengan menggunakan Teori Bilangan, buktikan bahwa  $8 \mid (7^{2n+1} + 1)$  **(Nilai: 10)**

**Jawaban:** Perhatikan bahwa :

$$(7^{2n+1} + 1) = 7x(7^2)^n + 1$$

Karena  $7^2 \equiv 1 \pmod{8}$ , maka  $7x(7^2)^n + 1 \equiv 7x1 + 1 \pmod{8} \equiv 8 \pmod{8} \equiv 0 \pmod{8}$

Jadi, terbukti bahwa  $8 \mid (7^{2n+1} + 1)$ . **Q.E.D**

8. Sebuah buku memiliki ISBN 135-09-2xy9-1. Diketahui pula bahwa  $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ . Tentukan semua kemungkinan pasangan  $(x, y)$  yang mungkin dari ISBN tersebut. **(Nilai: 15)**

**Jawaban:** Karena  $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$  dan  $0 \leq y \leq 9$  maka nilai  $y$  yang mungkin yaitu :

$$y = 0 \text{ atau } y = 5.$$

- Berdasarkan ketentuan ISBN yaitu  $\sum_{i=1}^{10} ix_i \equiv 0 \pmod{11}$  maka :

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i = 1x1 + 2x3 + 3x5 + 4x0 + 5x9 + 6x2 + 7xX + 8xY + 9x9 + 10x1 = 7X + 8Y + 170$$

Dari sini, harus dipenuhi bahwa:

$$7X + 8Y + 170 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$7X + 8Y + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$7X + 8Y \equiv 6 \pmod{11}$$

- Untuk  $y = 0$  didapat :

$$7X \equiv 6 \pmod{11}$$

Untuk  $0 \leq X \leq 9$  yang memenuhi persamaan diatas yaitu  $X = 4$

Didapat pasangan (X,Y) yang memenuhi adalah (4,0)

- Untuk  $y = 5$  didapat :

$$7X + 40 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$7X \equiv 10 \pmod{11}$$

Untuk  $0 \leq X \leq 9$  yang memenuhi persamaan diatas yaitu  $X = 3$

Didapat pasangan (X,Y) yang memenuhi adalah (3,5)

∴ Pasangan (X,Y) yang memenuhi ketentuan ISBN tersebut adalah (4,0) dan (3,5)