

Mencari Solusi Persamaan Rekursif Bilangan Catalan dengan Prinsip-prinsip Kombinatorial

Ahmad Zaky - 13512076¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganessa 10 Bandung 40132, Indonesia

¹azaky@students.itb.ac.id

Abstrak—Menyelesaikan suatu persamaan rekursif dapat dilakukan dengan banyak cara. Selain menggunakan persamaan karakteristik, prinsip kombinatorial juga dapat dipakai. Dengan mencari persoalan kombinatorial yang sesuai dengan suatu persamaan rekursif, dan mencari solusinya sebagai sebuah persoalan kombinatorial, solusi dari persamaan rekursif tersebut juga diperoleh. Dengan menyelesaikan modifikasi dari suatu persoalan kombinatorial klasik dan mencari hubungannya dengan bilangan Catalan, diperoleh bahwa solusi persamaan rekursif bilangan Catalan adalah $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!}$.

Kata Kunci—Bilangan Catalan, jalur terpendek, relasi rekurensi, tanda kurung seimbang

I. PENDAHULUAN

Pada dunia matematika terdapat banyak sekali barisan bilangan. Tiap bilangan mempunyai definisinya masing-masing beserta aplikasinya tersendiri. Sebagai contoh, salah satu barisan yang sangat terkenal adalah barisan Fibonacci, yang didefinisikan sebagai

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \quad (1)$$

di mana $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$. Dengan melakukan substitusi untuk nilai-nilai kecil n , diperoleh beberapa suku pertama dari barisan Fibonacci adalah

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Pada tahun 1844, seorang matematikawan asal Belgia, Eugène Charles Catalan, mendefinisikan sebuah barisan bilangan yang sekarang dikenal dengan *bilangan Catalan*. Barisan tersebut didefinisikan sebagai berikut [1]

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, n \geq 0, \quad (2)$$

$$C_0 = 1 \quad (3)$$

Dengan kata lain, $C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0$ untuk $n \geq 0$. Dengan menghitung secara langsung, kita dapat memperoleh beberapa suku pertama dari bilangan Catalan, yaitu

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 C_0 = 1 \\ C_2 &= C_0 C_1 + C_1 C_0 = 2 \\ C_3 &= C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 5 \\ C_4 &= C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 14 \\ &\dots \end{aligned}$$

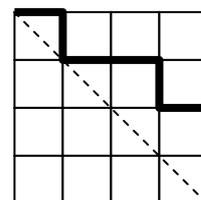
sehingga diperoleh barisan sebagai berikut

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

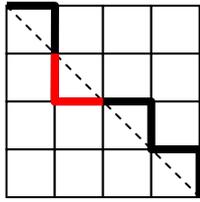
Dalam makalah ini, bentuk eksplisit dari bilangan Catalan akan dicari. Bentuk eksplisit adalah bentuk yang hanya mempunyai peubah n sebagai parameternya. Dalam mencari bentuk eksplisit dari suatu barisan, dalam hal ini barisan rekursif, banyak cara yang dapat digunakan. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah mencari persoalan yang memiliki sifat yang sama dengan barisan yang akan dicari, dan menyelesaikan persoalan tersebut sehingga secara tidak langsung solusi dari barisan yang bersangkutan juga ditemukan.

Persoalan yang akan dipakai dalam mencari bentuk eksplisit bilangan Catalan adalah persoalan kombinatorik. Persoalan tersebut, yang seterusnya akan kita sebut sebagai (*), adalah sebagai berikut: “Pada kotak $n \times n$, berapa banyak jalur terpendek dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah kotak tersebut, di mana jalur tersebut harus terletak di atas diagonal utama? Diagonal utama adalah diagonal yang menghubungkan titik paling pojok kiri atas dengan titik di pojok kanan bawah.” [2]

Untuk memahami (*) lebih dalam, berikut diberikan contoh jalur yang valid dan tidak untuk kasus $n = 4$. Jalur kedua tidak valid karena bagian yang berwarna merah terletak di bawah diagonal utama.



Gambar 1.1 Jalur yang valid dalam kotak 4×4

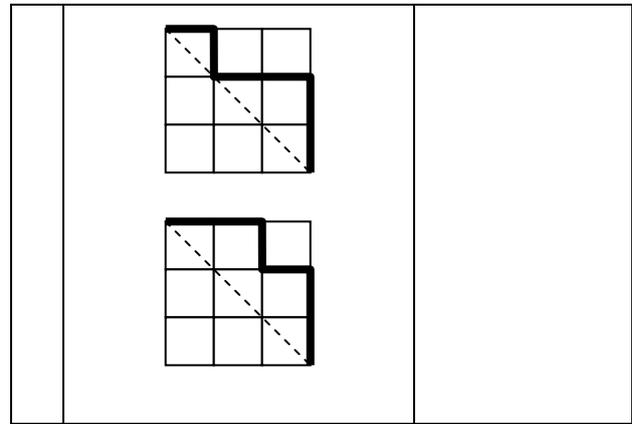


Gambar 1.2 Jalur yang tidak valid dalam kotak 4×4

Misalkan T_n menyatakan banyaknya jalur pada persoalan (*). Tabel berikut menyatakan nilai T_n untuk $n = 0$ sampai 3. Penjelasan untuk $n = 0$ adalah saat $n = 0$, kotak $n \times n$ adalah sebuah titik, dan pojok kiri atas dan pojok kanan bawah dari kotak ini adalah titik yang sama. Maka, banyaknya jalan hanya 1, yaitu jalan dengan panjang nol.

Tabel 1.1 Nilai T_n untuk $n = 0, 1, 2, 3$

n	Jalur yang valid	T_n
0	•	1
1		1
2		2
3		5



Kesesuaian nilai T_n dan C_n untuk $n = 0$ sampai 3 bukanlah suatu kebetulan. Pada bagian-bagian selanjutnya kita akan mencari bentuk eksplisit dari T_n dan kita juga akan membuktikan bahwa $T_n = C_n$ berlaku untuk seluruh bilangan cacah n .

II. DASAR TEORI

A. Relasi Rekurensi

Relasi rekurensi untuk barisan $\{a_n\}$ adalah persamaan yang menyatakan $\{a_n\}$ dalam satu atau lebih suku-suku barisan sebelumnya, yaitu a_0, a_1, \dots, a_{n-1} untuk suatu $n \geq n_0$, di mana n_0 adalah suatu bilangan cacah. Sebuah barisan dikatakan *solusi* dari suatu relasi rekurensi jika tiap suku barisan tersebut memenuhi relasi rekurensi tersebut [3]. Persamaan (1) dan (2) adalah contoh relasi rekurensi.

Relasi rekurensi homogen linjar adalah relasi rekurensi yang berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

Fibonacci adalah contoh relasi rekurensi homogen linjar. Relasi rekurensi semacam ini dapat diselesaikan dengan persamaan karakteristik [3]. Contohnya, persamaan karakteristik dari barisan Fibonacci adalah $x^2 - x - 1 = 0$ dan solusi atau bentuk eksplisit dari barisan tersebut adalah

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad (4)$$

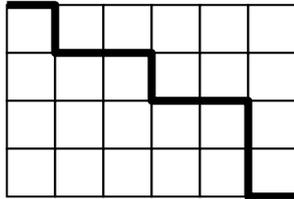
Bilangan Catalan, yang didefinisikan pada (2) dan (3) bukan merupakan relasi rekurensi homogen linjar. Oleh karena itu, bilangan Catalan tidak dapat diselesaikan dengan persamaan karakteristik. Jadi, persamaan karakteristik tidak akan dibahas lebih lanjut.

B. Kombinatorial

Salah satu persoalan yang sering muncul dalam kehidupan sehari-hari adalah bagaimana cara memilih k buah benda dari n buah benda yang ada, di mana urutan tidak diperhatikan. Banyaknya cara tersebut dinyatakan dengan $\binom{n}{k}$ atau $C(n, k)$, di mana [3]

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (5)$$

Sekarang kita bisa menyelesaikan “versi mudah” dari persoalan (*). Jika kita menghilangkan batasan bahwa jalur harus berada di atas diagonal utama, maka persoalan menjadi banyaknya jalur dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah pada kotak $n \times n$. Kita akan melakukan generalisasi untuk kotak $m \times n$. Sebagai contoh, ilustrasi di bawah menunjukkan salah satu jalur yang diperbolehkan saat $m = 4$ dan $n = 6$.



Gambar 2.1 Jalur yang valid dalam kotak 4×6

Banyaknya cara yang diminta dapat dihitung dengan mudah sebagai berikut. Setiap jalur bisa merupakan jalur ke kanan atau jalur ke bawah. Karena jalur tersebut mempunyai panjang $m + n$, dan tepat n dari jalur tersebut adalah jalur ke kanan dan tepat m adalah jalur ke bawah, maka banyaknya jalur sama dengan banyaknya cara memilih n (atau m) objek dari $n + m$ objek. Dari persamaan (5), banyaknya jalur tersebut adalah

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!} \quad (6)$$

III. MENGHITUNG NILAI T_n

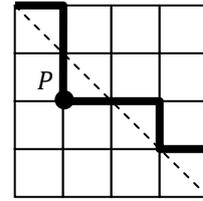
Dalam mencari nilai T_n , kita akan mulai dengan menghilangkan restriksi bahwa jalur harus berada di atas diagonal utama. Banyaknya cara dalam hal ini diberikan dalam persamaan (6) dengan $m = n$, yaitu

$$A = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \quad (7)$$

Sekarang, jika B adalah banyaknya jalur yang sebagian darinya berada di bawah diagonal utama, maka banyaknya jalur yang kita cari, atau T_n , adalah

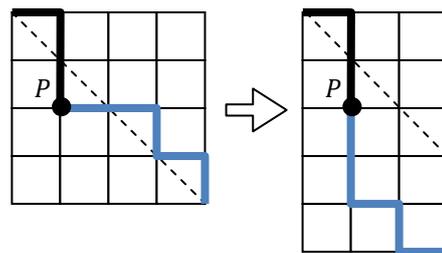
$$T_n = A - B \quad (8)$$

Perhatikan sebuah jalur yang melalui bagian bawah diagonal utama. Misalkan titik P adalah titik **paling atas** yang berada di bawah diagonal utama, seperti yang ditunjukkan oleh diagram di bawah ini.



Gambar 3.1 Jalur yang memotong diagonal utama, dan titik P yang bersangkutan

Karena P adalah titik paling atas, maka titik yang berada tepat di atas P berada tepat di diagonal utama. Sekarang, cerminkan seluruh jalur dari titik P ke pojok kanan bawah seperti yang ditunjukkan oleh diagram di bawah.



Gambar 3.2 Jalur yang telah dicerminkan

Maka, jalur semula diubah menjadi jalur pada kotak $(n + 1) \times (n - 1)$. Sebaliknya, dengan mencari titik P yang sesuai pada kotak $(n + 1) \times (n - 1)$, yaitu titik paling atas yang berada tepat di bawah diagonal utama, maka tiap jalur pada kotak $(n + 1) \times (n - 1)$ dapat diubah menjadi jalur pada kotak $n \times n$ yang melalui bagian bawah diagonal utama. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa nilai B sama dengan banyaknya jalur pada kotak $(n + 1) \times (n - 1)$. Namun, persamaan (6) menyatakan bahwa banyaknya jalur ini adalah $\binom{(n+1) + (n-1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$. Jadi, diperoleh bahwa

$$B = \binom{2n}{n+1} \quad (9)$$

Sekarang, menggabungkan (7), (8), dan (9), kita memperoleh kesimpulan bahwa

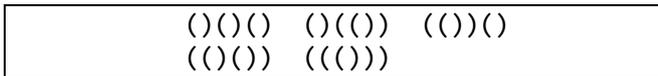
$$\begin{aligned} T_n = A - B &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \end{aligned} \quad (10)$$

IV. *BALANCED PARENTHESIS* DAN HUBUNGANNYA DENGAN T_n

Pertama-tama akan diberikan definisi dari *balanced parenthesis* atau “tanda kurung seimbang”. Definisinya adalah sebagai berikut:

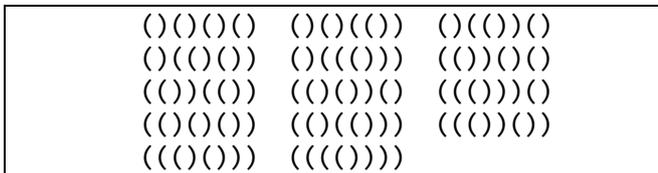
- String kosong adalah tanda kurung seimbang dengan $n = 0$
- Jika A adalah tanda kurung seimbang dengan $n = a$ dan B adalah tanda kurung seimbang dengan $n = b$, maka konkatenasi dari A dan B adalah tanda kurung seimbang dengan $n = a + b$. Konkatenasi di sini adalah penggabungan dua buah string.
- Jika A adalah tanda kurung seimbang dengan $n = a$, maka (A) adalah tanda kurung seimbang dengan $n = a + 1$.

n pada definisi di atas menyatakan banyaknya pasang tanda kurung. Sebagai contoh, ada 5 buah tanda kurung seimbang untuk $n = 3$, yaitu



Gambar 4.1 Tanda kurung seimbang untuk $n = 3$

dan ada 14 buah tanda kurung seimbang untuk $n = 4$, yaitu



Gambar 4.2 Tanda kurung seimbang untuk $n = 4$

Misalkan banyaknya tanda kurung seimbang dengan n buah pasang tanda kurung adalah P_n . Akan ditunjukkan bahwa untuk semua bilangan cacah n , berlaku

$$P_n = T_n \tag{11}$$

Ingat kembali bahwa T_n menyatakan banyaknya jalur terpendek dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah suatu kotak $n \times n$ yang tidak melalui daerah di bawah diagonal utama. Dalam membuktikan bahwa banyaknya tanda kurung seimbang adalah T_n , kita akan mencari korespondensi satu-satu atau bijeksi antara jalur dan tanda kurung seimbang.

Panjang string tanda kurung seimbang adalah $2n$, sesuai dengan panjang dari jalur pada kotak $n \times n$. Hal ini memberikan petunjuk untuk memasang tiap jalur dengan satu tanda kurung. Jika kita memasang tanda ‘(’ dengan jalur ke kanan dan tanda ‘)’ dengan jalur ke bawah, maka tabel berikut memberikan korespondensi satu-satu antara tanda kurung seimbang dan jalur untuk $n = 3$.

Tabel 4.1 Korespondensi satu-satu antara jalur dan tanda kurung seimbang

Jalur	Tanda kurung seimbang
	$((()))$
	$(())()$
	$()()$
	$()(())$
	$((())())$

Kita akan membuktikan dua hal, yaitu

1. Setiap string tanda kurung seimbang mempunyai jalur pasangannya.
2. Setiap jalur mempunyai string tanda kurung seimbang pasangannya.

Dari 1, dapat disimpulkan bahwa $P_n \geq T_n$, dan dari 2 dapat disimpulkan bahwa $P_n \leq T_n$, sehingga dengan menggabungkan keduanya diperoleh bahwa $P_n = T_n$.

Untuk membuktikan 1, kita cukup membuktikan bahwa jalur yang dihasilkan dengan mengubah ‘(’ menjadi jalur ke kanan dan ‘)’ dari suatu tanda kurung seimbang menjadi jalur ke bawah tidak pernah melalui daerah di bawah diagonal utama. Kita akan membuktikan dengan kontradiksi. Asumsikan sebaliknya, bahwa jalur tersebut memotong diagonal utama. Misalkan m jalur pertama memotong diagonal utama. Maka, dari m buah jalur pertama tersebut, banyak jalur ke bawah lebih banyak daripada jalur ke kanan. Hal ini berarti bahwa dari m karakter pertama tanda kurung seimbang kita, banyak karakter ‘)’ lebih besar daripada banyak karakter ‘(’. Akibatnya, akan ada karakter ‘)’ yang tidak mempunyai pasangan ‘(’. Hal ini merupakan suatu kontradiksi. Jadi, 1 terbukti.

Cara membuktikan 2 sangat serupa dengan cara membuktikan 1. Sama seperti di atas, kita cukup membuktikan bahwa string yang dihasilkan dengan mengubah jalur ke kanan menjadi ‘(’ dan jalur ke bawah menjadi ‘)’ adalah tanda kurung seimbang. Asumsikan sebaliknya, bahwa string tanda kurung yang dihasilkan tidak seimbang. Karena ada tepat n buah jalur ke kanan dan tepat n buah jalur ke bawah, maka pada string yang dihasilkan juga terdapat tepat n buah karakter ‘(’ dan tepat n buah karakter ‘)’. Jika string yang dihasilkan bukan tanda kurung seimbang, maka terdapat karakter ‘)’ yang tidak mempunyai pasangan ‘(’. Misalkan m adalah posisi karakter ‘)’ yang tidak mempunyai pasangan karakter ‘(’. Maka, dari m buah karakter pertama ini, banyaknya karakter ‘)’ lebih besar daripada banyaknya ‘(’. Hal ini berakibat bahwa dari jalur yang menghasilkan tanda kurung tersebut, banyak jalur ke bawah lebih banyak daripada banyak jalur ke kanan pada m buah jalur pertama. Jadi, m buah jalur pertama dapat dipastikan melalui daerah di bawah diagonal utama, yang merupakan suatu kontradiksi. Jadi, 2 terbukti.

Karena 1 dan 2 telah terbukti, maka kita telah selesai membuktikan bahwa banyak tanda kurung seimbang sama dengan banyak jalur yang tidak memotong diagonal utama, atau dengan kata lain $P_n = T_n$.

V. PERSAMAAN REKURSIF T_n

Kita kembali ke persoalan yang telah dibahas pada bagian sebelumnya, yaitu menghitung banyaknya tanda kurung seimbang yang dinyatakan dengan P_n . Pada bagian tersebut, kita telah membuktikan bahwa $P_n = T_n$. Sekarang akan dicari bentuk rekursif dari P_n itu sendiri.

Misalkan untuk dua buah string A dan B , AB menyatakan konkatenasi atau gabungan dari kedua string tersebut. Sebagai contoh, jika $A = (()$ dan $B = ())$, maka $AB = ((()))$.

Misalkan S adalah tanda kurung seimbang yang memiliki n buah pasang tanda kurung, di mana $n \geq 1$. Maka, S paling tidak memiliki satu pasang tanda kurung. Jadi, karakter pertama S adalah ‘(’, dan tanda kurung ini pasti mempunyai pasangan ‘)’ di suatu tempat di S . Maka, kita bisa menuliskan S sebagai

$$S = (A)B \quad (12)$$

di mana A dan B keduanya merupakan tanda kurung seimbang.

Misalkan A memiliki a buah pasang tanda kurung dan B memiliki b buah pasang tanda kurung. Karena $S = (A)B$ dan S sendiri memiliki n buah tanda kurung, maka berlaku

$$n = a + b + 1 \quad (13)$$

Banyaknya cara untuk memilih string A sama dengan banyaknya cara memilih tanda kurung seimbang dengan a pasang tanda kurung, yaitu P_a . Begitu pula dengan B ,

banyaknya cara memilih string B adalah P_b .

Jika $a = 0$ dan $b = n - 1$, maka banyaknya string S adalah P_0P_{n-1} berdasarkan aturan perkalian. Jika $a = 1$ dan $b = n - 2$, maka banyaknya string S adalah P_1P_{n-2} . Begitu seterusnya, di mana nilai $a = 0..n - 1$ dan $b = n - a - 1$. Maka, total banyaknya string S secara keseluruhan adalah

$$P_0P_{n-1} + P_1P_{n-2} + \dots + P_{n-1}P_0$$

Namun, nilai tersebut sama dengan banyaknya tanda kurung seimbang dengan n pasang tanda kurung. Maka, dapat disimpulkan bahwa

$$P_n = P_0P_{n-1} + P_1P_{n-2} + \dots + P_{n-1}P_0 \quad (14)$$

yang merupakan bentuk rekursif dari P_n yang kita cari.

VI. SOLUSI PERSAMAAN REKURSIF BILANGAN CATALAN

Kita telah mendapatkan beberapa sifat terkait C_n , T_n , dan P_n pada bab-bab sebelumnya. Pada bab ini kita akan menggabungkan semuanya dan menarik sebuah kesimpulan, yaitu solusi atau representasi eksplisit persamaan rekursif bilangan Catalan atau C_n .

Mengingat kembali persamaan (14) yang merupakan bentuk rekursif dari P_n , dengan mengganti nilai n dengan $n + 1$ kita mendapatkan bahwa

$$P_{n+1} = P_0P_n + P_1P_{n-1} + \dots + P_nP_0 \quad (15)$$

Bentuk ini sama dengan bentuk rekursif yang menjadi definisi barisan Catalan pada persamaan (2). Secara formal, kita akan menggunakan induksi kuat matematika dalam membuktikan bahwa

$$C_n = P_n \quad (16)$$

untuk semua bilangan cacah n .

- Untuk $n = 0$, banyak tanda kurung seimbang dengan 0 buah tanda kurung adalah satu, yaitu string kosong. Maka, $P_0 = 1$. Sementara itu, C_0 didefinisikan sebagai 1 pada persamaan (3). Maka, $C_n = P_n$ untuk $n = 0$.
- Misalkan untuk suatu bilangan cacah k , berlaku $C_i = P_i$ untuk setiap bilangan cacah i yang tidak lebih dari k . Akan dibuktikan bahwa $C_{k+1} = P_{k+1}$. Hal ini jelas karena persamaan rekursif C dan P sama. Maka,

$$C_{k+1} = \sum_{i=0}^k C_i C_{k-i} = \sum_{i=0}^k P_i P_{k-i} = P_{k+1}$$

sehingga terbukti bahwa $C_{k+1} = P_{k+1}$.

- Dengan prinsip induksi kuat, maka terbukti bahwa

$C_n = P_n$ untuk semua bilangan cacah n .

Sementara itu, persamaan (11) telah menunjukkan bahwa $P_n = T_n$ berlaku untuk semua bilangan cacah n . Maka, menggabungkan hal ini dengan persamaan (16) di atas, kita peroleh bahwa

$$C_n = T_n \quad (17)$$

untuk setiap bilangan cacah n .

Di lain pihak, kita juga telah menghitung bentuk eksplisit dari T_n yang diberikan dalam persamaan (10), yaitu $T_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!}$. Maka, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!} \quad (18)$$

untuk semua bilangan cacah n . Persamaan di atas adalah solusi atau bentuk eksplisit persamaan rekursif bilangan Catalan yang kita cari.

VII. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa solusi dari persamaan rekursif bilangan Catalan adalah

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!}$$

Selain itu, kita juga dapat menyimpulkan bahwa C_n dapat merepresentasikan dua hal, yaitu

1. Banyaknya jalur terpendek dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah sebuah kotak $n \times n$ yang tidak memotong diagonal utama, yaitu diagonal yang menghubungkan pojok kiri atas dan pojok kanan bawah.
2. Banyaknya tanda kurung seimbang yang terdiri dari n pasang tanda kurung.

VIII. UCAPAN TERIMA KASIH

Saya mengucapkan terima kasih kepada Bu Harlili dan Pak Rinaldi Munir atas bimbingannya dalam kuliah IF2120 Matematika Diskrit selama ini. Tidak lupa saya mengucapkan terima kasih kepada teman-teman seperjuangan satu studi atas dukungan dan bantuannya selama ini.

REFERENSI

- [1] E. Catalan, Note extraite d'une lettre adressée à l'édite. J. Reine Angew. Mathematik, 1844
- [2] Koshy, Thomas, Catalan Numbers with Applications. Oxford: Oxford University Press, 2009
- [3] K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications 7th. New York: McGraw-Hill, 2012

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2013



Ahmad Zaky - 13512076