

# Solusi Rekursif pada Persoalan Menara Hanoi

Choirunnisa Fatima 13512084  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13512084@std.stei.itb.ac.id

**Abstrak**—Menara Hanoi atau dalam bahasa Inggris, *Tower of Hanoi*, merupakan teka-teki yang cukup terkenal di bidang Matematika dan Ilmu Komputer. Teeka-teki ini terdiri dari sejumlah piringan yang diletakkan pada tiga tiang. Cara bermainnya adalah memindahkan tumpukan piringan dari satu tiang ke tiang lainnya. Pada makalah ini akan dibahas cara menyelesaikan teka-teki ini. Memang ada beberapa solusi berbeda untuk menyelesaikannya, tetapi pada makalah ini akan dibahas solusi secara rekursif. Setelah menemukan solusi rekursif tersebut, akan dibuktikan dengan induksi matematik bahwa solusi tersebut memang benar solusi dari persoalan menara Hanoi ini.

**Kata Kunci**—Menara Hanoi, Tower of Hanoi, Lucas' Tower, Solusi Rekursif, Relasi Rekurens, Induksi Matematik.

## I. PENDAHULUAN

Menara Hanoi merupakan salah satu persoalan atau teka-teki matematika yang cukup terkenal. Teeka-teki ini juga sering digunakan dalam Ilmu Komputer sebagai contoh penerapan fungsi rekursif. Sesuai dengan namanya, teka-teki ini berbentuk menara yang tersusun dari sejumlah piringan dan tiang. Teeka-teki dimulai dengan menyusun piringan-piringan secara terurut membesar ukurannya pada satu tiang, sehingga membentuk sebuah kerucut. Piringan-piringan ini dapat dipindah-pindahkan dari satu tiang ke dua tiang lainnya.

Menara Hanoi pertama kali dikenalkan oleh seorang ahli matematika Perancis bernama Edouard Lucas pada tahun 1883. Dibalik teka-teki menara Hanoi, terdapat sebuah legenda lama India tentang sebuah candi dengan tiga tiang dan 64 cakram emas. Legenda itu bercerita bahwa pendeta Brahma mendapat tugas untuk memindahkan cakram itu satu persatu ke tiang lainnya. Ketika dia berhasil memindahkan semua cakram, saat itulah dunia akan kiamat.

Tidak hanya di bidang Matematika, menara Hanoi juga digunakan dalam bidang Ilmu Komputer. Menara Hanoi ini digunakan sebagai pemodelan struktur data *stack* (tumpukan). Ia juga sering digunakan sebagai contoh dari penerapan fungsi rekursif.

## II. MENARA HANOI

Permainan dimulai dengan meletakkan piringan yang

sudah terurut membesar ukurannya pada sebuah tiang, sedangkan dua tiang lainnya dalam keadaan kosong.

Persoalan dalam teka-teki ini adalah memindahkan tumpukan piringan dari satu tiang ke satu tiang lainnya dengan memanfaatkan satu tiang lain. Tidak hanya itu, ada beberapa aturan lain yang harus diikuti untuk menyelesaikan teka-teki ini, yaitu:

1. Hanya satu piringan dalam setiap pemindahan.
2. Piringan yang dapat dipindahkan adalah piringan teratas suatu tumpukan.
3. Piringan yang lebih kecil selalu berada di atas piringan yang lebih besar.

Perlu diperhatikan bahwa pada makalah ini, solusi yang dicari untuk memecahkan teka-teki ini adalah solusi dengan jumlah pemindahan minimum.

## III. TEORI YANG DIPERLUKAN

### A. Relasi Rekurens

Sebelum membahas relasi rekurens, terlebih dahulu saya membahas tentang pengertian fungsi rekursif. Fungsi rekursif adalah fungsi yang didefinisikan dalam terminologi dirinya sendiri. Secara umum, fungsi rekursif terdiri atas dua bagian:

1. Basis  
Bagian ini merupakan bagian yang akan menghentikan proses rekursi yang berjalan dan menghasilkan nilai yang eksplisit (biasanya terbatas dan bernilai kecil).
2. Rekurens  
Bagian ini merupakan bagian yang mendefinisikan fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Bagian ini yang akan membuat proses rekursi bergerak menuju ke basis.

Sebagai contoh, fungsi di bawah merupakan bentuk rekursif dari  $f(n) = n!$  :

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \times f(n - 1), & n > 0 \end{cases}$$

Pada fungsi tersebut, baris pertama merupakan bagian basis dan baris kedua merupakan bagian rekurens. Sesuai penjelasan di atas, proses rekursi akan bergerak menuju ke basis, dalam fungsi ini, domain fungsi atau nilai  $n$  akan terus berkurang satu seiring berjalannya proses rekursi

sampai proses berhenti, yaitu ketika  $n = 0$ .

Misalkan terdapat sebuah barisan  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Elemen ke- $n$  dari barisan tersebut, yaitu  $a_n$ , dapat dinyatakan dalam sebuah persamaan. Jika persamaan tersebut dinyatakan secara rekursif oleh satu atau lebih elemen sebelumnya, seperti  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ , atau  $a_{n-1}$ , maka persamaan tersebut disebut relasi rekurens. Sebagai contoh, barisan Fibonacci, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., dapat dinyatakan dalam relasi rekurens sebagai berikut:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}; f_0 = 0 \text{ dan } f_1 = 1.$$

Serupa dengan fungsi rekursif,  $f_0$  dan  $f_1$  merupakan bagian basis pada relasi rekurens tersebut, sedangkan  $f_0$  merupakan bagian rekurens.

Persoalan dalam relasi rekurens membutuhkan sebuah solusi yang memenuhi relasi rekurens tersebut. Solusi tersebut adalah sebuah persamaan yang tidak lagi bersifat rekursif. Sekarang permasalahannya adalah cara menemukan solusi dari sebuah relasi rekurens.

Untuk beberapa persoalan relasi rekurens sederhana, solusi dapat dengan mudah ditemukan dengan pengerjaan aljabar biasa. Perhatikan penyelesaian dari sebuah relasi rekurens sebagai berikut.

Diberikan sebuah relasi rekurens  $P_n = P_{n-1} + 0,11P_{n-1}$ ;  $P_0 = 10.000$ , relasi rekurens tersebut dapat dipecahkan dengan mudah.

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0,11P_{n-1} = 1,11P_{n-1} \\ &= (1,11)(1,11P_{n-2}) = (1,11)^2P_{n-2} \\ &= (1,11)^2(1,11P_{n-3}) = (1,11)^3P_{n-3} \\ &= \dots \\ &= (1,11)^nP_0 \\ &= (1,11)^n \times 10.000 \end{aligned}$$

Terkadang beberapa soal relasi rekurens tidak dapat diselesaikan semudah itu. Sekeras apapun usaha kita menyederhanakan persamaan relasi rekurens tersebut, kita tidak dapat menyelesaikan secara eksplisit. Pada akhirnya, hal terakhir yang dilakukan adalah menebak solusi relasi rekurens tersebut dengan mengamati polanya. Seringkali cara penyelesaian ini berhasil, tetapi cara yang kurang matematis ini tidak meyakinkan untuk digunakan. Oleh karena itu, dibutuhkan satu langkah matematis lain untuk meyakinkan bahwa solusi kita benar, yaitu induksi matematika.

Dengan induksi matematika, kita dapat meyakinkan diri kita sendiri dan membuktikan bahwa solusi yang kita dapatkan adalah benar.

### B. Induksi Matematik

Induksi matematik biasanya digunakan untuk membuktikan bahwa suatu pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan bulat positif. Dengan menggunakan induksi matematik, kita tidak perlu membuktikan satu persatu bahwa bilangan bulat positif itu memenuhi pernyataan. Kita cukup menggunakan beberapa langkah

saja, lalu pernyataan tersebut terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif.

#### Prinsip Induksi Matematik:

Misalkan  $P(n)$  adalah suatu pernyataan mengenai bilangan bulat positif. Untuk membuktikan bahwa pernyataan itu bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif, kita hanya membutuhkan dua langkah, yaitu:

1. Basis Induksi  
Menunjukkan bahwa  $P(1)$  benar.
2. Langkah Induksi  
Menunjukkan bahwa pernyataan kondisional, jika  $P(k)$  benar maka  $P(k + 1)$  juga benar untuk semua bilangan bulat positif  $k$ .

Dengan melakukan kedua langkah tersebut, kita dapat membuktikan bahwa  $P(n)$  benar untuk semua bilangan bulat positif  $n$ . Prinsip induksi matematik itu dapat dinyatakan dalam pernyataan matematik sebagai berikut.

$$(P(1) \wedge \forall k. (P(k) \rightarrow P(k + 1))) \rightarrow \forall n. P(n), \text{ dengan } k, n \in \mathbb{Z}^+$$

Ketika kita menggunakan prinsip induksi matematik untuk membuktikan pernyataan tertentu, kita memulai dengan membuktikan  $P(1)$  benar. Lalu  $P(2)$  akan bernilai benar karena pernyataan  $P(1) \rightarrow P(2)$ . Begitu juga dengan  $P(3)$ , karena  $P(2) \rightarrow P(3)$ . Begitu seterusnya sehingga kita dapatkan bahwa  $P(n)$  benar untuk semua bilangan bulat positif  $n$ .

Misalkan kita ingin membuktikan bahwa

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$  berlaku untuk semua bilangan bulat positif  $n$ . Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

*Basis Induksi:* Menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk  $n = 1$ . Jelas bahwa untuk  $n = 1$  pernyataan tersebut bernilai benar.

*Langkah Induksi:* Menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk  $n = k$  maka pernyataan tersebut juga benar untuk  $n = k + 1$ , dengan  $k$  adalah bilangan bulat positif. Hal ini bisa dilakukan dengan cara:

- Asumsikan untuk  $n = k$  dengan  $k \in \mathbb{Z}^+$ , pernyataan tersebut bernilai benar.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

- Tambahkan  $k + 1$  pada kedua ruas.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) \\ = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

- Lakukan manipulasi aljabar, maka akan didapatkan:

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\
 &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}
 \end{aligned}$$

- Dengan demikian, persamaan (2) menjadi

$$\begin{aligned}
 &1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) \\
 &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}
 \end{aligned}$$

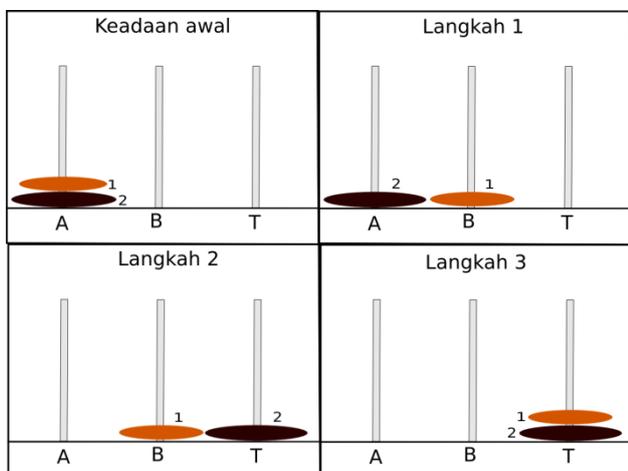
- Jadi pernyataan tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Seperti pada metode-metode pembuktian lain, ada kemungkinan kita akan melakukan kesalahan dalam pembuktian ini. Satu-satunya cara agar tidak melakukan kesalahan yaitu mengerjakan basis induksi dan langkah induksi secara lengkap dan benar. Akan sangat sulit sekali menemukan kesalahan pada pembuktian ini jika kita melakukan kesalahan.

#### IV. PENYELESAIAN MENARA HANOI

Tujuan dari penyelesaian menara Hanoi ini adalah untuk mencari langkah minimum sehingga tumpukan piringan pada tiang asal dapat dipindahkan ke tiang tujuan. Karena terdapat tiga tiang yang berbeda fungsi pada persoalan ini, kita namakan saja tiga tiang tersebut sebagai tiang "A" (tiang asal), tiang "T" (tiang tujuan), dan "B" (tiang bantuan). Agar kita dapat dengan mudah menyelesaikan permasalahan menara Hanoi ini, sebaiknya kita mulai dengan menyelesaikan menara Hanoi dengan 2, 3, dan 4 piringan.

Misal terdapat 2 piringan dalam menara Hanoi yang akan kita selesaikan. Dua piringan tersebut disusun pada tiang A, lalu akan dipindahkan ke tiang T. Lihat gambar berikut.



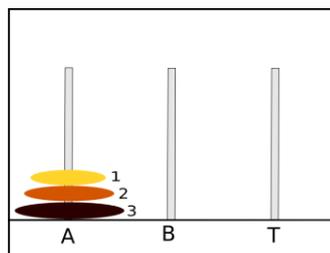
Gambar 1: Menara Hanoi dengan 2 Piringan

Langkah 1. Agar pada akhirnya piringan 1 berada di atas piringan 2 di tiang T, maka kita pindahkan piringan 1 ke tiang B.

Langkah 2. Pindahkan piringan 2 ke tiang T.

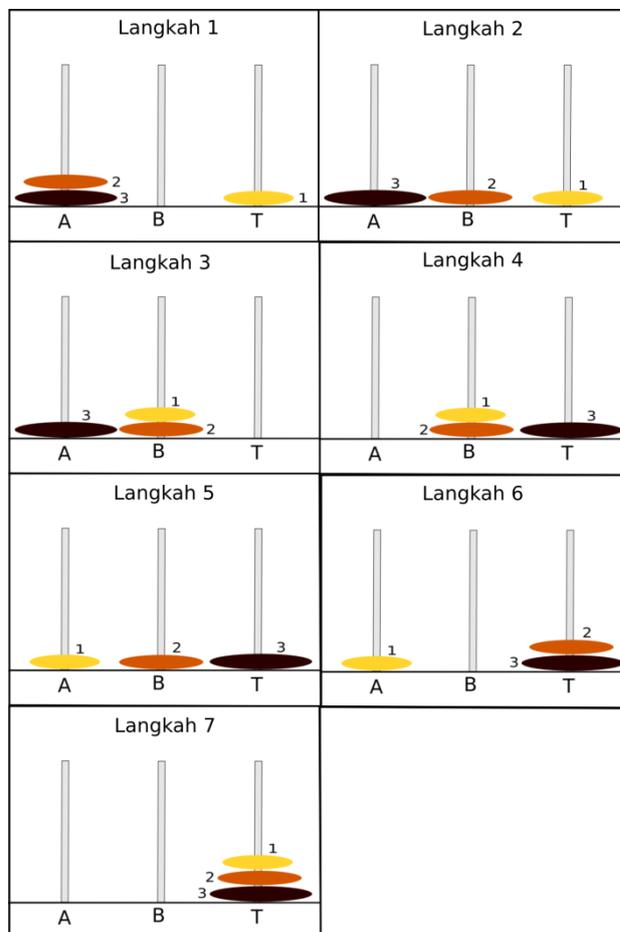
Langkah 3. Pindahkan piringan 1 ke tiang T, yaitu diletakkan di atas piringan 2.

Kita dapatkan bahwa terdapat 3 langkah pemindahan pada persoalan menara Hanoi dengan 2 piringan. Sekarang kita selesaikan persoalan menara Hanoi dengan 3 piringan. Lihat gambar berikut.



Gambar 2: Kondisi Awal Menara Hanoi dengan 3 Piringan

Agar pada akhirnya piringan 3 berada di bawah tumpukan pada tiang T, maka piringan 1 dan piringan 2 harus diletakkan di tiang B. Selanjutnya, piringan 1 harus diletakkan pada tiang T agar kita dapat meletakkan piringan 2 pada tiang B. Maka dapat kita susun langkah-langkah berikut agar menara Hanoi terselesaikan.



Gambar 3: Ilustrasi Langkah Penyelesaian Menara Hanoi dengan 3 Piringan

Langkah 1. Pindahkan piringan 1 ke tiang T.

- Langkah 2. Pindahkan piringan 2 ke tiang B.
- Langkah 3. Pindahkan piringan 1 ke tiang B.
- Langkah 4. Pindahkan piringan 3 ke tiang T.
- Langkah 5. Pindahkan piringan 1 ke tiang A.
- Langkah 6. Pindahkan piringan 2 ke tiang T.
- Langkah 7. Pindahkan piringan 1 ke tiang T.

Ternyata diperlukan 7 langkah untuk memindahkan ketiga piringan dari tiang A ke tiang T. Perhatikan pula bahwa langkah 1-3 dan langkah 5-7 pada persoalan ini merupakan ketiga langkah yang kita lakukan untuk menyelesaikan menara Hanoi dengan 2 piringan. Hanya saja label tiang A, B, dan T-nya yang berbeda.

Sekarang kita akan selesaikan persoalan menara Hanoi dengan 4 piringan. Tentu akan dibutuhkan lebih dari tujuh langkah untuk menyelesaikannya. Lihat gambar berikut. Agar piringan 4 dapat diletakkan pada tiang T, maka 3 piringan di atasnya harus diletakkan lebih dahulu ke tiang B. Untuk memindahkan piringan 1, 2, dan 3 ke tiang B, maka piringan 1 dan 2 harus diletakkan terlebih dahulu ke tiang T. Sebelum itu, piringan 1 harus diletakkan ke tiang B. Maka dapat kita susun langkah-langkah berikut.

- Langkah 1. Pindahkan piringan 1 ke tiang B.
- Langkah 2. Pindahkan piringan 2 ke tiang T.
- Langkah 3. Pindahkan piringan 1 ke tiang T.
- Langkah 4. Pindahkan piringan 3 ke tiang B.
- Langkah 5. Pindahkan piringan 1 ke tiang A.
- Langkah 6. Pindahkan piringan 2 ke tiang B.
- Langkah 7. Pindahkan piringan 1 ke tiang B.
- Langkah 8. Pindahkan piringan 4 ke tiang T.
- Langkah 9. Pindahkan piringan 1 ke tiang T.
- Langkah 10. Pindahkan piringan 2 ke tiang A.
- Langkah 11. Pindahkan piringan 1 ke tiang A.
- Langkah 12. Pindahkan piringan 3 ke tiang T.
- Langkah 13. Pindahkan piringan 1 ke tiang B.
- Langkah 14. Pindahkan piringan 2 ke tiang T.
- Langkah 15. Pindahkan piringan 1 ke tiang T.

Ternyata kita membutuhkan 15 langkah untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan 4 piringan. Perhatikan juga bahwa langkah 1-7 dan langkah 9-15 merupakan langkah yang kita lakukan pada persoalan menara Hanoi 3 piringan dengan mengubah label tiang.

Sadar atau tidak, kita telah menyelesaikan persoalan ini dengan proses rekursi. Untuk memindahkan 3 piringan, kita menggunakan langkah pemindahan 2 piringan. Untuk memindahkan 4 piringan, kita menggunakan langkah pemindahan 3 piringan. Begitu seterusnya hingga kita memerlukan langkah pemindahan  $(n - 1)$  piringan untuk memindahkan  $n$  piringan. Secara garis besar, langkah-langkah penyelesaian menara Hanoi melakukan langkah rekursif sebagai berikut.

1. Pindahkan piringan  $1-(n - 1)$  dari tiang A ke tiang B.
2. Pindahkan piringan  $n$  ke tiang T.
3. Pindahkan piringan  $1-(n - 1)$  dari tiang B ke tiang T.

Langkah penyelesaian tersebut dapat dinyatakan dalam relasi rekurens, yaitu,

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1; T_2 = 3.$$

$T_n$  adalah banyak langkah yang dilakukan untuk memindahkan  $n$  piringan.

Kita dapat menyelesaikan persoalan tersebut dengan manipulasi aljabar.

$$\begin{aligned} T_n &= 2T_{n-1} + 1 \\ &= 2(2T_{n-2} + 1) + 1 = 2^2T_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2T_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3T_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^3(2T_{n-4} + 1) + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^4T_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \dots \\ &= 2^{n-2}T_2 + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^{n-2}T_2 + \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n-2}T_2 + 2^{n-2} - 1 \\ &= 2^{n-2} \times 3 + 2^{n-2} - 1 \\ &= 4 \times 2^{n-2} - 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Kita dapatkan solusi dari relasi rekurens tersebut,  $T_n = 2^n - 1$ . Tetapi, kita perlu membuktikan dengan induksi matematik bahwa solusi tersebut benar untuk semua  $n \geq 2$ , dengan  $n$  adalah bilangan bulat.

*Basis Induksi:* Untuk membuktikan  $T_n$  benar untuk  $n \geq 2$ , kita perlu membuktikan  $T_2$  benar. Jelas bahwa  $T_2 = 2^2 - 1 = 3$  benar, karena diperlukan 3 langkah untuk menyelesaikan menara Hanoi dengan 2 piringan.

*Langkah Induksi:*

- Asumsikan  $T_k$  benar untuk  $k \geq 2$ , maka banyak langkah minimum untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan  $k$  piringan adalah  $2^k - 1$ .
- Tambahkan 1 piringan sehingga banyak langkah untuk menyelesaikan menara Hanoi dengan  $k + 1$  piringan adalah  $T_{k+1} = 2T_k + 1$ .
- Substitusi  $T_k = 2^k - 1$  dan lakukan manipulasi aljabar.

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 2(2^k - 1) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

- Jadi banyak langkah minimum untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan  $k + 1$  piringan adalah  $T_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ .

Berdasarkan induksi matematik tersebut, solusi  $T_n = 2^n - 1$  untuk  $n \geq 2$  bernilai benar. Jadi banyak langkah minimum untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi dengan  $n$  piringan adalah  $2^n - 1$ .

## V. KESIMPULAN

Salah satu cara untuk menyelesaikan persoalan menara Hanoi adalah dengan proses rekursi. Jika terdapat  $n$  piringan pada satu tiang, maka  $n - 1$  piringan paling atas

harus dipindahkan ke tiang bantuan. Setelah itu piringan terbesar dipindahkan ke tiang tujuan, sehingga  $n - 1$  piringan dapat dipindahkan kembali ke atas piringan terbesar di tiang tujuan. Dengan melakukan langkah-langkah rekursif tersebut, maka persoalan menara Hanoi dapat dipecahkan dalam  $2^n - 1$  langkah.

Pada legenda lama India, misalkan pendeta Brahma memerlukan waktu satu detik untuk melakukan satu langkah pemindahan cakram. Karena terdapat 64 cakram, pendeta Brahma akan memerlukan  $2^{64} - 1$  langkah untuk menyelesaikan tugasnya tersebut. Jadi akan dibutuhkan waktu sekitar 584.542 juta tahun untuk menyelesaikan pemindahan cakram tersebut dan saat itulah dunia akan kiamat.

## VII. TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan syukur dan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya tugas makalah ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada bapak Rinaldi Munir dan ibu Harlili selaku pengajar telah membagikan ilmu-ilmu yang beliau kuasai dengan ikhlas pada penulis dan memberikan kesempatan bagi penulis untuk menuangkan pikiran pada makalah ini. Tidak lupa, ucapan terima kasih juga diberikan kepada orang tua, keluarga, dan teman-teman Informatika atas dukungan dan semangat yang diberikan selama menjalani hari-hari kuliah. Akhir kata, penulis berharap makalah ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

## REFERENSI

- Rosen Kenneth, *Discrete Mathematics and its Applications, Sixth Edition*. New York: McGraw-Hill, 2007, ch. 4.  
Weisstein, Eric. "Tower of Hanoi." *MathWorld*. Wolfram Research.  
<http://mathworld.wolfram.com/TowerofHanoi.html>  
Diakses 16 Desember 2013 01:00  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Tower\\_of\\_Hanoi](http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi)  
Diakses 16 Desember 2013 01:00

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2013



Choirunnisa Fatima 13512084