

Penerapan Graf dan Pohon dalam Sistem Pertandingan Olahraga

Fahmi Dumadi 13512047
 Program Studi Teknik Informatika
 Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
 Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
 13512047@std.stei.itb.ac.id

Abstrak—Makalah ini membahas tentang beberapa sistem pertandingan olahraga dengan representasi graf atau pohon. Setiap sistem pertandingan akan ditentukan banyaknya jumlah pertandingan yang terjadi sesuai teori graf dan pohon sehingga dapat memperkirakan lamanya sebuah turnamen dilaksanakan atau memilih sistem pertandingan yang cocok turnamen tersebut yang disesuaikan dengan faktor lainnya.

Kata Kunci—Graf, pohon, sistem gugur, sistem kompetisi.

I. PENDAHULUAN

Suatu turnamen olahraga biasanya memiliki sistem pertandingannya sendiri. Turnamen yang baik harus memiliki sistem pertandingan yang cocok dengan mempertimbangkan faktor-faktor yang memengaruhinya seperti banyaknya pemain (jika perorangan) atau tim yang mengikuti turnamen, banyaknya tempat yang digunakan, dan waktu yang dialokasikan untuk turnamen tersebut. Seorang *event organizer* sebuah turnamen harus memikirkan hal-hal tersebut sehingga membutuhkan informasi banyaknya pertandingan yang akan terjadi dalam turnamen tersebut.

Pada makalah ini penulis berusaha untuk membuat representasi graf atau pohon dari beberapa sistem pertandingan, menganalisisnya, dan menentukan banyaknya pertandingan yang terjadi serta waktu yang dibutuhkan pada sistem pertandingan tersebut.

II. DASAR TEORI

A. Graf

Menurut buku *Matematika Diskrit* [1], secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut.

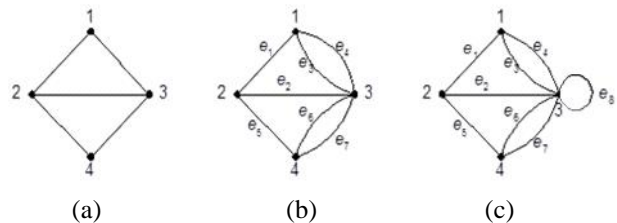
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; dan

E = himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$; atau dapat ditulis singkat dengan notasi $G = (V, E)$.

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan sudut pandang pengelompokkannya. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, graf dibagi menjadi 2 jenis, yaitu :

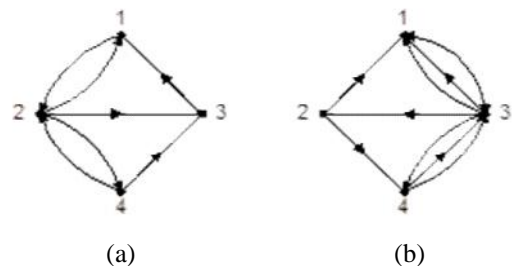
1. Graf sederhana
 Graf ini tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda.
2. Graf tak-sederhana
 Graf ini mengandung sisi-ganda yang disebut graf ganda (*multigraph*) atau gelang yang disebut graf semu (*pseudograph*).



[9] Gambar 2.1 (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

Berdasarkan orientasi pada sisi, graf dibagi menjadi 2 jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*)
 Sisi dari graf ini tidak mempunyai arah. Jadi, sisi $(u, v) = \text{sisi}(v, u)$ adalah sisi yang sama
2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)
 Setiap sisi dari graf ini diberikan orientasi arah. Sisi pada graf ini biasa disebut busur. Busur (u, v) berbeda dengan busur (v, u) . Untuk busur (u, v) , u dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan v dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*).



[9] Gambar 2.2 (a) graf berarah dan (b) graf-ganda berarah

Berikut beberapa terminologi dasar pada graf.

1. Bertetangga (*adjacent*)

Dua buah simpul pada graf tak-berarah dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sisi. Pada Gambar 2.1 (a), simpul 1 bertetangga dengan 2 dan 3 namun tidak dengan 4.

2. Bersisian (*incident*)

Untuk sembarang sisi $e = (u,v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v . Pada Gambar 2.1 (b), e_5 bersisian dengan simpul 2 dan simpul 4.

3. Derajat (*degree*)

Jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul adalah derajat simpul tersebut pada graf.

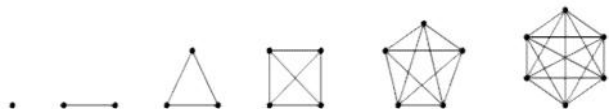
4. Lintasan (*path*)

Lintasan yang panjangnya n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G .

5. Sirkuit (*circuit*)

Sirkuit adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

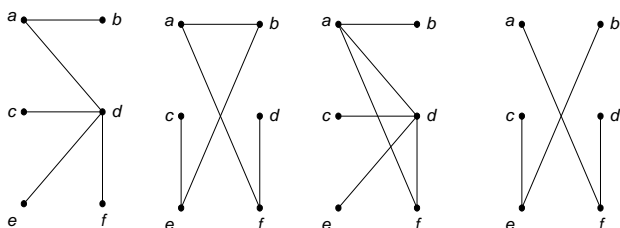
Graf memiliki beberapa jenis graf sederhana khusus, salah satunya adalah graf lengkap. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Berikut contoh graf lengkap.



[9] Gambar 2.3 Contoh graf lengkap dengan 1 simpul hingga 6 simpul

B. Pohon

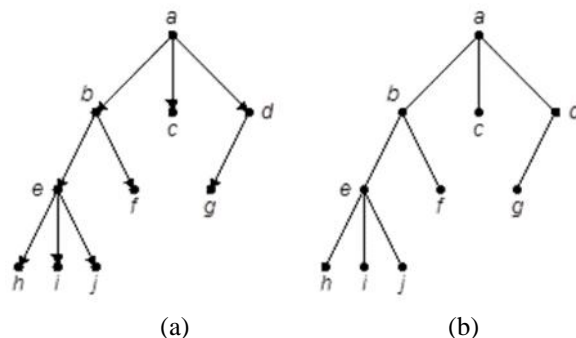
Menurut buku *Matematika Diskrit* [1], pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Graf tak-berarah terhubung adalah graf tak-berarah yang setiap pasang simpulnya terdapat lintasan, misalkan dari v_0 ke v_1 harus ada lintasan, yang juga ada lintasan dari v_1 ke v_0 , begitu juga dengan setiap simpul lainnya.



pohon pohon bukan pohon bukan pohon

[10] Gambar 2.4 Contoh graf pohon dan bukan pohon

Jika salah satu simpulnya diperlakukan sebagai akar (*root*) dan sisi-sisinya diberi arah maka pohon ini dinamakan pohon berakar (*rooted tree*).

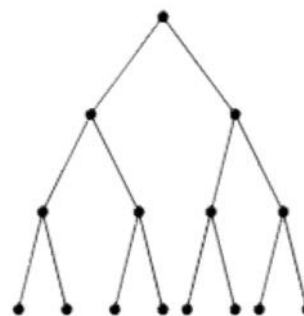


[10] Gambar 2.5 (a) pohon berakar, (b) sebagai perjanjian, tanda panah sisi dapat diabaikan

Pohon berakar memiliki beberapa terminologi dasar, yaitu:

1. Daun (*leaf*)
Daun adalah simpul yang berderajat nol (atau tidak mempunyai anak). Pada Gambar 2.5, simpul h,i,j,f, c, dan g adalah daun.
2. Simpul dalam (*internal nodes*)
Simpul dalam adalah simpul yang mempunyai anak.
Pada Gambar 2.5, simpul e,b, dan d adalah simpul dalam.

Pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak n buah anak disebut pohon n -ary. Jika $n = 2$, pohon ini disebut pohon biner (*binary tree*). Pohon n -ary dikatakan teratur atau penuh jika setiap simpul cabangnya mempunyai tepat n buah anak.



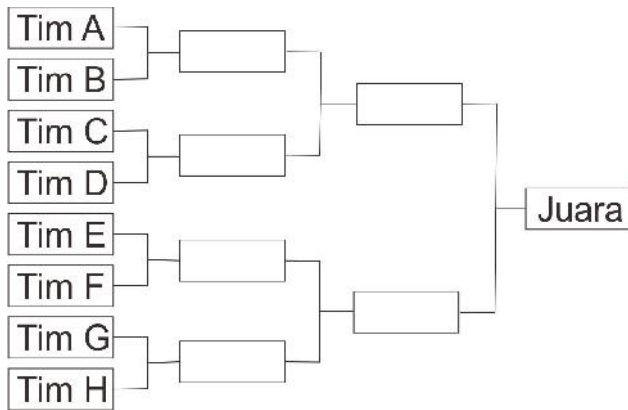
[10] Gambar 2.6 Pohon biner penuh (pohon n -ary dengan $n = 2$)

III. PENERAPAN GRAF DAN POHON DALAM SISTEM PERTANDINGAN OLAAHRAGA

Sistem pertandingan olahraga dasarnya ada 2 macam yaitu sistem gugur dan sistem kompetisi. Sistem pertandingan ini dapat kita representasikan dengan graf atau pohon.

A. Sistem Gugur

Sistem gugur adalah sistem pertandingan yang melibatkan seluruh peserta pertandingan di awal turnamen. Peserta yang kalah langsung keluar dari turnamen sehingga pada putaran berikutnya, banyak peserta berkurang setengahnya, sampai menyisakan satu pertandingan yang menentukan juaranya. Berikut bagan sistem gugur dengan representasi pohon.



Gambar 3.1 Pohon pertandingan turnamen dengan sistem gugur

Representasi pohon yang digunakan adalah pohon biner (*binary tree*) dengan 2 tim yang bertanding sebagai simpul daun dan pemenang pertandingan sebagai akar pohon tersebut. Untuk menghitung banyaknya pertandingan yang terjadi, menurut buku *Matematika Diskrit* [1], kita misalkan JP adalah banyaknya simpul dalam atau pertandingan yang terjadi dan n adalah banyaknya simpul daun atau banyaknya peserta di dalam pohon biner teratur.

Tabel 3.1 Representasi Pohon pada Sistem Gugur

Pohon	Sistem Gugur
Akar pohon	Juara turnamen
Simpul daun	Peserta turnamen
Simpul dalam	Kejadian pertandingan

Karena di dalam sistem gugur setiap pertandingan menggugurkan seorang pemain dan di akhir pertandingan yang dimainkan semua peserta telah gugur kecuali sang juara, maka banyaknya pertandingan yang terjadi satu lebih sedikit daripada jumlah pemain. Jadi, diperoleh hubungan:

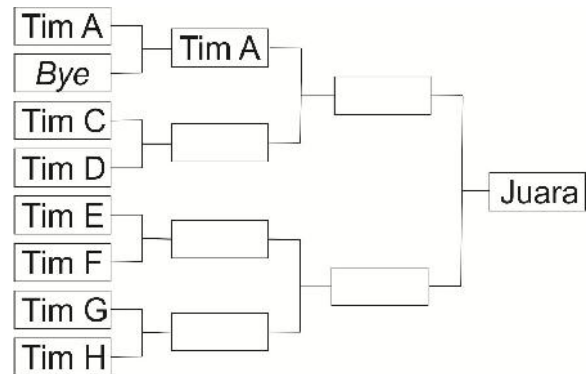
$$JP = n - 1 \quad (1)$$

Pada Gambar 3.1 banyaknya pertandingan yang terjadi dengan $n = 8$ adalah $JP = 8 - 1 = 7$ kali.

Ada 4 macam sistem gugur yaitu:

1. Sistem gugur normal
Sistem gugur ini sama seperti pada Gambar 3.1 yaitu jumlah peserta tepat sebanyak 2^x .
2. Sistem gugur dengan *bye*

Sistem gugur ini digunakan jika jumlah peserta kurang dari 2^x , atau lebih dekat dengan 2^x di atasnya. Misalnya 7 tim lebih dekat dengan 8 daripada 4 atau 13 tim lebih dekat dengan 16 daripada 8. Berikut contoh bagannya.

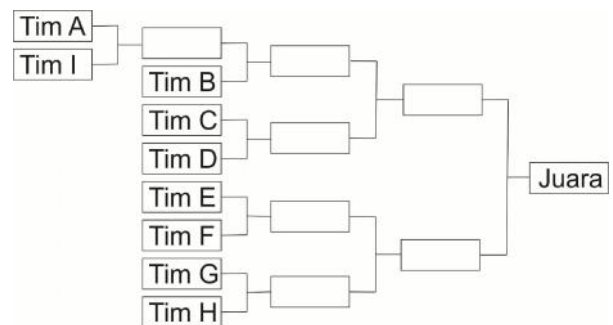


Gambar 3.2 Sistem gugur dengan jumlah peserta 7

Jumlah pertandingan yang normal akan berkurang sebanyak jumlah kejadian *bye*. Untuk menghitung banyaknya jumlah kejadian *bye*, maka kita tinggal menghitung kurangnya jumlah peserta untuk mencapai sistem gugur normal. Untuk menghitung jumlah pertandingan sama dengan sistem gugur normal yaitu menggunakan persamaan (1).

Contoh kasus : misalkan turnamen terdiri dari 27 peserta, maka jumlah kejadian *bye* adalah 5 kali karena 27 mendekati $32 = 2^5$ daripada $16 = 2^4$, sedangkan jumlah pertandingan adalah $JP = 27 - 1 = 26$ kali.

3. Sistem gugur dengan penyisihan
Sistem gugur ini digunakan jika jumlah peserta lebih dari 2^x , atau lebih dekat dengan 2^x di bawahnya, misalnya 6 tim lebih dekat dengan 4 daripada 8 atau 11 tim lebih dekat dengan 8 daripada 16. Berikut contoh bagannya. Berikut contoh bagannya.



Gambar 3.3 Sistem gugur dengan jumlah peserta 9

Jumlah pertandingan yang normal akan bertambah sebanyak selisih dari n dengan 2^x yang mendekati. Untuk menghitung jumlah pertandingan, sama

dengan sistem gugur normal menggunakan persamaan (1).

4. Sistem gugur dengan *seeded*

Sistem gugur ini identik dengan sistem gugur normal, namun beberapa tim ditempatkan tanpa pengundian misalnya juara bertahan harus berbeda kelompok dengan tim tuan rumah untuk menjamin agar peserta yang lolos babak berikutnya karena memang berprestasi, bukan karena keberuntungan. Sistem ini tidak direpresentasikan karena mirip sistem gugur normal, hanya berbeda saat pengundian peserta.

Bila turnamen diadakan dengan peraturan *home away* maka jumlah pertandingannya menjadi dua kalinya dari ketiga persamaan di atas yaitu:

1. Final dengan 1 kali tanding

$$JP_{akhir} = (JP_{awal} \times 2) - 1 \quad (2)$$

2. Final dengan 2 kali tanding

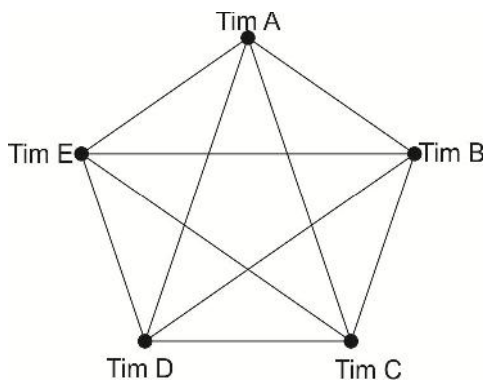
$$JP_{akhir} = (JP_{awal} \times 2) \quad (3)$$

B. Sistem Kompetisi

Sistem kompetisi adalah sistem pertandingan yang memberikan kesempatan kepada setiap pesertanya untuk bertanding melawan seluruh peserta dalam turnamen tersebut. Sistem kompetisi yang biasa digunakan adalah sistem setengah kompetisi (*round-robin*) dan sistem kompetisi penuh (*double round-robin*).

1. Sistem setengah kompetisi (*round-robin*)

Sistem kompetisi ini mempertemukan setiap timnya dengan semua tim sebanyak satu kali. Berikut representasi graf dari sistem ini.



Gambar 3.4 Sistem setengah kompetisi dengan representasi graf

Representasi graf yang digunakan adalah graf lengkap dengan simpul sebagai peserta turnamen dan busur menyatakan pertandingan. Misalkan busur(Tim A, Tim B) menyatakan Tim A melawan Tim B. Untuk menghitung banyaknya pertandingan yang terjadi dapat dilakukan dengan cara menghitung banyaknya busur pada graf tersebut. Misalkan n adalah banyaknya simpul. Untuk 1 buah simpul terdapat $(n - 1)$ busur sehingga untuk n busur terdapat $n(n - 1)$ busur. Namun setiap

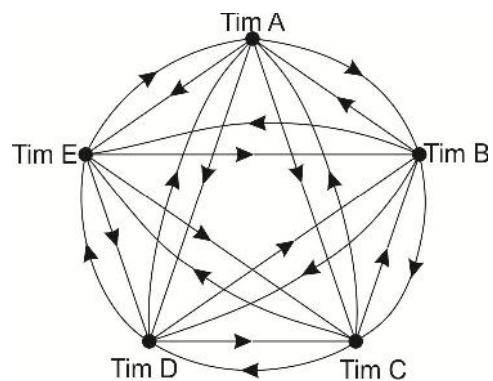
busur akan terhitung sebanyak 2 kali sehingga rumus untuk mencari banyaknya pertandingan dalam sistem kompetisi ini adalah

$$JP = n(n - 1) / 2 \quad (4)$$

Pada Gambar 3.4 banyaknya pertandingan yang terjadi adalah $JP = 5(5 - 1) / 2 = 10$ kali.

2. Sistem kompetisi penuh (*double round-robin*)

Sistem kompetisi ini mempertemukan setiap timnya dengan semua tim sebanyak dua kali dengan peraturan *home away*. Berikut representasi graf dari sistem ini.



Gambar 3.4 Sistem kompetisi penuh dengan representasi graf

Representasi graf yang digunakan adalah graf-ganda berarah dengan simpul sebagai peserta turnamen dan busur menyatakan pertandingan. Misalkan busur(Tim A, Tim B) menyatakan Tim A tandang melawan Tim B di kandang tim B. Sebaliknya busur(Tim B, Tim A) menyatakan Tim B bertandang melawan Tim A di kandang tim A. Banyaknya pertandingan pada sistem kompetisi ini adalah 2 kalinya dari sistem setengah kompetisi yaitu

$$JP = n(n - 1) \quad (5)$$

Contoh kasus: Pada *Premier League* (Liga sepak bola Inggris) terdapat 20 tim dalam turnamen tersebut dengan sistem kompetisi penuh. Banyaknya pertandingan yang terjadi dalam 2 musim adalah $JP = 20(20 - 1) \times 2 = 720$ kali.

C. Sistem Gabungan

Sistem pertandingan ini menggabungkan antara sistem gugur dengan sistem kompetisi. Biasanya sistem kompetisi dahulu yang digunakan pada putaran pertama dan putaran selanjutnya menggunakan sistem gugur. Contohnya pada turnamen sepak bola bergensi se-Eropa yaitu Liga Champions. Setelah tahap kualifikasi, tim yang berhasil lolos akan masuk fase grup dengan sistem

kompetisi penuh. Tim yang lolos sebanyak 32 akan dimasukkan ke 8 grup yang 1 grupnya terdiri dari 4 tim. Setelah fase grup selesai, diambil 2 tim dari tiap grup yaitu juara dan *runner-up* grup untuk masuk ke fase knock-out. Di fase ini sistem yang digunakan adalah sistem gugur normal *home away* dengan final 1 kali tanding. Banyaknya pertandingan yang terjadi di Liga Champions ini pada fase grup dan fase knock-out adalah sebagai berikut.

Jumlah pertandingan fase grup:

Dengan menggunakan persamaan (5) maka

$$8 \times n(n - 1) = 8 \times 4(4 - 1)$$

$$= 32 \times 3$$

$$= 96 \text{ pertandingan}$$

Jumlah pertandingan fase *knock-out*:

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (3) maka

$$2 \times (n - 1) - 1 = 2 \times (2 \times 8 - 1) - 1$$

$$= 2 \times 15 - 1$$

$$= 29 \text{ pertandingan}$$

Jadi, banyaknya pertandingan yang terjadi di Liga Champions pada fase grup dan fase knock-out adalah $96 + 29 = 125$ pertandingan.

D. Hubungan Jumlah Pertandingan, Waktu dan Tempat dalam Sebuah Turnamen

Dengan mengetahui banyaknya pertandingan yang akan terjadi dalam suatu kompetisi, kita dapat menghitung lamanya waktu yang dibutuhkan dalam sebuah turnamen. Untuk menghitung waktu yang dibutuhkan, kita dapat mengkalikan waktu yang dibutuhkan dalam 1 kali pertandingan misalnya t satuan waktu dengan kelima persamaan sebelumnya.

Pada kasus Liga Champions di atas jika satu pertandingan sepak bola berlangsung selama 2 jam, waktu yang dibutuhkan adalah 125×2 jam atau 250 jam. Jika dalam satu hari terjadi 4 pertandingan, turnamen akan berlangsung kurang lebih selama 63 hari. Namun kenyataannya Liga Champions tidak berlangsung selama itu. Hal ini dikarenakan ada faktor lainnya yaitu tempat bertanding.

Banyaknya tempat dapat membuat waktu sebuah turnamen semakin efisien karena dalam durasi 1 pertandingan bisa terjadi beberapa pertandingan sebanyak tempat yang digunakan untuk bertanding. Jadi banyaknya tempat yang digunakan untuk bertanding dengan lamanya waktu yang dibutuhkan dalam sebuah turnamen. Namun hal ini tidak akan terus berlangsung jika jumlah peserta yang bertahan lebih sedikit dari tempat yang tersedia.

IV. KESIMPULAN

Sistem pertandingan olahraga dapat direpresentasikan dengan graf atau pohon. Sistem gugur dapat direpresentasikan dengan pohon biner dan sistem kompetisi dapat direpresentasikan dengan graf lengkap.

Dari representasi tersebut dapat dicari jumlah pertandingan yang terjadi dalam suatu sistem dengan rumus pada makalah ini. Jumlah pertandingan ini dapat dihubungkan dengan waktu yang dibutuhkan suatu turnamen dan jumlah tempat pertandingan. Waktu yang dibutuhkan akan lebih sebentar jika jumlah tempat lebih banyak, begitu pula sebaliknya, sehingga waktu yang dibutuhkan berbanding terbalik dengan jumlah tempat pertandingan.

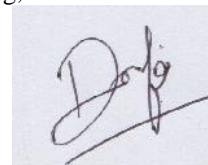
DAFTAR PUSTAKA

- [1] Munir, Rinaldi. *Diktat Kuliah IF 2120 Matematika Diskrit*. Bandung : Penerbit Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung. 2006. Bab 8-9.
- [2] <http://ws-or.blogspot.com/2011/09/sistem-pertandingan.html> diakses tanggal 14 Desember 2013 pukul 16.07
- [3] <http://ws-or.blogspot.com/2011/10/2.html> diakses tanggal 14 Desember 2013 pukul 16.10
- [4] http://id.wikipedia.org/wiki/Sistem_kompetisi diakses tanggal 14 Desember 2013 pukul 16.15
- [5] http://id.wikipedia.org/wiki/Sistem_gugur diakses tanggal 14 Desember 2013 pukul 16.18
- [6] <http://redcoholic.wordpress.com/2009/07/14/organisasi-sistem-pertandingan-part-1/> diakses tanggal 14 Desember 2013 pukul 16.23
- [7] <http://www.sepaxbola.info/p/klasemen-hasil-liga-champions.html> diakses tanggal 15 Desember 2013 pukul 15.03
- [8] <http://www.uefa.com/uefachampionsleague/> diakses tanggal 15 Desember 2013 pukul 15.10
- [9] Slide Kuliah Matematika Diskrit Graf (2013) diakses tanggal 16 Desember 2013 pukul 19.20
- [10] Slide Kuliah Matematika Diskrit Pohon (2013) diakses tanggal 16 Desember 2013 pukul 19.35

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2013



Fahmi Dumadi 13512047