

Aplikasi Teori Graf dalam Permainan *Instant Insanity*

Aurelia 13512099

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

13512099@std.stei.itb.ac.id

Abstract—Teori graf memiliki banyak sekali penerapan dalam kehidupan manusia. Berbagai permasalahan atau persoalan yang sering kita temui sehari-hari dapat diselesaikan dengan pendekatan teori graf. Struktur dalam permasalahan yang dimaksud dapat direpresentasikan dengan graf dan diselesaikan dengan bantuan graf. Salah satunya yang akan dibahas disini adalah aplikasi teori graf dalam mencari penyelesaian/solusi untuk sebuah permainan kubus berwarna yang bernama *Instant Insanity*.

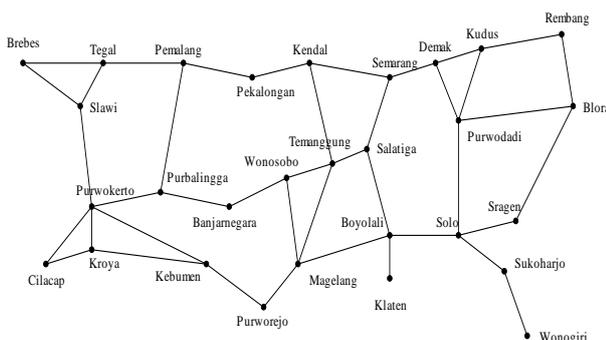
Index Terms—graf, kubus, simpul dan sisi, lintasan dan sirkuit

I. PENDAHULUAN

Istilah graf mungkin sudah tidak asing lagi didengar oleh telinga kita. Penerapannya bisa kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari untuk menyelesaikan masalah. Graf sendiri memiliki definisi struktur diskrit yang terdiri dari elemen simpul dan sisi yang menghubungkan simpul tersebut. Graf biasanya digunakan sebagai representasi dari hubungan antara objek-objek diskrit.

Salah satu contoh graf yang biasa dipakai secara umum adalah peta. Sebagai contoh adalah gambar peta Jawa Tengah dibawah ini. Titik-titik yang disebut simpul merepresentasikan tiap kota yang ada di dalam peta Jawa Tengah. Garis-garis yang menghubunginya disebut sisi.

Di dalam keilmuan Informatika juga sering dijumpai penggunaan graf untuk memudahkan pemecahan masalah. Misalnya, representasi graf untuk pengujian program komputer.



Gambar 1. Contoh representasi graf pada peta Jawa Tengah

Definisi graf dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$G = (V, E)$$

Dalam hal ini, V merupakan simbol untuk himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices*) = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sedangkan E merepresentasikan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Jika ada dua sisi yang menghubungkan dua buah simpul yang sama, maka sisi tersebut disebut sisi ganda. Ada juga tipe sisi yang berawal dan berakhir di simpul yang sama, yang dinamakan gelang atau kalang (*loop*).

Graf dapat dikembangkan dengan memberi bobot pada tiap sisinya, sehingga disebut graf berbobot. Dengan graf berbobot ini kita dapat menyelesaikan masalah semacam mencari lintasan terpendek dari suatu graf. Contoh yang lebih aplikatif adalah mencari jarak minimum dari suatu tempat ke tempat lain.

Selain diberi bobot pada sisinya, graf juga dapat dikembangkan dengan membuat sisinya berarah. Untuk yang satu ini disebut graf berarah.

Jenis-jenis graf digolongkan berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda dan berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Dari ada tidaknya gelang atau sisi ganda, dibedakan dua jenis graf. Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki gelang dan sisi ganda didalamnya. Sebaliknya, graf tak sederhana memiliki gelang atau sisi ganda. Sedangkan dari orientasi arah sisinya, ada graf tak berarah dan graf berarah.

Terminologi Graf

Ada berbagai istilah yang digunakan dalam pembelajaran teori graf. Berikut adalah beberapa terminologi graf :

1. **Ketetanggaan**
Simpul u dan simpul v dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.
2. **Bersisian**
Sebuah sisi dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v jika sisi tersebut menghubungkan kedua simpul u dan v .
3. **Simpul Terpencil**
Simpul terpencil adalah sebutan untuk simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya.
4. **Graf Kosong**

Sebuah graf disebut graf kosong jika himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.

5. Derajat

Suatu simpul memiliki derajat yang merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Untuk graf berarah, ada istilah derajat-masuk dan derajat-keluar, dan derajat simpulnya dihitung dari jumlah keduanya.

Ada sebuah teori, yang dikenal dengan Teorema Lemma, yang menyatakan bahwa untuk sembarang graf G , banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap.

6. Lintasan

Lintasan dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G . Panjang lintasan adalah jumlah sisi dalam lintasan tersebut.

7. Siklus atau Sirkuit

Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama akan membentuk sebuah siklus atau sirkuit. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut.

8. Terhubung

Dua buah simpul akan dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari simpul pertama ke simpul kedua. Suatu graf disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul v_i dan v_j dalam himpunan C terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Pada graf berarah, dibedakan jenis terhubung kuat (jika terdapat lintasan berarah dari u ke v dan sebaliknya) dan terhubung lemah (tidak terhubung kuat, tetapi terhubung pada graf tidak berarahnya).

9. Upagraf dan Komplemen Upagraf

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah upagraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Sedangkan komplemen dari upagraf G_1 terhadap graf G adalah graf $G_2 = (V_2, E_2)$ sedemikian sehingga $E_2 = E - E_1$ dan V_2 adalah himpunan simpul yang anggota-anggota E_2 bersisian dengannya.

Komponen graf adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G .

10. Upagraf Rentang

Upagraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan upagraf rentang jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 mengandung semua simpul dari G).

11. Cut-set

Sebuah himpunan sisi dari graf terhubung G yang bila dihilangkan dari G dapat menyebabkan G menjadi tidak terhubung disebut *cut-set*. *Cut-set* ini selalu menghasilkan dua buah komponen.

12. Graf Berbobot

Seperti sudah disinggung sebelumnya, graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya memiliki nilai (bobot).

juga ada pengertian tentang beberapa graf khusus.

1. Graf Lengkap

Graf lengkap merupakan graf sederhana dimana setiap simpulnya memiliki sisi ke semua simpul lain. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1)/2$.

2. Graf Lingkaran

Graf lingkaran juga merupakan graf sederhana. Ciri dari graf lingkaran adalah semua simpulnya memiliki derajat dua.

3. Graf Teratur

Graf teratur adalah sebutan untuk graf yang setiap simpulnya memiliki nilai derajat yang sama. Pada graf teratur dapat dihitung jumlah sisinya, yakni $nr/2$ dengan r adalah nilai derajatnya.

4. Graf Bipartite

Suatu graf yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian sedemikian sehingga setiap sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah simpul di himpunan bagian pertama ke yang kedua dapat disebut graf *bipartite*.

Representasi Graf

Graf dapat direpresentasikan dengan berbagai cara.

1. Matriks Ketetanggaan

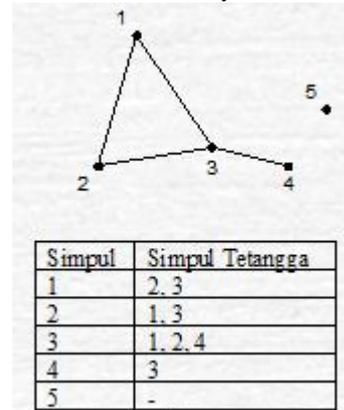
Ini merupakan cara representasi dengan matriks, dilihat dari segi ketetanggaannya. Sebuah elemen di baris i dan kolom j akan bernilai 1 jika simpul i dan j bertetangga, dan bernilai 0 jika tidak bertetangga.

2. Matriks Bersisian

Representasi ini hampir sama dengan yang sebelumnya, namun yang satu ini dilihat dari hubungan antara simpul dengan sisi, apakah bersisian atau tidak. Elemen di baris i dan kolom j akan bernilai 1 jika simpul i bersisian dengan sisi j , sedangkan jika tidak bersisian maka akan menunjukkan nilai 0.

3. Senarai Ketetanggaan

Senarai atau biasa dikenal dengan istilah *list* ini berisi daftar tetangga yang dimiliki oleh suatu simpul yang dimaksud. Contohnya adalah sebagai berikut.



Gambar 2. Contoh senarai ketetanggaan

Selain terminologinya, dalam pembahasan teori graf

Penggambaran Graf

Dalam penggambaran graf, dikenal istilah graf isomorfik. Graf isomorfik merupakan dua buah graf yang sama, yang hanya berbeda dalam penggambaran secara geometri. Ciri-ciri dari graf isomorfik adalah mempunyai jumlah simpul yang sama, mempunyai jumlah sisi yang sama, mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu, dan memenuhi korespondensi satu-satu. Selain mengecek keempat kondisi tersebut, untuk menentukan apakah suatu graf adalah isomorfik, perlu dilakukan pemeriksaan secara visual.

Selain itu, ada juga jenis graf planar dan graf bidang. Graf planar merupakan graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong atau bersilangan. Graf planar yang digambarkan dengan sisi-sisi yang tidak saling berpotongan disebut graf bidang. Graf planar ini termasuk graf yang memiliki banyak penerapan, misalnya pada perancangan *integrated circuit*.

Untuk lintasan dan sirkuit, ada 2 jenis yang dibahas dalam materi ini, yakni lintasan dan sirkuit Euler serta lintasan dan sirkuit Hamilton.

Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan pada graf G dikatakan lintasan Euler, ketika melalui setiap sisi di graf tepat satu kali. Jika lintasan Euler berawal dan berakhir di simpul yang sama, maka akan membentuk sirkuit Euler. Sehingga suatu graf yang memiliki sirkuit Euler disebut graf Euler.

Berbagai teorema dalam graf Euler adalah sebagai berikut.

1. Graf terhubung G adalah Euler jika dan hanya jika derajat dari masing-masing simpulnya genap.
2. Jika graf G memiliki lebih dari dua simpul yang berderajat ganjil, maka graf G bukanlah graf Euler. Sedangkan jika G memiliki dua simpul berderajat ganjil, maka G mempunyai lintasan Euler dan sama halnya pada graf yang memiliki satu simpul berderajat ganjil.
3. Suatu graf terhubung adalah graf semi Euler jika dan hanya jika memiliki tepat dua simpul yang berderajat ganjil.
4. Suatu graf berarah G mempunyai sirkuit Euler jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang jumlahnya sama. Pengecualian pada dua simpul, yang pertama memiliki derajat keluar satu lebih besar dari derajat masuk, dan yang kedua memiliki derajat masuk lebih besar dari derajat keluar.

Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Nama Hamilton diambil dari seseorang yang bernama Sir William Rowan Hamilton. Lintasan Hamilton merupakan lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Sedangkan sirkuit Hamilton adalah lintasan

Hamilton yang berawal dan berakhir di simpul yang sama. Graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut graf semi Hamilton.

Beberapa teorema tentang graf Hamilton :

1. Syarat cukup (bukan syarat perlu) agar graf sederhana G dengan jumlah simpul lebih dari 3 adalah graf Hamilton yaitu bila tiap simpul paling sedikit $n/2$.
2. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.
3. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul, terdapat $(n-1)/2$ buah sirkuit Hamilton.
4. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul (n lebih dari 3 dan n bernilai ganjil), terdapat $(n-1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas, yang berarti tidak ada sisi yang saling bersisian. Jika n genap dan nilainya lebih besar dari 4, maka di dalam G ada $(n-2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.
5. Misalkan G adalah graf terhubung sederhana dengan n buah simpul, dengan n bernilai lebih dari 3. Untuk tiap-tiap pasangan simpul yang tidak berdekatan, maka G adalah graf Hamilton.
6. Misalkan G adalah graf sederhana dengan n buah simpul. Jika jumlah dari derajat masing-masing simpul di G paling sedikit $(n-1)$, maka ada lintasan Hamilton di G .

II. PERMAINAN *INSTANT INSANITY*

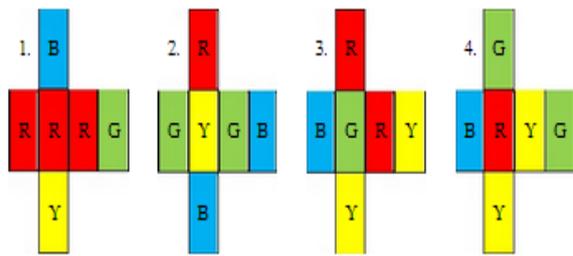
Instant Insanity adalah sejenis permainan kubus, dimana terdapat empat buah kubus yang permukaannya memiliki empat warna (merah, biru, hijau, dan kuning). Tujuan dari permainan ini adalah menumpuk kubus-kubus tersebut sedemikian rupa sehingga tiap sisi dari tumpukan itu (depan, belakang, kanan, dan kiri) menunjukkan keempat warna tersebut. Distribusi dari warna kubus tersebut haruslah unik.

Pada dasarnya ada sebanyak $3(24)^3$ cara untuk menyusun keempat kubus tersebut menjadi sebuah tumpukan. Yang sering menjadi kendala dalam menyusun warna-warna tersebut adalah ketika kita sudah berhasil membuat suatu sisi memiliki warna-warna berbeda, kita tidak bisa mengubah warna-warna di sisi sebaliknya lagi. Untuk mencari penyelesaian atau solusi untuk permainan ini, digunakanlah teori graf.

III. PENYELESAIAN DENGAN TEORI GRAF

Langkah-langkah penyelesaiannya dengan teori graf adalah sebagai berikut.

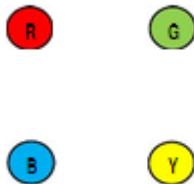
Kerangka dari masing-masing kubus digambarkan seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3. Kerangka kubus

Selanjutnya kita akan merepresentasikan keempat kubus tersebut dengan graf. Warna-warna pada keempat kerangka diatas kita buat menjadi titik-titik simpulnya, dan hubungan antar warna akan menjadi sisinya.

Ada empat simpul yang masing-masing akan mewakili warna merah, biru, hijau, dan kuning. Simpul-simpul ini akan diberi label sesuai warnanya. R untuk *red* (merah), B untuk *blue* (biru), G untuk *green* (hijau), dan Y untuk *yellow* (kuning).

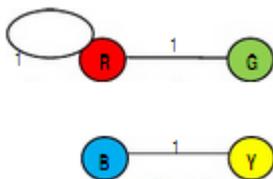


Gambar 4. Representasi graf keempat warna

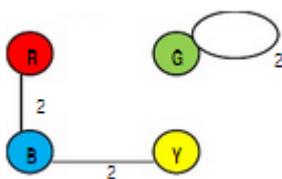
Selanjutnya kita akan menghubungkan simpul-simpul tersebut dengan sisi, untuk menggambarkan kubus yang saling berhadapan. Sebagai contoh, pada kubus 1, warna merah berhadapan dengan sisi yang berwarna hijau, maka kita akan menggambarkan garis sisi yang menghubungkan simpul warna merah dengan simpul hijau. Pada garisnya, diberi label nomor 1 sebagai penanda bahwa itu adalah sisi pada kubus 1.

Berikut adalah contoh pembuatan garis sisi pada masing-masing kubus.

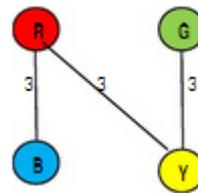
Kubus 1:



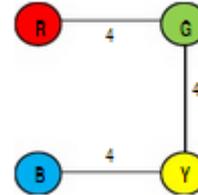
Kubus 2:



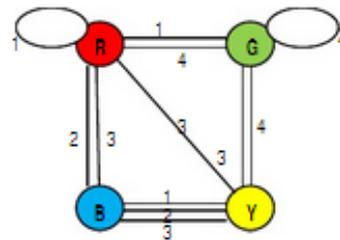
Kubus 3:



Kubus 4:



Setelah membuat graf dari masing-masing kubus tersebut, solusi dari permainan ini dapat kita cari dengan menggabungkan semua graf yang ada. Hasilnya akan menjadi seperti berikut.



Gambar 5. Gabungan dari keempat graf

Yang perlu kita cari adalah dua buah lintasan yang merupakan sirkuit, yang melintasi keempat simpul dan sisi dengan label nomor berbeda tepat satu kali. Dua lintasan yang dimaksud ini tidak boleh menggunakan sisi yang sama. Lintasan yang dicari bisa kita dapatkan dengan menggunakan teori lintasan dan sirkuit Euler dan Hamilton.

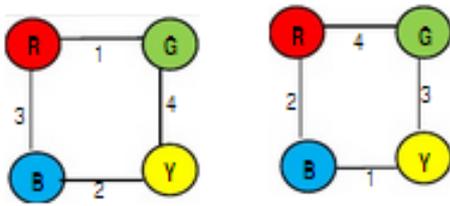
Pertama-tama kita mulai dari simpul G. Simpul G melalui sisi nomor 4 menuju ke simpul Y, dan begitu seterusnya sampai kembali lagi ke simpul G (melalui sisi nomor 1). Itu untuk lintasan pertama. Sedangkan lintasan kedua juga mengikuti tahap yang sama. Kedua sirkuit ini akan memakai keempat warna yang ada dan sisi-sisi yang saling menghubungkan antar warna.

Sirkuit pertama akan menunjukkan warna yang akan muncul pada permukaan sebelah depan dan belakang dari tumpukan kubus. Sirkuit kedua akan menunjukkan warna yang akan muncul pada permukaan sebelah kanan dan kiri.

Sirkuit yang dihasilkan adalah

$$G - 4 - Y - 2 - B - 3 - R - 1 - G,$$

$$G - 3 - Y - 1 - B - 2 - R - 4 - G$$



Gambar 6. Hasil sirkuit yang menjadi solusi

Untuk memulai membentuk tumpukan, bisa kita lihat dari sirkuit yang telah dibuat. Pada sirkuit pertama, mengandung G-4-Y, yang berarti pada kubus keempat, hijau dan kuning akan berada pada sisi yang saling berkebalikan. Maka dari itu, kita bisa mengambil kubus keempat dan mengaturnya sehingga warna hijau akan menghadap ke depan dan warna kuning ke belakang.

Begitu juga pada sirkuit kedua. B-2-R berarti pada kubus kedua, warna biru dan merah akan menghadap sisi yang berkebalikan. Biru akan menghadap ke kiri dan merah ke kanan dari tumpukan kubus.

Setelah itu, kita dapat melanjutkan ke kubus-kubus berikutnya. Pengaturan warna dapat dilakukan dengan memutar-mutar kubus di dalam tumpukan. Semua kubus diatur sedemikian rupa sesuai dengan solusi yang sudah kita dapatkan dengan pendekatan representasi graf.

Graf memang memudahkan visualisasi untuk membangun konstruksi dari tumpukan yang diinginkan. Yang terpenting adalah kita menemukan sirkuit yang paling tepat. Kita memulainya dengan menggambar graf yang merepresentasikan warna yang menghadap sisi yang saling berkebalikan. Lalu cari pasangan sirkuit dimana masing-masing sirkuit memakai keseluruhan empat warna yang ada beserta sisi-sisi yang menghubungkannya. Kesulitannya mungkin berada pada kenyataan bahwa tidak ada sisi yang mungkin muncul lebih dari satu kali dalam sirkuit. Terkadang pencarian membutuhkan percobaan berkali-kali untuk menemukan solusi yang tepat.

IV. KESIMPULAN

Kesimpulan dari pembahasan ini adalah bahwa permasalahan sehari-hari dapat diselesaikan dengan bantuan teori dan representasi graf. Salah satunya adalah pada pencarian solusi untuk permainan *Instant Insanity*. Pada permainan empat kubus berwarna ini, masing-masing warna direpresentasikan sebagai simpul graf, dan hubungan antar warnanya digambarkan dengan garis sisi graf. Untuk mencapai tujuan permainan, yakni membuat tumpukan kubus yang menunjukkan keempat warna berbeda pada semua sisi permukaannya, kita dapat menerapkan prinsip sirkuit graf. Sirkuit graf yang menjadi hasilnya adalah solusi atau cara kita menyusun tumpukan empat kubus berwarna tersebut.

REFERENCES

- [1] Keneth H. Rosen, "Discrete Mathematics and Its Applications", 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2012, ch.10.
- [2] Munir, Rinaldi. "Diktat Kuliah IF2120 Matematika Diskrit", Program Studi Teknik Informatika, 2008.
- [3] <http://www.math.cornell.edu/~mec/2003-2004/graphtheory/ii/howtoplayinstantinsanity.html> Tanggal akses: 15 Desember 2013 pukul 18.00.
- [4] <http://infoku22.blogspot.com/2013/teori-graf-dalam-four-cubes.html> Tanggal akses: 15 Desember 2013 pukul 19.00
- [5] <http://toshirominamoto.files.wordpress.com/2012/12/eulerian-graf-hamiltonian-graf.pdf> Tanggal akses: 16 Desember 2013 pukul 20.00

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 27 November 2013

ttd

Aurelia 13512099