Menentukan Pembagi Bersama Terbesar dengan Algoritma

Marcelinus Henry M. (13512082)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Tekonlogi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13512082@std.stei.itb.ac.id

Abstract - Dalam berbagai persoalan bilangan, pembagi persama terbesar atau yang biasa disebut PBB (*greatest common divisor atau gcd*) memegang peranan penting dalam beberapa persoalan bilangan dari yang sederhana hingga yang sangat kompleks sekalipun. PBB juga memegang peranan dalam kehidupan sehari-hari tanpa kita sadari. Makalah ini akan menjelaskan berbagai algoritma yang dapat digunakan untuk mengetahui nilai PBB dari dua bilangan bulat atau lebih.

Index Terms - bilangan bulat, faktor, algoritma Euclidean, pohon faktor

I. PENDAHULUAN

Euclid, matematikawan Yunani yang lahir pada 350 SM, menuliskan sebuah buku yang berjudul *Element*. Di dalam buku ini, dituliskan langkah-langkah untuk mencari nilai pembagi bersama terbesar (PBB) dari dua buah bilangan bulat m dan n, yaitu bilangan positif terbesar yang habis membagi dua bilangan tersebut.

PBB banyak digunakan dalam membahas berbagai teori bilangan yang ada dan juga untuk kehidupan sehari-hari. Maka dari itu, mencari nilai PBB dari beberapa bilangan sangat penting ntuk diketahui dan dipelajari.

II. TEORI

2.1 Definisi Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai komponen pecahan atau desimal. Bilangan bulat terdiri dari bilangan cacah (0, 1, 2, 3, …) dan negatifnya (-1, -2, -3, …; -0 adalah sama dengan 0 sehingga tidak lagi dimasukkan secara terpisah).

Himpunan semua bilangan bulat dalam matematika dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$, berasal dari *Zahlen* (bahasa Jerman untuk "bilangan").

2.2 Sifat-sifat operasi bilangan bulat

2.2.1 *Closure*

Jika *a* dan *b* adalah bilangan bulat, maka nilai penjumlahan dan perkalian dari *a* dan *b* juga merupakan bilangan bulat.

Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ maka

$a + b \in \mathbb{Z}$

$ab \in \mathbb{Z}$

2.2.2 Asosiatif

Jika *a*, *b*, dan *c* adalah bilangan bulat, maka penjumlahan dan perkalian dari ketiga bilangan tersebut sama hasilnya tanpa memperhatikan operasi penjumlahan atau perkalian yang didahulukan.

Jika $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a(bc) = (ab)c$

2.2.3 Komutatif

Jika *a* dan *b* adalah bilangan bulat, maka penjumlahan dan perkalian dari kedua bilangan tersebut sama hasilnya tanpa memperhatikan urutannya.

Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ maka

$a + b = b + a$

$ab = ba$

2.2.4 Identitas

Jika $a \in \mathbb{Z}$ maka

$a + 0 = a$

$a.1 = a$

2.2.5 Invers

Jika $a \in \mathbb{Z}$ maka

$a + (-a) = 0$

2.2.6 Distributif

Jika $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka

$a(b + c) = ab + ac$

2.3 Sifat pembagian pada bilangan bulat

Misalkan *a* dan *b* bilangan bulat, $a \neq 0$. *a* habis membagi *b* jika terdapat bilangan bulat *c* sedemikian sehingga $b = ac$.

Notasi : $a \mid b$ jika $b = ac$, $c \in \mathbb{Z}$ dan $a \neq 0$.

2.4 Pembagi Bersama Terbesar (PBB)

Misalkan *a* dan *b* bilangan bulat tidak nol. Pembagi bersama terbesar (PBB – greatest common divisor atau gcd) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d \mid a$ dan $d \mid b$. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa $\mathrm{PBB}(a,b) = d$.

2.5 Teorema Euclidean

Teorema 1. Misalkan m dan n bilangan bulat, $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

$$m = nq + r$$

dengan $0 \le r < n$.

Teorema 2. Misalkan m dan n bilangan bulat dengan syarat $n > 0$ sedemikian sehingga

$$m = nq + r, \quad 0 \le r < n$$

maka $\mathrm{PBB}(m,n) = \mathrm{PBB}(n,r)$

III. Menentukan PBB dari dua buah bilangan atau lebih

3.1 Menentukan PBB dari dua buah bilangan

Dalam menentukan PBB dari dua buah bilangan , kita bisa memakai beberapa cara diantaranya yang akan dibahas disini yaitu dengan mendaftar semua faktor bilangan, dengan pohon faktor, dan dengan algoritma Euclidean.

3.1.1 Menentukan PBB dengan mendaftar semua faktor yang mungkin.

Ambil 2 buah bilangan, misalkan 60 dan 72.

1	60
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10

Tabel faktor dari 60

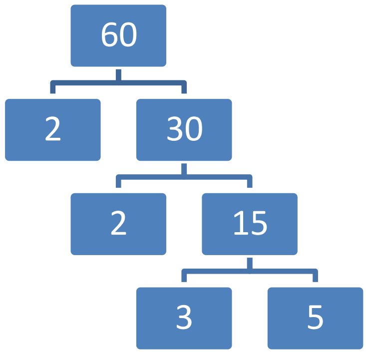
1	72
2	36
3	24
4	18
6	12
8	9

Tabel faktor dari 72

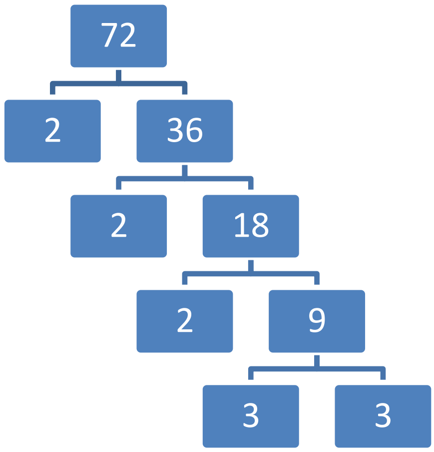
Dari tabel dapat dilihat bahwa faktor dari
60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
72 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
maka PBB(60, 72) = 12.

3.1.2 Menentukan PBB dengan pohon faktor

Kita ambil dua buah bilangan pada cara pertama yaitu 60 dan 72.



Pohon faktor dari 60



Pohon faktor dari 72

Dari pohon faktor tersebut didapat hasil sebagai berikut

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$72 = 2^3 \times 3^2$

maka $\mathrm{PBB}(60,72) = 2^2 \times 3 = 12$

3.1.3 Menentukan PBB dengan algoritma Euclidean

Representasi algoritma Euclidean dalam notasi algoritmik

Iteratif

```
function pbb(a, b : integer)

{Kamus Lokal}
t : integer

{Algoritma}
while (not (b = 0)) do
       t ← b
       b ← a mod b
       a ← t
→ a
```

Rekursif

```
function pbb(a, b : integer)
{Kamus Lokal}

{Algoritma}
```

```
if (b = 0) then
       → a
else
       → pbb(b, a mod b)
```

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat tak negatif dengan $a \geq b$. Misalkan $r_0 = a$ dan $r_1 = b$.

Lakukan algoritma Euclidean sebagai berikut

$r_0 = r_1 q_1 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_2 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < r_2$

$\vdots$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \qquad 0 \leq r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = r_n q_n + 0$

Menurut teorema 2,

$\mathrm{PBB}(a,b) = \mathrm{PBB}(r_0, r_1) = \mathrm{PBB}(r_1, r_2) = \ldots$

$= \mathrm{PBB}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \mathrm{PBB}(r_{n-1}, r_n)$

$= \mathrm{PBB}(r_n, 0) = r_n$

Bukti

Dari bentuk $r_0 = r_1 q_1 + r_2$ dapat diketahui untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ dan $x \mid r_0$ serta $x \mid r_1$ maka berlaku juga $x \mid r_2$ karena bentuk diatas bisa diubah menjadi $r_2 = r_0 - r_1 q_1$. Sehingga $\mathrm{PBB}(r_0, r_1) \mid r_2$ dan $\mathrm{PBB}(r_0, r_1) \mid r_1$. Maka didapat

$$\mathrm{PBB}(r_0, r_1) \leq \mathrm{PBB}(r_1, r_2).$$

Dari pembalikannya, didapat pula $PBB(r_1, r_2) \mid r_0$ dan $PBB(r_1, r_2) \mid r_1$. Sehingga didapat

$$PBB(r_0, r_1) \geq PBB(r_1, r_2).$$

Dari 2 pertidaksamaan tersebut, dapat disimpulkan

$$PBB(r_0, r_1) = PBB(r_1, r_2).$$

Hal ini berlaku seterusnya hingga salah satu dari nilai r bernilai 0.

3.2 Menentukan PBB lebih dari 2 buah bilangan

Pada pembahasan 3.1, PBB dari 2 buah bilangan dapat ditentukan dengan 3 cara yaitu dengan mendaftar semua factor yang ada, dengan membuat pohon factor dan dengan menggunakan algoritma Euclidean. Pada bagian ini akan dibahas bagaimana menentukan PBB lebih dari 2 bilangan dengan cara – cara yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya.

3.2.1 Menentukan PBB dengan mendaftar semua factor yang mungkin

Kita ambil 3 buah bilangan misalkan 126, 240, dan 180

1	126
2	63
3	42
6	21
7	18
9	14

Tabel faktor dari 124

1	240
2	120
3	80
4	60
5	48
6	40
8	30
10	24
12	20
15	16

Tabel faktor dari 240

1	180
2	90
3	60
4	45
5	36
6	30
9	20
10	18
12	15

Tabel faktor dari 180

Dari tabel dapat dilihat bahwa faktor dari

126 : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126

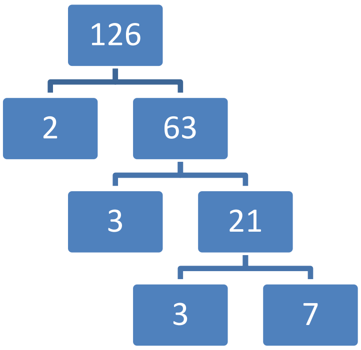
240 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240

180 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180

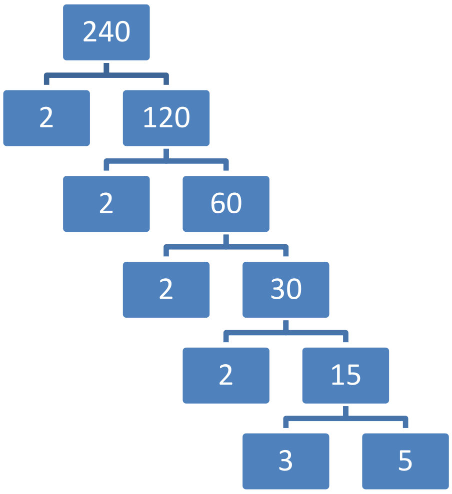
Maka $PBB(126, 240, 180) = 6$

3.2.2 Menentukan PBB dengan pohon faktor

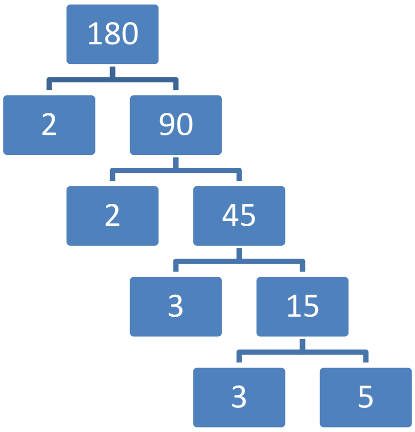
Kita pakai 3 buah bilangan pada cara 3.2.1 yaitu 126, 240, dan 180.



Pohon faktor dari 126



Pohon faktor dari 240



Pohon faktor dari 180

Dari pohon faktor tersebut didapat hasil sebagai berikut

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Maka $PBB(126, 240, 180) = 2 \times 3 = 6$

3.2.3 Menentukan PBB dengan algoritma Euclidean

Seperti yang kita ketahui, bahwa algoritma Euclidean hanya dapat menentukan PBB dari 2 buah bilangan saja. Namun, dengan sedikit modifikasi dan pembuktian, kita dapat menggunakan algoritma Euclidean untuk menentukan PPB dari beberapa buah bilangan.

Caranya yaitu dengan menggunakan algoritma Euclidean pada bilangan pertama dan kedua, kemudian menggunakan algoritma Euclidean pada hasil algoritma Euclidean yang sebelumnya dan bilangan ketiga. Teruskan proses hingga bilangan terakhir.

Misalkan akan dicari PBB dari bilangan bulat $a_1, a_2, \ldots, a_n$, maka langkah yang dilakukan yaitu

$PBB(a_1, a_2) = r_1$

$PBB(r_1, a_3) = r_2$

$PBB(r_2, a_4) = r_3$

$\vdots$

$PBB(r_{n-3}, a_{n-1}) = r_{n-2}$

$PBB(r_{n-2}, a_n) = r_{n-1}$

Dengan proses tersebut didapatkan PBB-nya yaitu r_{n-1}.

Bukti

Pembuktiannya hampir serupa dengan pembuktian pada algoritma Euclidean untuk mencari PBB dari 2 bilangan.

Jika $r \in \mathbb{Z}$, dan $r \mid PBB(a_1, a_2)$ serta $r \mid a_3$ maka

$PBB(a_1, a_2, a_3) \le PBB(PBB(a_1, a_2), a_3)$

Dengan cara yang sama didapat pula

$PBB(a_1, a_2, a_3) \ge PBB(PBB(a_1, a_2), a_3)$

Sehingga algoritma dalam notasi algoritmiknya menjadi

function pbb2(a : array [1..n] of integer)

{Kamus Lokal}

i : integer

hasil : integer

{Algoritma}

```
hasil ← a[1]
i traveral [2..n]
     hasil   ←   pbb(hasil,
     a[i]){pemanggilan
     algoritma Euclidean}
→ hasil
```

IV. KESIMPULAN

Dari pembahasan diatas dapat disimpulkan pencarian nilai PBB dari banyak bilangan dapat dilakukan dengan banyak cara, diantaranya dengan table factor, pohon factor, dan algoritma Euclidean baik yang murni maupun modifikasi.

V.DAFTAR REFERENSI

[1] M. Rinaldi, "Diktat Kuliah IF 2091 Struktur Diskrit", Program Studi Teknik Informatika, 2008, Bandung, Indonesia.

[2] http://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml, tanggal akses 16 Desember 2013 pukul 18.00

[3] http://rumus-matematika.com/pengertian-dan-operasi-bilangan-bulat/ tanggal akses 15 Desember 2013 pukul 20.00

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2011

Marcelinus Henry M
13512082