

# Aplikasi Graf Berbobot dan Pohon Merentang Minimum dalam Perancangan Jalur Trem di Kota Bandung

Fathan Adi Pranaya – 13511027  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
fathanpranaya@s.itb.ac.id

**Abstract**—Makalah ini berisi tentang bagaimana penerapan teori graf dan pohon yang sudah cukup tua mampu menjawab permasalahan masa kini, yaitu kemacetan. Graf berbobot digunakan sebagai dasar perancangan jalur Trem di Kota Bandung. Bobot dari graf menunjukkan biaya dari pembangunan jalur trem tersebut. Sementara itu, pohon merentang minimum digunakan untuk membuat jalur trem yang efektif dan semurah mungkin.

**Index Terms**—Bandung, Graf Berbobot, Pohon Merentang Minimum, Trem.

## I. PENDAHULUAN

Teori graf dan pohon merupakan bagian dari pembahasan ilmu Matematika yang sudah cukup tua usianya namun penerapan dari teori-teori ini masih mampu menyelesaikan permasalahan pada zaman sekarang. Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan teori graf dan pohon adalah permasalahan lalu lintas.

Permasalahan lalu lintas, yakni kemacetan merupakan masalah utama yang sampai saat ini masih belum ditemukan solusinya. Kemacetan merupakan masalah utama yang dihadapi hampir di setiap kota besar salah satunya adalah Kota Bandung. Salah satu faktor yang menyebabkan terjadinya kemacetan adalah penumpukan jumlah kendaraan bermotor pada waktu yang bersamaan. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu alat transportasi massal yang dapat melayani banyak warga Bandung pada waktu yang bersamaan. Alat transportasi yang mampu menjawab tantangan ini salah satunya adalah Trem.

Trem merupakan alat transportasi yang berbentuk seperti kereta dengan ukuran yang lebih kecil. Di luar negeri, Trem sering digunakan sebagai alat transportasi pengganti bus. Sehingga dengan adanya Trem, dapat dipastikan tingkat kemacetan di Kota Bandung akan berkurang.

Pada makalah ini akan dibahas mengenai penerapan teori graf khususnya graf berbobot dan teori pohon khususnya pohon merentang minimum. Graf berbobot digunakan untuk mengetahui biaya pembangunan dari suatu jalur trem, sedangkan pohon merentang minimum digunakan untuk membuat jalur trem menjadi efektif dan paling murah.

## II. TEORI GRAF

Graf merupakan pasangan himpunan simpul (vertex) dan sisi (edge) yang dapat direpresentasikan dengan gambar simpul baik yang dihubungkan dengan garis yang disebut sisi maupun tidak. Dari pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan simpul ( $V$ ) tidak boleh kosong, sementara himpunan sisi ( $E$ ) boleh kosong.

Pada umumnya, graf digambarkan kumpulan simpul dihubungkan dengan sisi yang merupakan hubungan antara simpul yang satu dengan simpul yang lainnya.

Secara matematis, graf dapat didefinisikan sebagai berikut.

Graf  $G$  merupakan himpunan  $(V,E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul,

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\}$$

dan  $E$  adalah himpunan sisi yang menghubungkan antara simpul yang satu dengan yang lain.

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n\}$$

Sehingga Graf  $G$  dapat dituliskan dengan notasi singkat

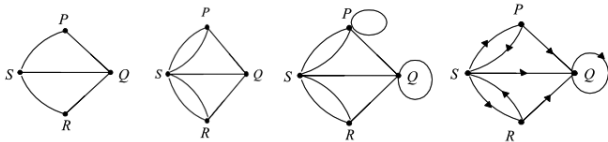
$$G = (V,E)$$

Graf dapat diklasifikasikan menjadi beberapa kelompok bergantung pada parameter pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat berupa ada tidaknya sisi ganda atau gelang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau gelang, graf dikelompokkan menjadi dua kelompok, yaitu graf sederhana dan graf tak-sederhana. Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki sisi ganda atau gelang, sedangkan graf tak-sederhana adalah kebalikan dari graf sederhana.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dikelompokkan menjadi dua kelompok juga, yaitu graf tak-berarah dan graf berarah. Graf tak-berarah merupakan graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah, sedangkan graf berarah adalah kebalikannya. Sisi pada graf berarah biasanya disebut busur sedangkan simpul yang

dihubungkan oleh busur biasanya disebut simpul asal dan simpul terminal.



**Gambar 1. Berbagai macam graf (Rosen, 2003)**

Selain teori dasar graf di atas, terdapat terminologi-terminologi dasar lainnya yang berkaitan dengan graf. Terminologi ini sangat penting untuk memahami teori graf selanjutnya. Terminologi dasar tersebut antara lain adalah sebagai berikut.

### A. Lintasan

Lintasan yang panjangnya  $n$  dari simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf  $G$ . (Munir, 2012)

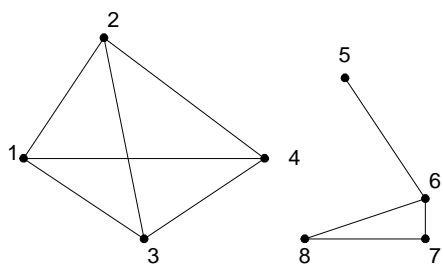
Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana jika semua simpulnya berbeda, yaitu setiap sisi yang dilalui hanya satu kali. Lintasan tertutup adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Sebaliknya, lintasan terbuka adalah lintasan yang berawal dan berakhir tidak pada simpul yang sama.

### B. Terhubung

Dua buah simpul  $u$  dan simpul  $v$  dikatakan terhubung bila terdapat lintasan antara simpul  $u$  dan simpul  $v$ . Secara formal, graf terhubung dapat didefinisikan sebagai berikut.

Graf tak-berarah  $G$  disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  di dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$ . Jika tidak, maka graf  $G$  disebut graf tidak terhubung. (Munir, 2012)

Graf yang hanya memiliki satu simpul saja, dikatakan graf terhubung karena graf pada simpul itu, terhubung dengan dirinya sendiri. Contoh graf terhubung dapat dilihat pada Gambar 4, sedangkan untuk graf tidak terhubung dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

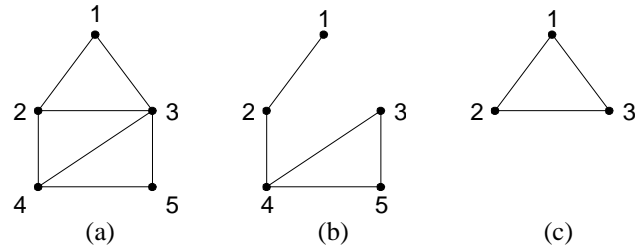


**Gambar 2. Contoh graf tidak terhubung (Munir, 2012)**

### C. Upagraf Merentang

Upagraf  $G_1 = (V_1, E_1)$  dari  $G = (V, E)$  dikatakan upagraf merentang jika  $V_1 = V$  dengan kata lain,  $G_1$  mengandung semua simpul  $G$ . (Munir, 2012)

Bila terdapat satu buah simpul ( $v_x$ ) dengan  $v_x$  adalah simpul dari  $G$  tetapi  $v_x$  bukan simpul dari  $G_1$ , maka  $G_1$  bukanlah upagraf merentang dari  $G$ . Untuk lebih jelasnya, upagraf merentang dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



**Gambar 3.**

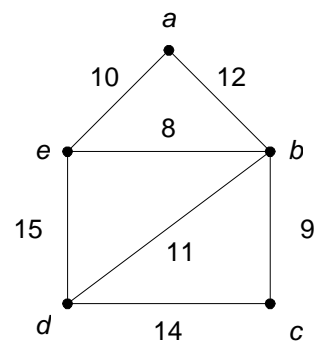
(a) Graf  $G$

(b) Upagraf merentang  $G$

(c) bukan upagraf merentang  $G$  (Munir, 2012)

### B. Graf Berbobot

Graf berbobot atau *weighted graph* adalah graf yang setiap sisinya diberikan sebuah nilai atau harga. Harga atau nilai pada sisi graf merupakan representasi dari masalah yang dimodelkan ke dalam graf. Nilai tersebut dapat merepresentasikan biaya perjalanan, waktu tempuh pesan, ongkos produksi, bahkan kompleksitas dari sebuah algoritma suatu program. Pada makalah ini, nilai yang terdapat pada graf berbobot menunjukkan biaya dari pembangunan lintasan trem.



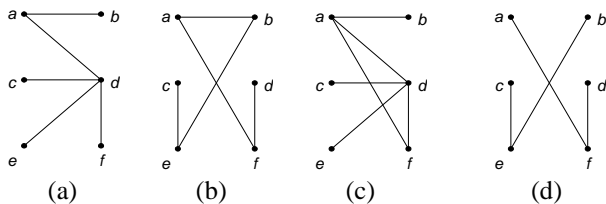
**Gambar 4. Contoh graf berbobot (Munir, 2012)**

Graf berbobot merupakan istilah khusus dari graf label. Pada graf berbobot, nilai hanya bisa diberikan pada setiap sisi graf saja, namun pada graf label nilai bisa diberikan pula pada simpul graf. Misalnya pada graf yang memodelkan kota-kota, simpul diberi label nama-nama kota sedangkan sisi-sisi diberi label jarak antar kota.

Terminologi-terminologi dasar di atas sangat berguna untuk memahami teori-teori pohon. Karena pada dasarnya pohon merupakan graf juga. Selanjutnya akan dijelaskan tentang teori-teori pohon.

### III. TEORI POHON

Secara umum, pohon dapat didefinisikan sebagai graf tak-berarah terhubung yang tidak memiliki sirkuit. Dari penjelasan pada teori graf dapat diketahui bahwa pohon adalah graf terhubung yang berarti selalu terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$  untuk setiap pasang simpul  $u$  dan  $v$  di dalam himpunan  $V$ . Selanjutnya pohon adalah graf yang tidak memiliki sirkuit, artinya tidak ada lintasan di dalam graf yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Untuk lebih jelasnya, pohon dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

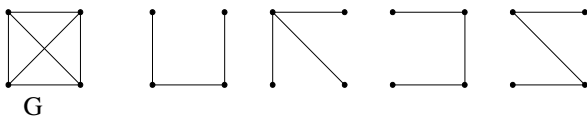


Gambar 5.

(a) pohon (b) pohon (c) bukan pohon (d) bukan pohon (Munir, 2012)

#### A. Pohon Merentang Minimum

Pohon merentang adalah pohon  $T$  yang semua simpulnya sama dengan semua simpul pada graf  $G$ , dan sisi pada pohon  $T$  merupakan anggota himpunan sisi pada graf  $G$ . Dengan kata lain, jika upagraf dari graf terhubung berbentuk pohon, maka upagraf merentang tersebut dinamakan pohon merentang.



Gambar 6. Graf lengkap  $G$  dan empat buah pohon merentang (Munir, 2012)

Pohon merentang minimum adalah pohon merentang dari graf  $G$  yang bernilai paling minimum. Pohon merentang minimum merupakan bagian terpenting dari makalah ini karena digunakan untuk menentukan jalur trem yang paling efektif dan paling murah.

Untuk mencari pohon merentang minimum, dapat dilakukan dengan menggunakan dua algoritma, yaitu algoritma Prim dan algoritma Kruskal.

#### B. Algoritma Prim

**Procedure** Prim (input  $G$  : graf, output  $T$  : pohon)

Kamus Lokal

$e$  : sisi

$i$  : **integer**

Algoritma

$T \leftarrow$  sisi  $e$  yang mempunyai bobot minimum di  $E$

$E \leftarrow E - \{e\}$

**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n - 2$  **do**

$e \leftarrow$  sisi yang mempunyai bobot terkecil di  $E$  dan bersisian dengan simpul di  $T$

$T \leftarrow T \cup \{e\}$

$E \leftarrow E - \{e\}$

Algoritma Prim (Munir, 2012)

1. Ambil sisi dari graf  $G$  yang berbobot minimum, masukkan ke dalam  $T$
2. Pilih sisi  $e$  yang mempunyai bobot minimum dan bersisian dengan simpul di  $T$ , tetapi  $e$  tidak membentuk sirkuit di  $T$ . Masukkan  $e$  ke dalam  $T$ .
3. Ulangi 2 sebanyak  $n - 2$  kali.

#### C. Algoritma Kruskal

1.  $T$  masih kosong
2. Pilih sisi  $e$  dengan bobot yang minimum yang tidak membentuk sirkuit di  $T$ . Masukkan  $e$  ke dalam  $T$
3. Ulangi langkah 2 sebanyak  $n - 2$

### IV. TREM

Trem merupakan kereta yang memiliki rel khusus dan beroperasi di dalam kota. Trem biasanya memiliki selang waktu keberangkatan 5-10 menit sehingga trem merupakan salah satu solusi untuk mengurangi kemacetan. Rangkaian trem umumnya hanya terdiri dari dua kereta atau gerbong agar tidak terlalu panjang. Trem biasanya disebut *light rail* karena menggunakan kereta yang lebih ringan dari kereta api, yakni sekitar 20 ton seperti bus. Letak rel trem dapat diintegrasikan dengan jalan raya, atau terpisah seperti *bus-way*.

Trem telah dikembangkan dengan berbagai macam sumber energi yang digunakan, mulai dari trem yang digerakkan dengan tenaga kuda, uap, kabel penarik, tenaga listrik bahkan dengan energy matahari *solar cell*. Trem tergolong alat transportasi yang ramah lingkungan karena sumber energy yang digunakannya. Saat ini trem sudah banyak digunakan di berbagai belahan dunia seperti kota Paris di Perancis dan kota Hannover di Jerman.



Gambar 7. Trem di Paris, Perancis dan di Hannover, Jerman (images.google.com)

Trem kota *Light Rail Transit* memiliki beberapa keunggulan dibandingkan dengan alat transportasi lain. Keunggulan pertama adalah dari segi daya angkutnya. Trem dapat mengangkut 80.000 penumpang per jam, sedangkan monorel hanya 40.000 dan bus way hanya mampu mengangkut 25.000 penumpang per jam. Keunggulan kedua, trem dapat terintegrasi dengan jalan raya kota sehingga tidak membutuhkan lahan yang terlalu banyak untuk pembangunan rel. Selain itu, biaya pembangunan dan operasi relatif lebih murah dibandingkan dengan monorel, bus-way atau sub-way.

### A. Sejarah Trem di Indonesia

Sebenarnya alat transportasi trem kota bukanlah hal baru di Indonesia. Alat transportasi ini sudah pernah ada di kota Jakarta dan Surabaya pada masa pemerintahan Hindia Belanda, yakni pada tahun 1899.

Di Jakarta, trem pernah beroperasi dengan jalur

- Jatinegara – Matraman – Pasar Senen – Ancol,
- Pasar Senen – Lapangan Banteng – Pasar Baru – Harmoni – Kota – Pasar Ikan, dan
- Kemayoran – Pasar Baru – Harmoni – Tanah Abang.

Sementara di Surabaya, trem beroperasi pada jalur

- Kebon Binatang – Darmo – Tunjungan – Tanjung Perak,
- Kebon Binatang – Pasar Turi – Jembatan Merah, dan
- Kebon Binatang – Gubeng – Stasiun Kota.



**Gambar 8. Trem di alun-alun kota Surabaya (images.google.com)**

Pada tahun 1985, di Bandung pernah ada perencanaan untuk membangun alat transportasi trem dengan rute sebagai berikut.

- Buah Batu – Dago
- Lapangan Tegalega – Ciembeuleuit via Pasar Kaliki
- Diponegoro – Jatinangor

Namun hingga kini, perencanaan ini tinggalah wacana tanpa realisasi yang jelas.

### IV. PERANCANGAN JALUR TREM

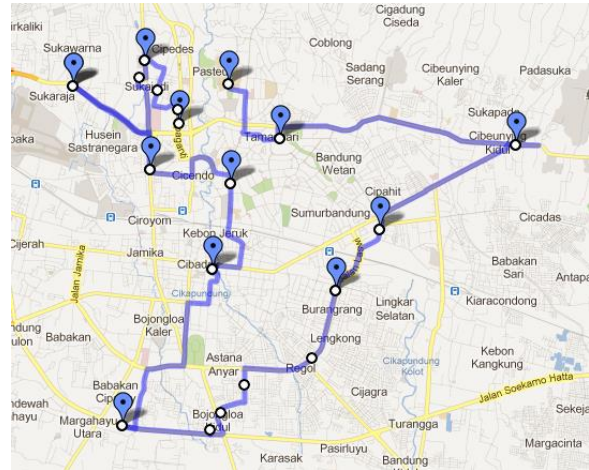
Perancangan jalur Trem di Kota Bandung didasari oleh tingkat kepadatan setiap harinya. Menurut news.okezone.com, 11 titik lalu lintas paling padat di Kota Bandung adalah sebagai berikut.

Nomor	Nama Daerah
1	Bandung Trade Centre
2	Istana Plaza
3	Bandung Indah Plaza
4	Alun-alun kota Bandung
5	Terminal Leuwi Panjang

6	Bandung Super Mall
7	Plaza IBCC
8	Gedung Sate
9	Taman Sari
10	Cihampelas Walk
11	Paris Van Java

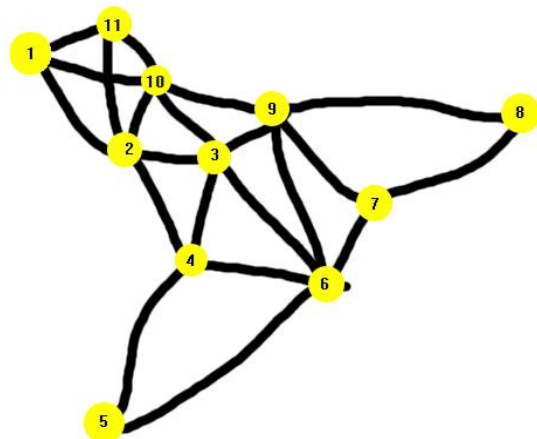
**Tabel 1. 11 titik padat lalu lintas**

Dengan memanfaatkan teknologi google maps, didapat letak untuk 11 titik kepadatan lalu lintas tersebut adalah sebagai berikut.



**Gambar 9. Letak 11 titik kepadatan lalu lintas di Kota Bandung (maps.google.com)**

Kemudian titik-titik kepadatan lalu lintas tersebut dijadikan sebagai stasiun trem dan kemudian dimodelkan sebagai simpul graf lalu dihubungkan satu sama lain sehingga didapat graf G seperti pada gambar di bawah ini. Dengan label simpul sesuai dengan tabel 1.



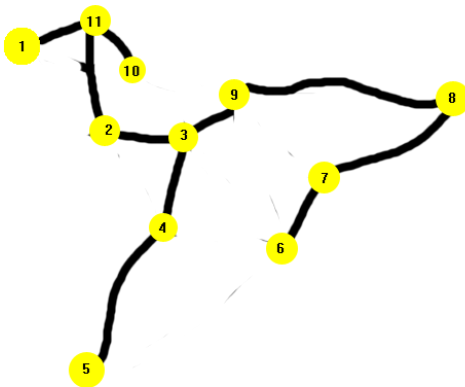
**Gambar 10. Graf yang memodelkan titik padat lalu lintas**

Dengan memanfaatkan teknologi google maps, didapat data jarak antara simpul-simpul dari graf di atas. Data jarak antara simpul di atas yang sudah terurut adalah sebagai berikut.

Sisi	Jarak (Km)
(10, 11)	1,6
(8, 9)	1,8
(2, 11)	1,9
(2, 3)	2,1
(3, 4)	2,2
(7, 8)	2,7
(2, 10)	2,8
(1, 11)	3,0
(6, 7)	3,0
(1, 2)	3,2
(3, 9)	3,2
(1, 10)	3,8
(4, 6)	3,8
(9, 10)	3,8
(2, 4)	4,3
(4, 5)	4,3
(3, 10)	4,4
(7, 9)	4,6
(3, 6)	4,8
(5, 6)	6,7
(6, 9)	7,7

**Tabel 2. Jarak masing-masing sisi pada graf**

Dari data tabel di atas, akan dicari pohon merentang minimum dengan algoritma Kruskal. Hasil pohon merentang minimum yang didapat adalah sebagai berikut.



**Gambar 11. Pohon merentang minimum hasil algoritma Kruskal**

Gambar di atas merupakan hasil pemodelan rancangan pembangunan jalur trem di Kota Bandung yang mangkus dan paling minimal bila dipandang dari sudut pandang jarak antar stasiun trem.

Pemodelan rancangan tersebut menggunakan graf berbobot dan pencarian pohon merentang minimum dengan algoritma Kruskal. Dengan konsep pohon merentang minimum, dapat dipastikan setiap trem dapat mengakses semua stasiun yang pada graf ini dimodelkan sebagai simpul-simpul pada graf. Dan hasil dari pohon merentang minimum adalah jalur trem yang paling minimum dalam biaya pembangunannya ditinjau dari jarak antar stasiun.

## V. KESIMPULAN

Dari proses pemodelan titik-titik kepadatan lalu lintas menjadi graf, lalu diproses dengan bantuan google maps didapat graf berbobot dengan nilai sisi merepresentasikan jarak antar titik kepadatan lalu lintas.

Kemudian dari graf berbobot tersebut dicari pohon merentang minimumnya dengan algoritma Kruskal dan didapatkan perancangan jalur Trem yang mangkus dengan biaya pembangunan paling murah seperti pada Gambar 11.

## REFERENSI

- [1] M. Rinaldi, *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika, 2012, pp. 353–456.
- [2] H. Delik, “MRT : Angkutan Perkotaan Masa Depan?,” unpublished.
- [3] <http://www.beritaunik.net/unik-aneh/trem-alat-transportasi-jakarta-di-masa-lalu.html> 4.17PM 17/12/2012
- [4] <http://jakarta.kompasiana.com/transportasi/2012/07/10/trem-vs-transjakarta/> 4.23PM 17/12/2012
- [5] <http://news.okezone.com/read/2011/08/21/340/494504/titik-titik-kemacetan-di-bandung> 4.32PM 17/12/2012
- [6] <http://maps.google.com> 9.20PM 17/12/2012

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 18 Desember 2012

Fathan Adi Pranaya – 13511027