

Aplikasi Pohon dan Logika pada Variasi Persoalan Koin Palsu

Akbar Suryowibowo Syam - 13511048

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganessa 10 Bandung 40132, Indonesia

Akbar.syam@s.itb.ac.id

Abstrak— Persoalan koin palsu adalah sebuah persoalan teka teki yang meminta pemain untuk menentukan sebuah koin palsu diantara koin-koin lainnya yang asli. Koin palsu memiliki berat yang berbeda dengan koin yang asli dan harus dapat ditentukan dengan menggunakan neraca lengan. Penulis berkeyakinan bahwa setiap jumlah n koin dapat diselesaikan dengan menggunakan hanya 3 kali penimbangan saja.

Kalimat Indeks—neraca, koin, pohon, logika

I. PENDAHULUAN

Dalam dunia teka-teki, terdapat sebuah persoalan yang cukup terkenal. Persoalan tersebut adalah persoalan mengenai koin palsu. Detail mengenai persoalan koin tersebut akan dibahas lebih lanjut pada bab II. Intinya, pemain diminta untuk menentukan sebuah koin palsu diantara koin-koin lain yang asli dengan menggunakan neraca dengan terdapat batas maksimal pemain dapat menggunakan neraca tersebut.

Dari persoalan tersebut, timbul pertanyaan baru yang terkait dengannya. Pertanyaan-pertanyaan tersebut adalah:

- Berapa kali timbangkah jumlah minimum yang dibutuhkan untuk menentukan koin yang palsu dan tentukanlah apakah koin tersebut lebih berat atau lebih ringan dari koin yang asli? (dengan jumlah koin n)

Dari pertanyaan tersebut, maka terciptalah makalah ini untuk menjawab pertanyaan diatas.

II. DASAR TEORI

A. Persoalan Koin Palsu

Terdapat sejumlah koin berjumlah n dimana terdapat $n-1$ buah koin yang asli dan sebuah koin palsu. Pemain diminta untuk menentukan yang manakah yang merupakan koin yang palsu dengan menggunakan neraca. Selain itu, pemain juga diminta untuk menentukan apakah koin yang palsu tersebut lebih ringan dari yang asli atukah lebih berat dari yang asli. Neraca yang dimaksudkan pada persoalan ini bukanlah neraca digital yang menunjukkan massa dari suatu benda, namun merupakan neraca dua lengan yang digunakan untuk membandingkan massa dari kedua

benda yang ditaruh pada tiap-tiap lengannya. Contoh dari neraca dua lengan yang dimaksud akan ditampilkan pada gambar dibawah ini.



Pada persoalan yang sebenarnya, diberikan delapan atau dua belas koin dimana salah satunya adalah koin yang palsu (terdapat dua versi, versi dengan delapan koin dan versi dengan dua belas koin). Pada makalah ini akan dibahas mengenai solusi dasar untuk mengerjakan masalah ini untuk mengkaji berapa kali jumlah timbang minimumkah yang dibutuhkan untuk meneliti koin palsu tersebut apabila jumlah koin terus bertambah.

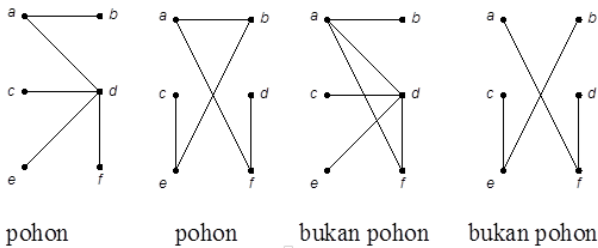
B. Pohon

Pohon adalah sebuah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Selain dari definisi yang telah disebutkan tersebut, terdapat sebuah teorema yang menunjukkan sifat-sifat (property) dari pohon, dimana dari sifat-sifat tersebut dapat menjadi definisi lain dari pohon.

Misalkan $G = (V,E)$ adalah sebuah graf tak-berarah sederhana dan jumlah simpulnya n . maka, semua pernyataan di bawah ini adalah ekuivalen :

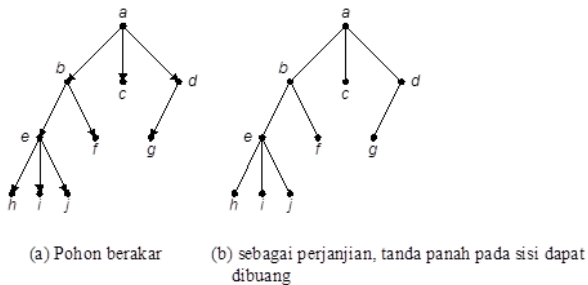
1. G adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal.
3. G terhubung dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
4. G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
5. G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.

6. G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan. Diatas ini telah disebutkan teorema yang digunakan sebagai definisi lain dari pohon.



C. Pohon Berakar (Rooted Tree)

Pohon berakar adalah sebuah pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah sehingga menjadi graf berarah. Akar tersebut biasanya diletakkan pada posisi paling atas sebagai perjanjian, namun tidak menyalahkan apabila akar dari pohon tersebut tidak diletakkan pada posisi paling atas.



Pada pohon berakar, terdapat beberapa terminologi yang sering digunakan untuk membantu menganalisa sebuah pohon berakar.

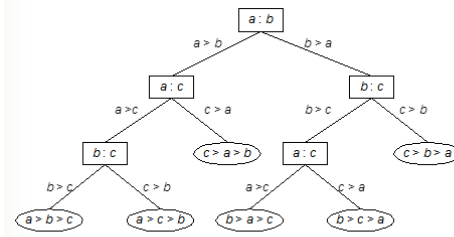
- Anak Pohon
- Orangtua
- Lintasan (*path*)
- Saudara kandung (*sibling*)
- Upapohon
- Derajat
- Daun
- Simpul dalam
- Aras (*level*)
- Tinggi / kedalaman

D. Pohon Keputusan (Decision Tree)

Pohon keputusan merupakan salah satu aplikasi dari pohon yang sangat berguna untuk menyelesaikan persoalan logika yang menggunakan perbandingan antar anggota persoalannya. Cara menggunakan pohon keputusan adalah dengan menuliskan peubah yang sedang dibandingkan sebagai simpul lalu kemudian sisi pada pohon adalah hasil dari perbandingan yang dilakukan. Pada makalah ini, untuk mempermudah pembaca untuk mengerti pohon keputusan yang ada, digunakan simbol '<' untuk merepresentasikan keadaan dimana lengan kiri lebih berat dari lengan kanan (lengan jatuh ke arah kiri) dan simbol '>' untuk merepresentasikan keadaan dimana lengan kanan lebih berat dari lengan kiri (lengan jatuh ke arah kanan), sedangkan simbol '=' digunakan untuk

merepresentasikan keadaan dimana kedua lengan berada pada posisi seimbang.

Dibawah ini adalah contoh gambar dari pohon keputusan.



Gambar Pohon keputusan untuk mengurutkan 3 buah elemen

III. HIPOTESIS PENELITIAN

Penulis memiliki sebuah hipotesis bahwa setiap kasus koin palsu dengan sebuah koin palsu dengan jumlah koin total n dapat diselesaikan dengan menggunakan 3 kali penimbangan saja.

Hipotesis tersebut dapat salah, oleh karena itu penulis mempunyai hipotesis alternative bahwa jumlah penimbangan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan kasus koin palsu tersebut meningkat sejalan dengan fungsi logaritma dasar, $\log n$, tanpa dicari basis dan konstanta yang memenuhi fungsi untuk menyelesaikan masalah.

IV. METODOLOGI PENYELESAIAN

Untuk menyelesaikan persoalan koin palsu ini, strategi yang layak untuk dilakukan adalah dengan membagi-bagi koin yang dimiliki (n) menjadi beberapa kelompok koin. Wajarnya, n buah koin tersebut dibagi menjadi 3 atau 4 buah kelompok koin. Tidak ada jumlah yang baku bagi pemain untuk membagi-bagi koin ke dalam kelompok-kelompok yang telah dibuat. Namun, wajarnya orang akan membagi kelompok menjadi sama rata tiap anggota kelompoknya karena akan memperkecil kedalaman dari pohon keputusan yang nantinya akan dibuat untuk menentukan koin manakah yang palsu.

Sebenarnya, terdapat cara yang paling sederhana untuk menentukan manakah koin yang palsu tersebut. Yaitu melakukan maksimal $(n-1)$ kali penimbangan dengan setiap penimbangan menggunakan satu buah koin. Namun cara tersebut sangatlah tidak efektif, karena terlalu banyak melakukan penimbangan. Oleh karena itu, cara dengan membagi-baginya menjadi kelompok-kelompok kecil koin adalah cara paling efektif karena memerlukan jumlah penimbangan yang paling sedikit.

V. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Untuk mencoba melihat apakah jumlah penimbangan yang dibutuhkan untuk mendeteksi koin palsu tersebut meningkat seiring dengan meningkatnya jumlah koin (n), maka telah dilakukan eksperimen dengan jumlah koin dari paling minimum yaitu 3 buah koin, karena 2 buah koin tidak ada yang "palsu" karena jumlah koin "asli" sama dengan jumlah koin "palsu". Dibawah ini akan dibahas pohon keputusan dari eksperimen yang telah dilakukan. Langkah-langkah penimbangan yang akan

ditulis dibawah ini adalah kasus terburuk yang mungkin terjadi pada distribusi kelompok koin palsu.

• **N = 3**

Karena koin hanya ada tiga buah sedang salah satu diantaranya adalah sebuah koin palsu, maka koin dibagi menjadi tiga buah kelompok dimana setiap kelompok terdiri atas sebuah koin (A,B,C).

1. Penimbangan pertama dilakukan oleh dua kelompok, misal A|B.
2. Penimbangan kedua dilakukan oleh A|C

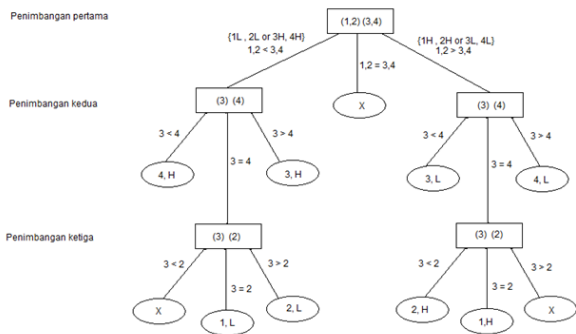
Dari kedua penimbangan tersebut, semua kemungkinan koin palsu dapat dideteksi dengan baik tanpa ada yang terlewat.

• **N = 4**

Untuk jumlah koin 4 buah, cara pembagiannya sama seperti n=3, yaitu membagi menjadi kelompok dengan anggota satu buah koin, menjadi empat buah kelompok. Kasus terburuk yang mungkin terjadi adalah dua penimbangan pertama menyebabkan lengan neraca menjadi seimbang, hal tersebut mengakibatkan pemain harus melakukan penimbangan ketiga.

1. Penimbangan pertama dilakukan oleh koin A|B
2. Penimbangan kedua dilakukan oleh koin A|C
3. Penimbangan ketiga dilakukan oleh koin yang sudah dapat dipastikan "asli" dengan satu koin yang sudah dapat dipastikan "palsu" namun belum diketahui ringan/beratnya.

Sekali lagi, seluruh kemungkinan koin palsu untuk koin manapun telah teratasi.



• **N = 5**

Pada n=5, koin sudah tidak layak lagi untuk dibagi menjadi kelompok dengan anggota sebuah koin, karena membagi menjadi 5 kelompok kecil sangat tidak efektif. Hal yang seharusnya dilakukan adalah membagi koin menjadi 3 kelompok kecil dengan jumlah anggota berturut-turut 2,2,1 {(A,B),(C,D),E}. kasus terbaik yang mungkin terjadi adalah E koin palsu karena hanya dibutuhkan 2 kali penimbangan.

1. Penimbangan pertama dilakukan oleh koin AB|CD

2. Kasus terburuk adalah $AB >> CD$ (tidak seimbang), maka penimbangan kedua yang dilakukan adalah koin A|B untuk melihat apakah koin palsu berada pada kelompok 1 atau kelompok 2
3. Bila koin palsu terbukti berada pada kelompok 1, maka penimbangan ketiga dilakukan oleh salah satu koin dari kelompok 1 (A / B) dengan salah satu koin dari kelompok 2 yang sudah terbukti asli (C / D). dari situ dapat dilihat koin mana kah yang palsu dan berat ringannya dapat dilihat dari penimbangan kedua atau ketiga.

• **N = 6**

Pada kasus ini, koin dibagi menjadi 3 kelompok kecil yang masing-masing beranggotakan 2 buah koin {(A,B),(C,D),(E,F)}. Pada kasus ini, kemungkinan terburuk yang mungkin terjadi adalah pemain membutuhkan 3 kali penimbangan walaupun banyak kemungkinan yang membutuhkan 3 kali penimbangan.

1. Penimbangan pertama dilakukan oleh 2 dari 3 kelompok yang ada. Misal AB|CD
2. Jika Sama : koin palsu berada di kelompok 3, maka penimbangan kedua adalah A|E
Jika Beda : belum diketahui keberadaan koin palsu, timbang AB|EF
3. Jika penimbangan kedua A|E, timbang AF bila A|E diketahui seimbang.
Jika penimbangan kedua AB|EF, timbang A|C dan ambil kesimpulan sesuai dengan kelompok yang mengandung koin palsu yang didapat dari akhir penimbangan kedua.

• **N = 7**

Pada kasus ini, koin dibagi menjadi 3 kelompok kecil yang masing-masing beranggotakan berturut-turut 3,3,1 {(A,B,C),(D,E,F),G}. lagi-lagi pada kasus ini pemain membutuhkan paling banyak 3 kali penimbangan sebagai kasus terburuk yang mungkin terjadi.

1. Penimbangan pertama dilakukan oleh koin ABC|DEF. Kasus terburuk adalah ABC|DEF tidak seimbang
2. Selanjutnya timbang AB|DG dengan keyakinan G adalah koin asli. Bila seimbang, maka kemungkinan koin palsu adalah C,E,F. bila tidak seimbang, maka kemungkinan koin palsu adalah A,B,G.
3. Bila yakin koin palsu berada di C,E,F, timbang E|F, tidak seimbang menyatakan koin yang palsu adalah koin yang jatuh ke arah yang sama dengan penimbangan pertama, sedangkan seimbang menyatakan koin palsu adalah C dengan arah seperti penimbangan pertama.
Bila yakin koin palsu berada di A,B,G, timbang A|B, dan lakukan analisa yang sama seperti kasus diatas.

Dapat dilihat pada kasus n=7 ini berbeda dengan kasus-kasus sebelumnya. Karena ini adalah pertama kalinya terdapat kasus dimana diharuskan terjadi penimbangan

dimana pada sebuah lengan terdapat koin yang berasal dari kelompok kecil yang berbeda bila ingin mendapatkan jumlah penimbangan yang minimum. Hal tersebut mengubah pola pikir yang selama ini digunakan dari $n=3$ sampai $n=6$, karena pemain akan diminta untuk mencari kombinasi koin lebih banyak dari pola pikir yang sebelumnya. Selanjutnya, pola pikir ini akan sangat berguna untuk menyelesaikan permasalahan untuk n yang lebih besar lagi.

- **N = 8**

Pada kasus koin ini, tidak terlalu banyak terdapat perbedaan dibandingkan dengan kasus $n=7$. Disini masih digunakan pola pikir yang sama dengan sebelumnya, dimana pemain harus mencoba kemungkinan untuk menimbang koin dari kelompok kecil yang berbeda untuk ditaruh di lengan neraca yang sama. Mirip seperti sebelumnya, pada kasus ini koin-koin dibagi menjadi 3 kelompok kecil yang berbeda yang masing-masing terdiri atas 3,3,2 jumlah koin secara berurutan $\{(A,B,C),(D,E,F),(G,H)\}$. Dengan menggunakan pola pikir yang baru ditemukan sebelumnya, kasus ini dapat diselesaikan hanya dengan 3 kali penimbangan saja, namun apabila pemain menggunakan pola pikir lama yang digunakan untuk $n=3$ sampai $n=6$, pemain tidak akan mungkin untuk mencapai kesimpulan hanya dengan menggunakan 3 kali penimbangan.

1. Penimbangan pertama dilakukan dengan koin ABC|DEF
2. Bila didapatkan seimbang, maka dapat diambil kesimpulan bahwa koin palsu terdapat di GH, dan dapat dengan mudah untuk dicari dengan menggunakan metode seperti pada kasus $n=3$.
Bila tidak seimbang, maka metode yang digunakan untuk mencari koin palsu yang terletak diantara koin ABCDEF sama persis dengan kasus $n=7$, yaitu dengan melakukan penimbangan AB|DG.
3. Seperti kasus sebelumnya, Bila yakin koin palsu berada di C,E,F, timbang E|F, tidak seimbang menyatakan koin yang palsu adalah koin yang jatuh kea rah yang sama dengan penimbangan pertama, sedangkan seimbang menyatakan koin palsu adalah C dengan arah seperti penimbangan pertama.
Bila yakin koin palsu berada di A,B,G, timbang A|B, dan lakukan analisa yang sama seperti kasus diatas.

- **N = 9**

sama seperti sebelumnya, lagi-lagi tidak terlalu terdapat perbedaan yang berarti baik dari pola pikir dalam mengerjakan masalah maupun pembagian koin ke dalam kelompok-kelompok kecil.

Pada kasus ini, seperti sebelum-sebelumnya, seluruh koin dibagi menjadi 3 kelompok kecil, dimana setiap kelompoknya terdiri dari 3 koin.

Koin yang akan digunakan untuk ditimbangpun tidak ada perbedaan dibandingkan dengan sebelumnya.

1. Penimbangan pertama dilakukan dengan koin ABC|DEF
2. Bila ditemukan seimbang, maka disimpulkan bahwa koin palsu terdapat pada kelompok ke-3, GHI. Maka dapat mengecek dengan melakukan penimbangan kedua berupa G|H

Dengan cara yang sama dengan kasus sebelumnya, bila ditemukan bahwa neraca tidak seimbang setelah penimbangan pertama, lakukan penimbangan AB|DG seperti biasa.

3. Untuk kasus AB|DG pada penimbangan kedua, tidak terdapat perbedaan dari kasus-kasus sebelumnya. Lakukan penimbangan atas E|F atau A|B sesuai dengan kebutuhan yang disimpulkan dari akhir penimbangan kedua.

Bila penimbangan kedua ditimbang G|H, kesimpulan dapat disesuaikan sesuai dengan metode yang digunakan ketika bermain dengan 3 koin ($n=3$).

- **N = 10**

pada tahap ini, pola pikir yang di dapat ketika percobaan $n=7$ sudah selayaknya untuk dianggap pola pikir yang wajar. Langkah pengerjaan untuk menyelesaikan masalah ini pun mirip dengan ketiga kasus yang sudah dibahas sebelumnya. Namun, di balik semua itu, terdapat sebuah perbedaan yang membedakan pembagian kelompok dan pemilihan kelompok untuk ditimbang di neraca lengan.

Pada kasus ini, koin-koin dibagi menjadi 4 kelompok kecil, berbeda dibandingkan dengan kasus sebelumnya, dengan masing-masing kelompoknya memiliki koin secara terurut 3,3,3,1 $\{(A,B,C),(D,E,F),(G,H,I),J\}$. kasus terburuk yang mungkin terjadi pada kasus ini adalah 3 kali penimbangan apabila dilakukan dengan benar. Walaupun dikatakan kasus terburuk, namun sebagian besar solusi dari kasus ini mengharuskan pemain untuk melakukan 3 kali penimbangan.

1. Penimbangan pertama dilakukan dengan koin ABC|DEF
2. Penimbangan pertama yang tidak seimbang akan mengacu pada penyelesaian yang sama seperti $n=7$, yaitu dengan melakukan penimbangan terhadap AB|DG.
Untuk kasus dimana penimbangan pertama menghasilkan lengan yang seimbang, penimbangan yang harus dilakukan selanjutnya adalah untuk mengecek apakah kelompok 3 asli atau tidak, yaitu ABC|GHI.
3. Pengecekan GHI yang seimbang menyebabkan koin J adalah koin palsu, dan dapat dilakukan penimbangan sekali lagi untuk mengecek apakah koin tersebut lebih ringan atau lebih berat dibandingkan koin yang asli.

Sedangkan pengecekan GHI yang tidak seimbang mengharuskan pemain untuk melakukan pengecekan G|H dan hasil koin yang palsu dan berat/ringannya dapat

disimpulkan dari hasil penimbangan tersebut.

Sampai di tahap ini, penulis memiliki keyakinan bahwa hipotesis utama yang diajukan oleh penulis masih bersifat benar dan dapat diandalkan. Namun ketika dilakukan pengecekan pada nilai n yang lebih tinggi, penulis mengalami masalah pada penyelesaian kasus, yaitu tidak ditemukan satupun solusi yang memenuhi apabila hanya dilakukan 3 kali penimbangan saja secara maksimal. Contohnya dibawah ini diberikan kasus $n=11$.

- **N = 11**

Pada kasus ini, apapun pembagian kelompok dengan jumlah apapun tidak menghasilkan solusi koin palsu dengan hanya berpacu pada hipotesis utama yang meminta untuk menyelesaikan masalah hanya dengan maksimal 3 kali penimbangan.

VI. KESIMPULAN

Kesimpulan yang didapat oleh penulis adalah hipotesis utama yang diajukan oleh penulis tidak dapat diterima (ditolak) karena terdapat satu atau lebih kondisi dimana hipotesis utama yang diajukan penulis tidak dapat dipenuhi. Oleh karena itu, kesimpulan yang diambil oleh penulis adalah hipotesis alternative yang diajukan oleh penulis, yaitu jumlah penimbangan yang dibutuhkan pemain untuk menyelesaikan persoalan meningkat dengan fungsi logaritma dasar.

REFERENSI

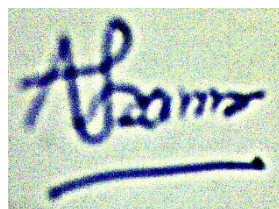
- [1] Richard Johnsonbaugh, "Discrete Mathematics", 6th ed. ,Pearson Prentice Hall: United State of America, 2005, ch 9.
- [2] Rinaldi Munir, "Struktur Diskrit", 3th ed, Informatika Bandung : Bandung, 2007, ch 9.
- [3] <http://www.referenceforbusiness.com/encyclopedia/Cos-Des/Decision-Tree.html>, *Decision Tree*, diakses pada tanggal 18 Desember 2012
- [4] <http://www.iwriteiam.nl/Ha12coins.html> , *Coins Problem*, diakses pada tanggal 18 Desember 2012.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 19 Desember 2012

ttd



Akbar Suryowibowo Syam - 13511048