

# Pengaplikasian Graf Planar pada Analisis Mesh

Farid Firdaus - 13511091

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

faridfirdaus17@gmail.com

**Abstrak**—Makalah ini akan membahas tentang kegunaan dan pemanfaatan dari teori graf yang telah dipelajari pada mata kuliah Struktur Diskrit. Penulis akan membahas ruang lingkup permasalahan yaitu graf yang akan dibahas adalah tentang graf planar dan pemanfaatannya pada bidang elektro tepatnya dalam analisis mesh. Analisis ini hanya dapat bekerja pada kondisi tertentu. kondisi-kondisi inilah yang akan dibahas dalam makalah ini.

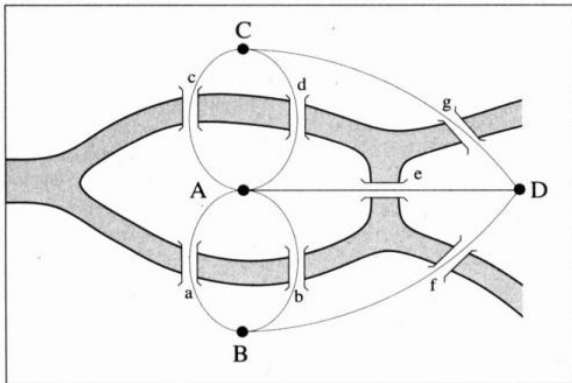
**Kata Kunci**—Analisis Mesh, Graf Planar, Resistansi, Tegangan

## I. PENDAHULUAN

Graf adalah salah satu teori dasar yang sangat penting dalam berbagai disiplin ilmu. Graf sendiri tercatat pertama kali pada tahun 1736. Di kota Königsberg terdapat sungai yang bercabang menjadi dua buah anak sungai. Untuk menghubungkan transportasi antar sungai, terdapat 7 buah jembatan.

Masalah jembatan Königsberg yaitu : apakah mungkin melalui seluruh jembatan tepat satu kali dari satu titik dan kembali ke titik semula?

Masalah ini tidak dapat dipecahkan kecuali dengan cara coba-coba. Hingga akhirnya seorang matematikawan Swiss bernama L.Euler dapat menjelaskan jawaban akan masalah ini secara matematis menggunakan graf. Jawaban yang dikemukakan adalah tidak mungkin untuk melewati ketujuh jembatan tepat satu kali sesuai dengan syarat pada masalah jembatan Königsberg, jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap.



Gambar 1.1 Penggambaran Masalah Jembatan

## Königsberg sebagai Graf

Pemanfaatan teori graf tidak hanya untuk masalah teka-teki diatas. Ada banyak hal yang dapat disederhanakan dengan menggunakan teori graf. Berikut adalah beberapa contoh pemanfaatan graf:

1. Graf berarah digunakan dalam representasi struktur data pohon.
2. Graf berbobot dapat digunakan untuk memutuskan suatu masalah yang membutuhkan bobot terkecil
3. Arus Mesh pada rangkaian elektronik sederhana hanya dapat digunakan jika rangkaian berupa graf planar.

## II. TEORI DASAR

### 2.1 Definisi Graf

Secara matematis, graf di definisikan sebagai berikut

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$ , yang dalam hal ini  $V$  adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* dan *nodes*) dan  $E$  adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul

Definisi diatas menyatakan  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Untuk graf yang memiliki 1 simpul tanpa sisi disebut graf trivial.

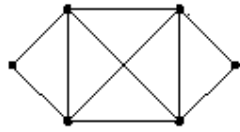
### 2.2 Jenis-Jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa bagian kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya . Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan pada ada tidaknya sisi ganda tatau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf pada digolongkan menjadi dua jenis.:

#### 2.2.3 Graf sederhana

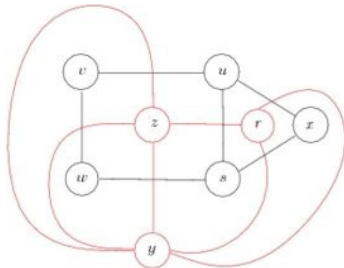
Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak-terurut. Graf sederhana juga dapat didefinisikan sebagai  $G=(V, E)$  terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan  $E$  adalah himpunan pasangan tak-terurut yang berbeda yang disebut sisi.



**Gambar 2.1 Graf Sederhana**

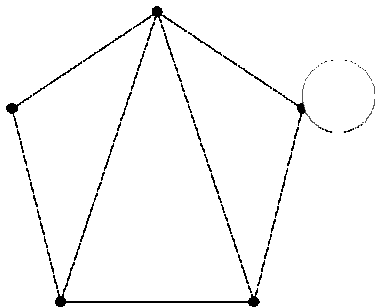
**2.2.4 Graf tak-sederhana**

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana. ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf tak-sederhana yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ini dapat berjumlah dua atau lebih, asal memiliki kedua simpul yang sama.



**Gambar 2.2 Graf Ganda**

Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*). Gelang sendiri adalah suatu sisi yang dimana kedua simpulnya adalah simpul yang sama.

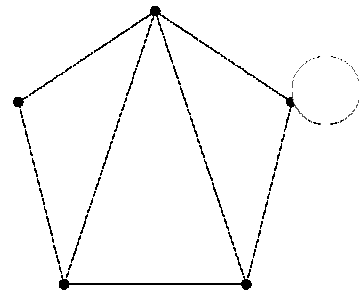


**Gambar 2.3 Graf Semu**

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum, graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis:

**2.2.5 Graf tak-berarah**

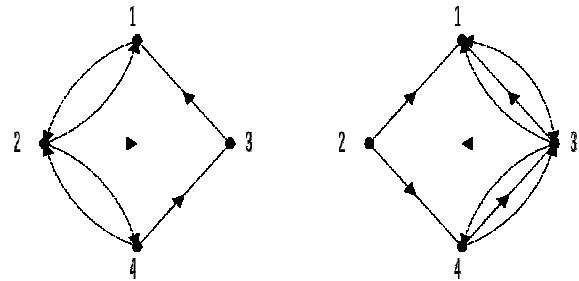
Pada graf tak berarah, sisinya tak memiliki arah, oleh karena itu, penulisan  $(u,v)$  dan  $(v,u)$  akan menghasilkan sisi yang sama.



**Gambar 2.4 Graf tak-berarah**

**2.2.6 Graf berarah**

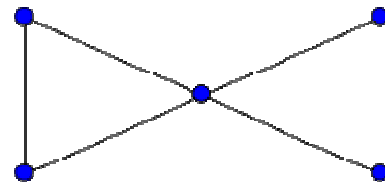
Pada graf berarah, setiap sisinya diberikan arah. Akibatnya, untuk setiap sisi terdapat simpul asal dan simpul tujuan, sehingga  $(u,v) \neq (v,u)$ . Kedua contoh graf dibawah adalah contoh sebuah graf berarah. Graf ini digunakan untuk merepresentasikan struktur data pohon



**Gambar 2.5 Graf Berarah**

**2.3 Graf Planar**

Sebuah graf  $G = (V,E)$  disebut graf planar apabila graf tersebut dapat digambarkan dalam sebuah bidang datar tanpa ada sisi yang saling berpotongan (kecuali sisi berpotongan pada sebuah simpul)



**Gambar 2.6 Graf Planar**

Untuk membuktikan apakah sebuah graf  $G$  adalah graf planar, dapat digunakan teorema kuratowski. Teorema ini mengatakan graf  $G$  bersifat planar jika dan hanya jika ia tidak mengandung subgraf yang sama dengan salah satu graf kuratowski atau homomorfis dengan salah satunya. Sifat dari graf kuratowski adalah :

1. graf kuratowski adalah graf teratur
2. graf kuratowski adalah graf non-planar
3. penghapusan sisi atau simpul dari graf kuratowski menyebabkan graf menjadi planar
4.  $K_5$  adalah graf non-planar dengan jumlah simpul minimum,  $K_{3,3}$  adalah graf non-planar dengan jumlah sisi minimum

### III. PEMBAHASAN

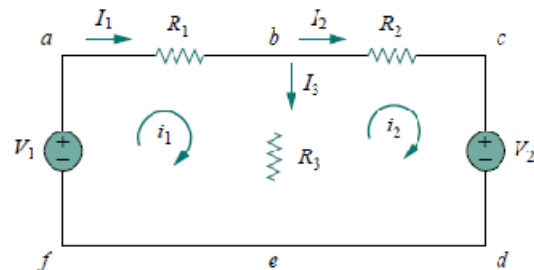
#### 3.1 Analisis Mesh

Analisis Mesh adalah salah satu metoda analisis yang digunakan untuk menghitung arus listrik pada seluruh sisi suatu rangkaian sederhana dengan cepat. Analisis ini hanya dapat digunakan untuk rangkaian yang bersifat planar.

Secara umum, langkah yang dilakukan dalam melakukan analisis mesh adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai arus mesh  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , dengan  $n$  adalah jumlah area yang terbentuk pada graf
2. Menerapkan hukum tegangan kirchoff pada tiap-tiap area, dengan mengekspresikan tiap tegangan dengan menggunakan hukum ohm.
3. Selesaikan persamaan yang telah dibuat untuk menentukan nilai arus mesh
4. Nilai arus sebenarnya pada suatu sisi adalah penjumlahan aljabar dari arus mesh yang terdapat pada sisi tersebut (d disesuaikan dengan arah arus yang akan dihitung).

Sebelum memulai analisis, terlebih ditentukan apakah rangkaian yang akan dianalisis adalah rangkaian yang planar. Rangkaian dapat dianalogikan sebagai sebuah graf. Contoh sebuah rangkaian yang planar adalah gambar rangkaian dibawah ini.



Gambar 3.1 Rangkaian Planar

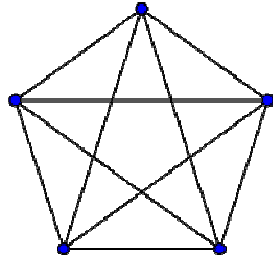
Pada rangkaian diatas, dapat disederhanakan terlebih dahulu. Jika diperhatikan, pada sisi (e,f) tidak terdapat komponen, maka beda tegangannya adalah nol, sehingga simpul e dan simpul f dapat disatukan. Begitu pula dengan simpul e dan simpul d. Maka simpul e, f dan d dapat digabungkan menjadi satu simpul e.

Pada rangkaian diatas, terdapat 2 buah area, sehingga terdapat 2 buah arus mesh yang disimbolkan dengan  $i_1$  dan  $i_2$ .

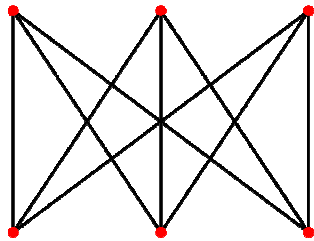
Misalkan untuk setiap variabel diatas bernilai sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V_1 &= 3 \text{ V,} \\ V_2 &= 5 \text{ V,} \\ R_1 &= 3 \ \Omega, \\ R_2 &= 3 \ \Omega, \\ R_3 &= 3 \ \Omega, \end{aligned}$$

Untuk analisis kali ini, akan dihitung berapa nilai arus  $I_3$  yang melewati resistor  $R_3$ . Dengan menggunakan hukum tegangan kirchoff ( $\sum V = 0$ ), maka arus melewati



Gambar 2.7 Graf  $K_5$



Gambar 2.8 Graf  $K_{3,3}$

#### 2.4 Rangkaian Elektronik

Dalam ilmu keelektronikaan, terdapat 3 hukum yang sangat dasar dalam perancangan rangkaian elektrik sederhana, yaitu hukum arus kirchoff, hukum tegangan kirchoff dan hukum ohm.

Hukum ohm sendiri berbunyi bahwa arus listrik yang melewati sebuah resistor akan selalu berbanding lurus dengan beda potensial yang dikenai pada kedua ujung resistor. Secara matematis, hukum tersebut dapat dituliskan sebagai berikut

$$V = I \cdot R$$

Contoh sederhana dalam penggunaan hukum ini adalah menghitung nilai arus yang melewati sebuah resistor dengan besaran  $5 \ \Omega$  yang memiliki beda potensial  $5 \text{ V}$ . Dengan menggunakan rumus diatas, didapatkan besaran nilai arus yang akan melewati resistor adalah sebesar  $1 \text{ A}$

Hukum kedua yang mendasari dalam perancangan rangkaian elektronik adalah hukum arus kirchoff. Hukum ini mengatakan untuk satu simpul, jumlah arus yang masuk dan arus yang keluar adalah sama. Secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\sum I = 0$$

Hukum yang terakhir adalah hukum tegangan kirchoff. Hukum ini mengatakan untuk suatu rangkaian tertutup, jumlah penurunan tegangan adalah 0. Secara matematis dituliskan sebagai berikut

$$\sum V = 0$$

Ketiga hukum ini yang selalu digunakan untuk menghitung ketiga parameter yaitu tegangan (V), arus (I), dan resistansi (R) pada suatu rangkaian elektronik sederhana.

simpul a, b, e dan kembali lagi ke simpul a dapat dibentuk persamaan berikut

$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 - V_1 = 0 \quad (..1)$$

karena nilai  $I_1$  akan sama dengan nilai  $i_1$ , dan  $I_3$  setara dengan nilai  $(i_1 - i_2)$ , maka persamaan diatas setelah berubah menjadi

$$\begin{aligned} i_1 \cdot R_1 + i_1 \cdot R_3 - i_2 \cdot R_3 - V_1 &= 0 \\ i_1 (R_1 + R_3) - i_2 \cdot R_3 &= V_1 \end{aligned}$$

masukkan nilai yang telah diketahui, maka persamaan

$$6i_1 - 3i_2 = 3V \quad (..2)$$

lakukan hal yang sama pada area kedua dengan  $I_3 = (i_2 - i_1)$ , maka didapatkan persamaan yaitu

$$\begin{aligned} I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 + V_2 &= 0 \\ i_2 \cdot R_2 - i_1 \cdot R_3 + i_2 \cdot R_3 + V_2 &= 0 \\ i_2 (R_2 + R_3) - i_1 \cdot R_3 &= -V_2 \end{aligned}$$

masukkan nilai yang telah diketahui, maka didapatkan

$$6i_2 - 3i_1 = -5V \quad (..3)$$

Persamaan (..2) dan persamaan (..3) dapat diselesaikan menggunakan metode eliminasi, sehingga didapatkan nilai  $i_1$  adalah 0,78 A sedangkan nilai  $i_2$  adalah 0,56 A.

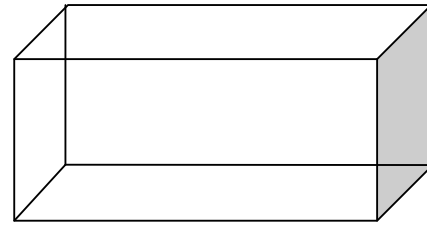
Dengan nilai  $I_3 = i_1 - i_2$ , maka nilai arus  $I_3$  adalah 0,22 A.

Dapat dilihat dari contoh diatas, semakin banyak area yang terbentuk, akan semakin banyak pula persamaan yang akan terbentuk nantinya. Analisis mesh ini akan semakin efektif apabila yang sumber yang terdapat dalam rangkaian adalah sumber arus. Hal ini dikarenakan nilai arus mesh yang berhubungan langsung dengan

### 3.2 Kaitan Analisis Mesh dengan Graf Planar

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, analisis mesh hanya dapat digunakan untuk rangkaian yang bersifat planar. Jika rangkaian tidak bersifat planar, maka akan terbentuk rangkaian yang memiliki bentuk 3 dimensi. Untuk daerah bentuk 3 dimensi yang tidak memiliki sisi yang menyilang antar bidang, dapat digambarkan secara planar, yaitu dengan membuka jaring-jaring bidang 3 dimensi tersebut, maka akan terbentuk sejumlah n area, dimana n adalah jumlah sisi pada bidang 3 dimensi tersebut.

Akan terjadi kesulitan saat akan menentukan area yang akan menjadi suatu mesh, apabila terdapat sisi yang saling menyilang antara bidang yang berhadapan. Hal ini akan semakin menyulitkan perhitungan karena dalam menyusun persamaan akan menjadi semakin sulit.



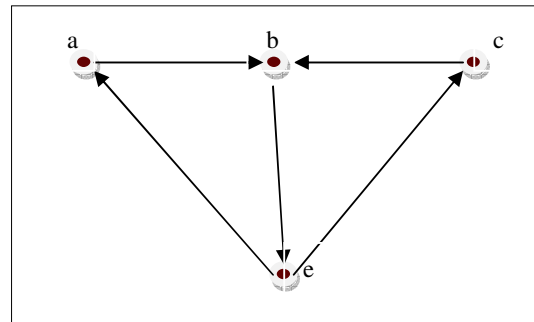
Gambar 3.3 Graf Planar 3 Dimensi

Untuk menyelesaikan suatu rangkaian non-planar, diperlukan analisis lain, yaitu analisis nodal yang tidak akan dibahas dalam makalah ini.

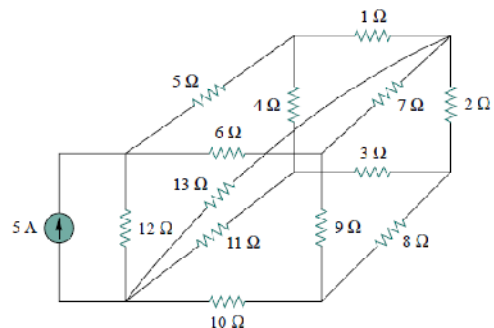
Hal yang terpenting dalam menyelesaikan perhitungan dengan menggunakan analisis mesh adalah menentukan apakah rangkaian tersebut adalah rangkaian yang planar atau tidak.

Untuk kasus khusus seperti sisi yang terbuka, maka area tersebut tidak perlu menggunakan analisis mesh dikarenakan pada sisi yang terbuka, tidak ada arus listrik yang mengalir. Analisis mesh ini hanya dapat digunakan untuk rangkaian yang memiliki minimal satu buah loop tertutup.

Dalam menganalogikan suatu rangkaian kedalam bentuk graf, maka tiap sisi pada graf mewakili satu buah komponen (resister ataupun sumber, baik sumber arus maupun sumber tegangan). Untuk tiap ujung komponen, dimisalkan sebagai satu simpul. Pada gambar 3.1, dapat dianalogikan sebagai graf berarah (arah pada graf disesuaikan dengan arah arus listrik) berikut



Gambar 3.2 Graf Planar Berarah Rangkaian Elektronik



Gambar 3.3 Rangkaian Non-Planar

Untuk rangkaian diatas, pada sisi yang memiliki resistansi  $13 \Omega$ , adalah sisi yang menghubungkan antara sisi balok yang saling berhadapan, sehingga apabila digambarkan bidang tersebut dibuka, maka rangkaian tidak dapat digambarkan secara planar.

#### IV. KESIMPULAN

Dari pembahasan diatas, dapat disimpulkan, aplikasi graf planar dalam analisis mesh sangat penting. Analisis ini hanya dapat dilakukan untuk rangkaian yang dapat digambarkan secara planar. Untuk rangkaian yang tak-planar, memerlukan analisis lain yang menjadikan perhitungannya menjadi lebih mudah. Untuk keplanaran suatu rangkaian, dapat dilakukan dengan menggambarkannya dalam bentuk graf, lalu diuji dengan menggunakan graf kuratowski.

Pada rangkaian tak-planar, persamaan akan menjadi sangat rumit karena penentuan mesh akan menjadi tak mungkin untuk dilakukan. Untuk rangkaian jenis ini, digunakan analisis nodal untuk menentukan parameter yang diinginkan

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] <http://physics.weber.edu/carroll/honors/konigsberg.htm>, diakses pukul 19.27, 16 Desember 2012
- [2] <http://dc400.4shared.com/doc/EFPMUEqN/preview.html>, diakses pukul 20.38, 16 Desember 2012
- [3] <http://cophy-wiki.informatik.uni-koeln.de/index.php/Graph>, diakses pukul 20.49, 16 Desember 2012
- [4] <http://dc169.4shared.com/img/YUuNRtn0/preview.html>, diakses pukul 20.53, 16 Desember 2012
- [5] <http://elektronika-dasar.com/teori-elektronika/hukum-kirchhoff/>, diakses pukul 22.09, 16 Desember 2012
- [6] <http://hmmusu.blogspot.com/2011/03/graf-planar.html>, diakses, pukul 9.47, 17 Desember 2012
- [7] Munir, Rinaldi, "Matematika Diskrit", Informatika, Bandung, 2010
- [8] Alexander, Charles, Matthew N.O Sadiku, "Fundamentals of Electric Circuit, Third Edition"

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2012



Farid Firdaus - 13511091