Penggunaan Sistem Fungsi Iterasi untuk Membangkitkan Fraktal beserta Aplikasinya

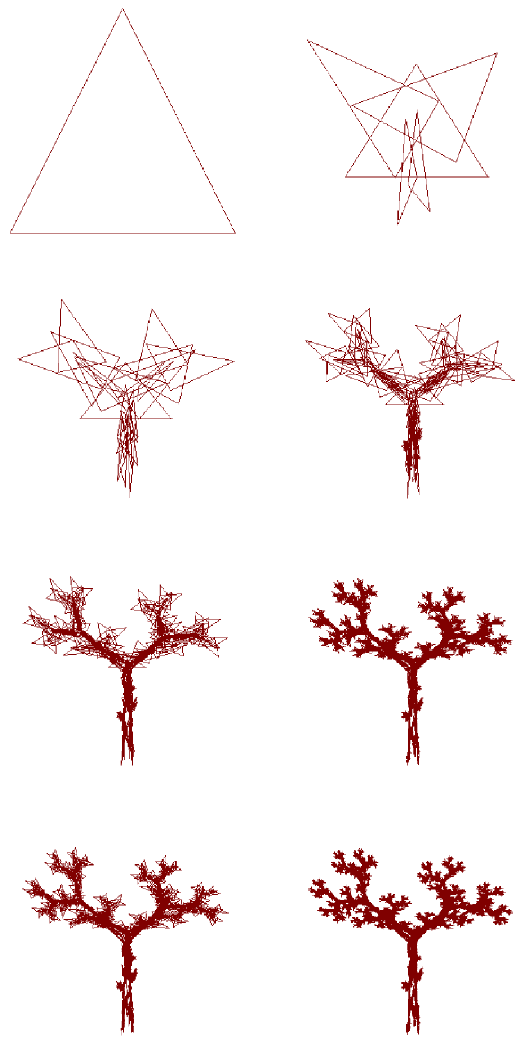
Mohamad Rivai Ramandhani 13511043
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
mohamad.rivai@s.itb.ac.id

***Abstrak*--Makalah ini mengulas mengenai salah satu metode pembangkitan fraktal, yaitu dengan Sistem Fungsi Iterasi. Sebelumnya, akan ada penjelasan singkat mengenai fraktal itu sendiri, namun bahasan mengenai fraktal ini tidak akan secara mendalam. Penjelasan Sistem Fungsi Iterasi sendiri akan lebih menggunakan pendekatan pseudo-code algoritmis daripada secara matematis. Pada bagian terakhir juga akan ada ulasan mengenai aplikasi fraktal dengan representasi Sistem Fungsi Iterasi dalam bidang pemampatan gambar digital.**

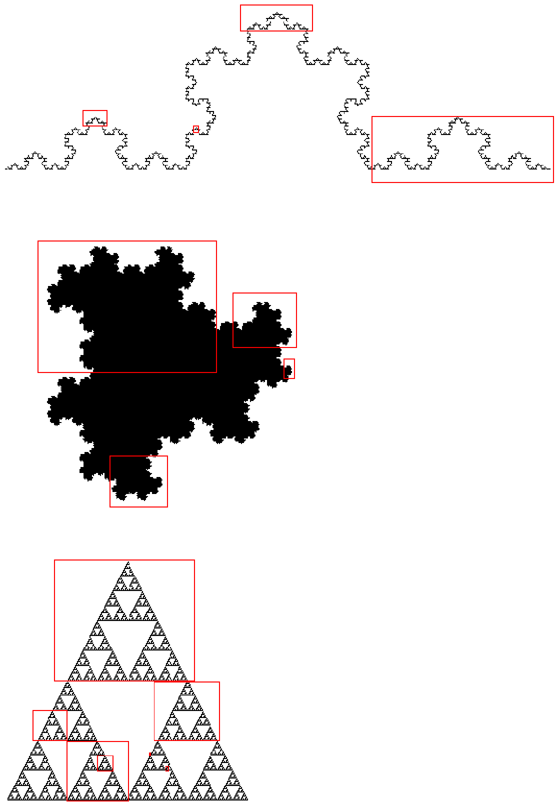
***Kata kunci*--Fraktal, Sistem Fungsi Iterasi, pemampatan gambar digital**

I. PENDAHULUAN

Analisis serta identifikasi terhadap benda-benda fisikal di alam kerap dilakukan dengan pendekatan geometri klasik. Hal ini dikarenakan objek-objek geometri klasik seperti segitiga, lingkaran, persegi lebih mudah dipahami secara intuitif serta lebih mudah untuk dikomunikasikan. Namun pada bentuk-bentuk geometri klasik ini, yang sering disebut geometri Euklidian pada beberapa literatur[2], memiliki sifat yang bergantung terhadap skala. Pada lingkaran misalnya, jika dilakukan perbesaran terus menerus, akan terlihat bahwa sisi lingkaran yang melengkung akan semakin terlihat seperti garis lurus. Padahal kenyataannya benda-benda di alam, seperti gunung, jika dilihat dari jauh mungkin mirip dengan geometri segitiga, namun semakin didekati semakin terlihat ketidakmiripan antara keduanya. Masalah klasik yang berhubungan dengan hal ini adalah masalah panjang garis pantai Inggris Raya[1] . Jika dilihat dari atas, garis pantai akan terlihat seperti kurva melengkung yang mulus, namun jika diperbesar sampai skala tertentu justru terlihat detail-detail pada beberapa bagian pantai sehingga panjangnya menjadi terus bertambah daripada panjang yang dihampiri dengan bentuk kurva mulus tadi. Masalah panjang garis pantai inilah yang menjadi awal dilakukannya studi terhadap apa yang dulu dikategorikan tak berbentuk *'formless'* ini. Sehingga muncul geometri modern atas nama 'fraktal'. Berbeda dengan 'pendahulunya'-geometri Euklidian-fraktal memiliki keserupaan diri sedemikian rupa sehingga jika diperbesar dengan perbesaran berapapun, hasil perbesaran tersebut tetap terlihat seperti objek aslinya, bahkan semakin diperbesar justru fraktal ini akan menunjukkan detail-detail yang sebelumnya tidak terlihat. Sifat fraktal inilah yang juga dimiliki oleh benda-benda di alam. Jika diambil sebuah ranting pohon misalnya, ranting itu akan memiliki kemiripan dengan pohon aslinya, bahkan begitu juga dengan jari-jari daun pada ranting tersebut. Hal ini yang dinamakan keserupaan diri, dan merupakan sifat yang sangat penting dari geometri fraktal, disamping pengulangan dan penskalaan.



Gambar 1 Fraktal pohon, menunjukkan keterkaitan fraktal dengan geometri benda-benda yang ada di alam [7]



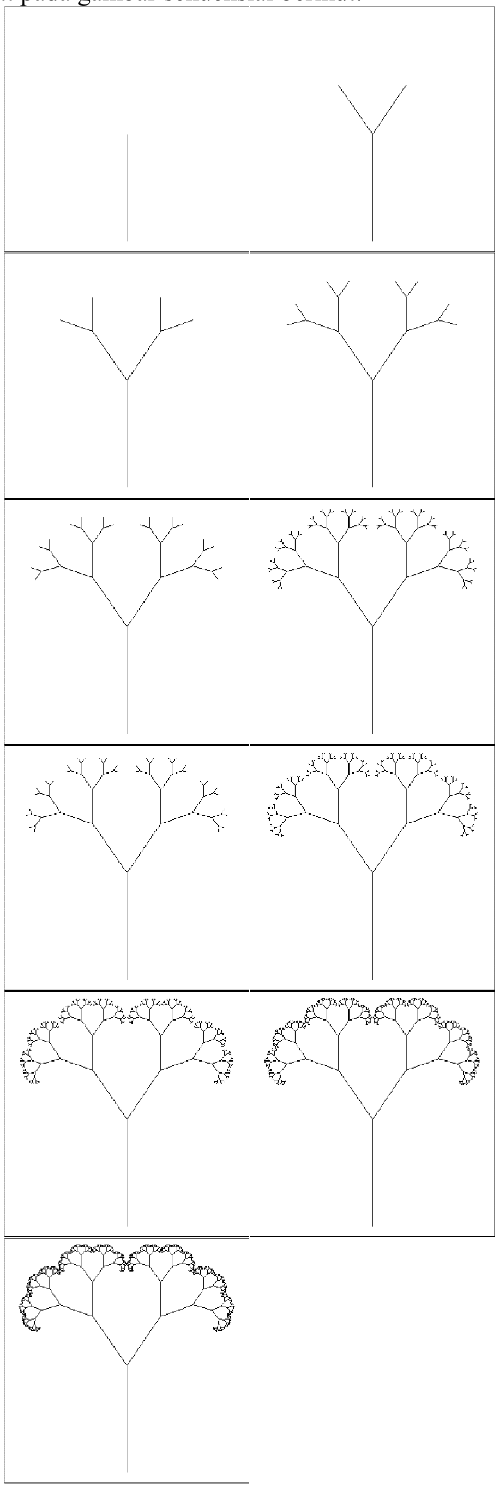
Gambar 2 Keserupaan diri pada fraktal [8]

II. FRAKTAL

Fraktal secara etimologis berasal dari bahasa latin *fractus* 'patah', *frangere* 'rusak', atau *fragmen* 'tidak teratur'[1]. Per definisi fraktal adalah bangun yang memiliki dimensi bukan bilangan bulat. Istilah fraktal diperkenalkan oleh Benoit Mandelbrot yang kini dikenal sebagai Bapak Fraktal. Sebetulnya para matematikawan pada era sekitar 1900-an seperti Georg Cantor (1872), Giueseppe Peano (1890), David Hilbert (1891), Helge Von Koch (1904), Waclaw Siepinski (1916), dan Gaston Julia (1918) telah mengembangkan geometri fraktal terlebih dahulu (ketika itu disebut 'kurva monster'), tapi pada saat itu mereka belum mampu memberi gambaran yang jelas tentang bentuk fraktal yang mereka kembangkan, berbeda dengan Mandelbrot yang telah menggunakan bantuan komputer untuk memvisualisasikan fraktal. Fraktal saat ini telah diaplikasikan dalam berbagai bidang : elektronika (antena fraktal), fisika (propagasi gelombang pada media serupa diri), informatika (kompresi data dan sinyal) , seni (pembuatan musik jenis baru, dan saat ini banyak sekali seni visual dari fraktal), bahkan ekonomi (pola pergerakkan harga saham dan mata uang) serta banyak aplikasi lainnya.

III. METODE PEMBANGKITAN FRAKTAL

Ada beberapa cara untuk menghasilkan fraktal, misal salah satunya (dan yang paling tua) dengan metode 'pemrakarsa dan pembangkit', yaitu membangun keserupaan diri dengan melakukan proses yang sama berulang-ulang dan skala yang terus diperkecil. Pemrakarsa adalah istilah untuk bangun yang menjadi bentuk dasar, pembangkit adalah sekumpulan jiplakan yang mungkin diskalakan dari pemrakarsa.[5] Contoh proses terlihat pada gambar sekuensial berikut:

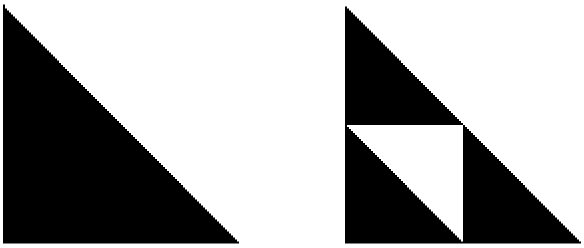


Gambar 3 Pohon fraktal biner, garis lurus vertikal sebagai pemrakarsa, pembangkit adalah jiplakan dari pemrakarsa dengan dua cabang lebih kecil yang tumbuh secara simetris dari ujungnya.[6]

Cara lain dan yang akan menjadi pokok bahasan pada makalah ini (serta cara yang paling populer[8]) yaitu membangkitkan fraktal dengan Sistem Fungsi Iterasi (SFI) alias *Multiple Reduction Copy Machine algorithms* (MRCMs).[7]

IV. SISTEM FUNGSI ITERASI (SFI)

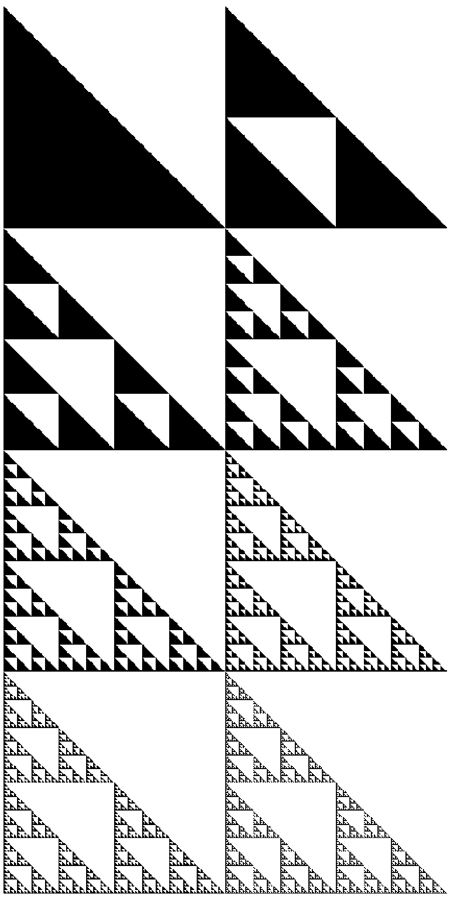
Sebelum membahas SFI, berikut akan ditunjukkan pembangkitan karpet Sierpinski dengan proses Pemrakarsa dan Pembangkit, dengan pemrakarsanya adalah segitiga kiri dan pembangkitnya segitiga kanan pada gambar di bawah ini:



Gambar 4 Pemrakarsa dan Pembangkit untuk fraktal karpet Sierpinski[4]

Proses yang dilakukan yaitu:[7]

1. Keadaan awal adalah segitiga sama sisi sebagai pemrakarsa seperti pada gambar di atas.
2. Dari bentuk segitiga itu kemudian dibagi menjadi 4 segitiga sama sisi yang lebih kecil.
3. Segitiga kecil pada bagian tengah dihilangkan.
4. Diulangi dari poin 2.

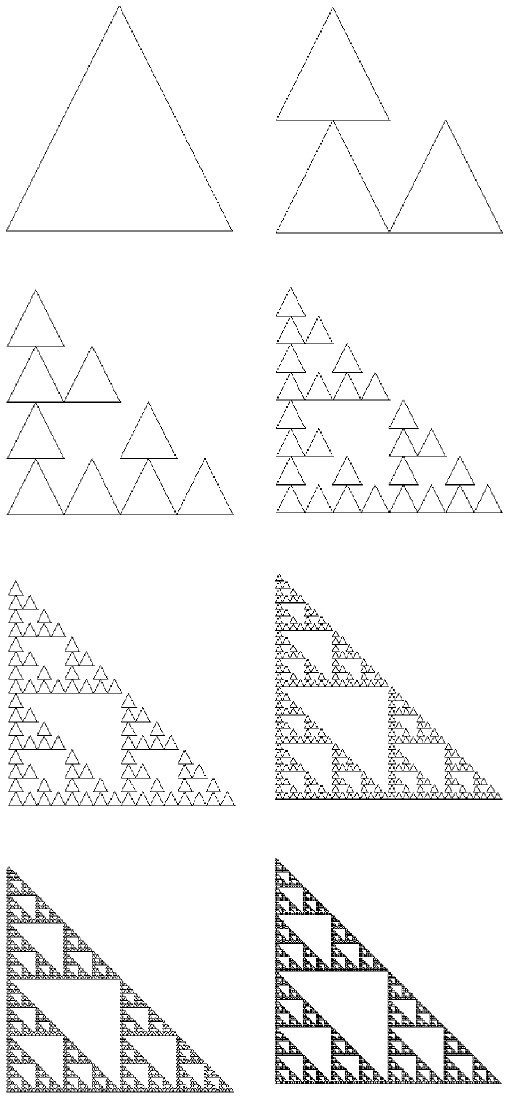


Gambar 5 Pembangkitan karpet Sierpinski dengan proses Pemrakarsa dan Pembangkit[4]

Catat bahwa beriringan dengan setiap proses pengulangan yang dilakukan, perubahan pada objek semakin samar terlihat, sehingga dikatakan bahwa objek telah konvergen ke suatu bentuk pembatas *'limiting shape'*, bentuk pembatas inilah yang disebut sebagai karpet Sierpinski itu sendiri.[4]

Pembangkitan karpet Sierpinski di atas hanya sebagai pembanding saja. Sementara pembangkitan karpet Sierpinski dengan SFI yaitu sebagai berikut prosesnya:[7]

1. Keadaan awal adalah segitiga sama sisi (tidak harus[7], akan dibahas kemudian).
2. Diperkecil gambar menjadi satu setengah kalinya.
3. Dibuat 3 jiplakan dari gambar pada poin 2.
4. Disusun ketiga jiplakan sedemikian membentuk segitiga sama sisi semula.
5. Ditranslasikan jiplakan yang paling atas ke kiri (ke atas jiplakan kiri bawah).
6. Diulangi dari poin 2.



Gambar 6 Pembangkitan karpet Sierpinski dengan SFI[7]

Setelah melihat kedua contoh pembangkitan fraktal karpet Sierpinski dengan dua metode di atas, terlihat perbedaan, bahwa pada pembangkitan dengan SFI, gambar yang menjadi bentuk awal mengalami sekumpulan transformasi (fungsi), baik itu dengan translasi, rotasi, refleksi, maupun pengubahan skala. sehingga menghasilkan gambar baru. Dan setiap dari gambar-gambar baru ini akan ditransformasi lagi dengan sekumpulan transformasi tadi sedemikian sehingga setiap transformasi pada gambar akan membentuk sebuah iterasi. Dan jika transformasi tersebut bersifat kontraktif, yaitu mengakibatkan titik-titik pada gambar menjadi semakin berdekatan, gambar tadi pada akhirnya akan konvergen ke suatu bentuk. Sehingga setelah terjadi iterasi tak berhingga serta transformasinya adalah transformasi kontraktif, maka gambar akan konvergen ke suatu bentuk yang disebut *attractor* (bandingkan dengan bentuk pembatas pada metode sebelumnya).

Namun tentu saja secara intuitif diketahui bahwa urutan transformasi yang berbeda akan memberikan hasil yang berbeda pula, sehingga digunakan konvensi dengan urutan transformasi berikut: pengubahan skala > refleksi > rotasi > translasi[11]. Kemudian jika urutan transformasi dikodekan ke tabel berikut maka sebuah fraktal dapat dibangkitkan dengan metode SFI

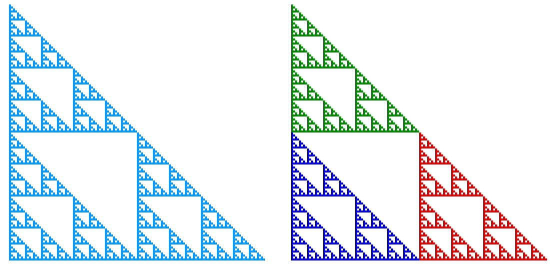
r	s	θ	φ	e	f

Dengan ‘r’ adalah faktor penskalaan di arah sumbu x, ‘s’ adalah faktor penskalaan pada sumbu y (nilai r dan s yang negatif menunjukkan refleksi terhadap sumbu bersesuaian), ‘θ’ adalah rotasi dari garis horizontal, ‘φ’ adalah rotasi dari garis vertikal, ‘e’ translasi searah sumbu x, dan ‘f’ translasi searah sumbu y.Dan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r\cos(\theta) & -s\sin(\varphi) \\ r\sin(\theta) & s\cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

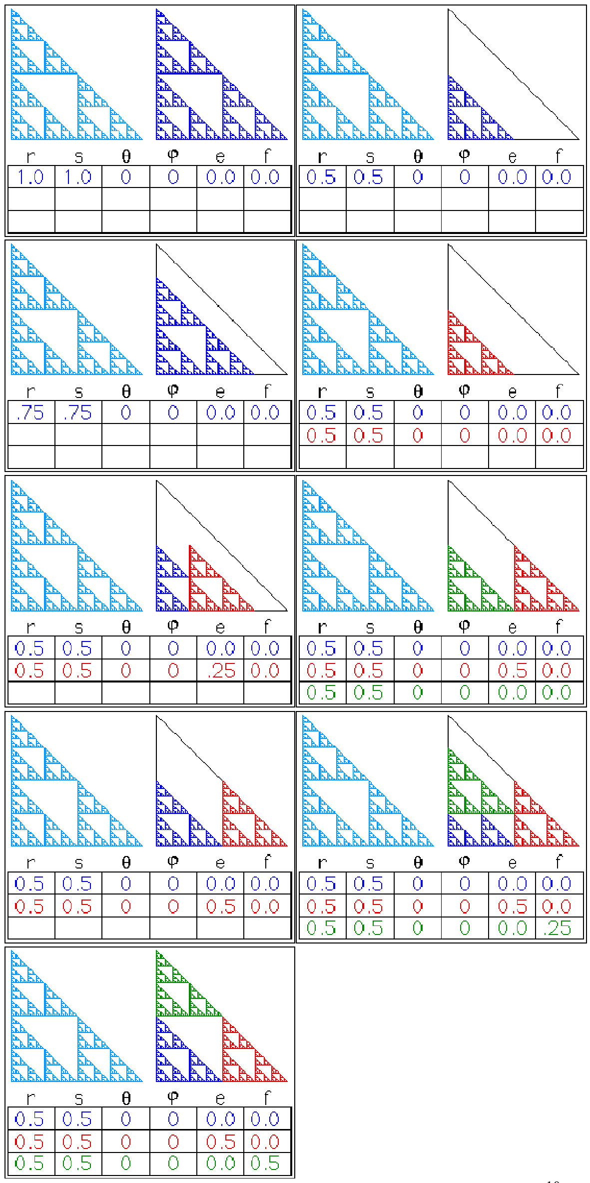
Gambar 7 Matriks transformasi SFI[12]

Sebagai contoh, lihat lagi fraktal karpet Sierpinski, berikut adalah kode SFI untuk fraktal tersebut, dan contoh pembangkitannya:



r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	0.5	0.0
0.5	0.5	0	0	0.0	0.5

Gambar 8 Kode SFI untuk karpet Sierpinski[10]



r	s	θ	φ	e	f
1.0	1.0	0	0	0.0	0.0

r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0

r	s	θ	φ	e	f
.75	.75	0	0	0.0	0.0

r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0

r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	.25	0.0

r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	0.5	0.0
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0

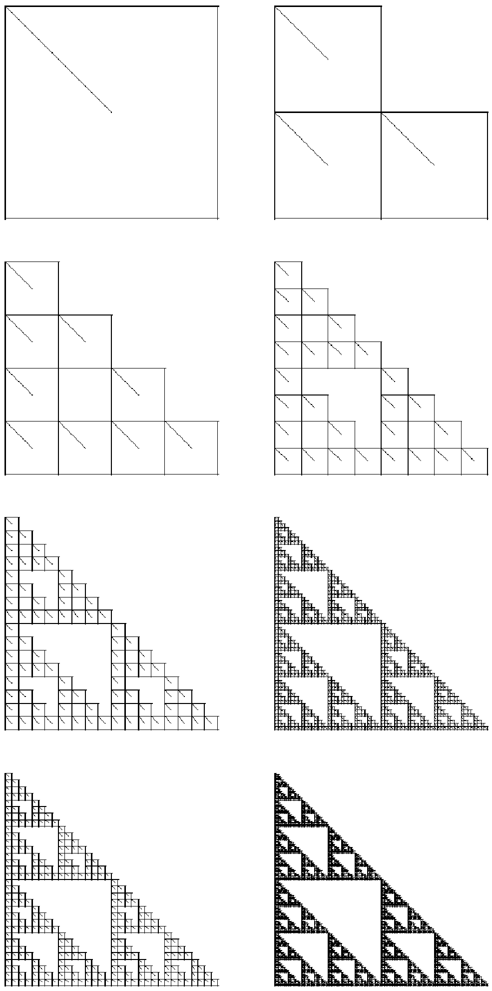
r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	0.5	0.0

r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	0.5	0.0
0.5	0.5	0	0	0.0	.25

r	s	θ	φ	e	f
0.5	0.5	0	0	0.0	0.0
0.5	0.5	0	0	0.5	0.0
0.5	0.5	0	0	0.0	0.5

Gambar 9 Pembangkitan karpet Sierpinski dengan kode SFI[10]

Kemudian untuk menunjukkan bahwa pembangkitan fraktal dengan SFI bisa menggunakan bentuk sebarang sebagai keadaan awalnya, berikut adalah pembangkitan karpet Sierpinski dengan keadaan awal persegi dan setengah dari salah satu diagonalnya:



Gambar 10 Contoh pembangkitan karpet Sierpinski dengan sebarang bentuk awal [7]

V. APLIKASI FRAKTAL REPRESENTASI SFI

Pada bagian sebelumnya telah ditunjukkan bahwa fraktal dapat dibangkitkan dengan SFI. Kemudian mungkin akan muncul pertanyaan, apa kelebihan metode SFI yang diperkenalkan oleh Barnsley ini? Pada bagian 2 telah disebutkan beberapa aplikasi fraktal, pada bagian ini lebih jauh akan dibahas mengenai aplikasi fraktal secara khusus dengan representasi SFI, yaitu untuk pemampatan gambar digital. Metode pemampatan gambar digital dengan fraktal yang dikembangkan oleh Michael Barnsley-yang juga memopulerkan SFI[2]-ini menggunakan 'transformasi fraktal' yang didasari bahwa setiap gambar (digital, dalam hal ini) bukan terdiri dari gambar serupa dirinya yang lebih kecil, melainkan bahwa beberapa bagian pada gambar dapat dibentuk dari bagian lainnya pada gambar dengan ukuran yang lebih kecil (dengan kata lain, sebuah bagian gambar dapat direpresentasikan dengan bagian kecil lain pada gambar, sehingga gambar dapat dimampatkan). Contoh dari hal tersebut dapat dilihat pada gambar 'Lena' berikut:

Gambar 11 Contoh penerapan pemampatan gambar digital dengan fraktal pada gambar Lena [13]

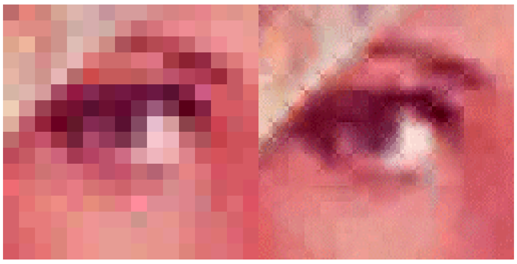
Terlihat pada gambar sebelah kanan, bagian gambar yang ditunjukkan dengan persegi yang lebih besar mirip dengan bagian lainnya yang ditunjukkan dengan persegi yang lebih kecil. Secara umum yang harus dilakukan untuk melakukan pemampatan dengan metode ini adalah menemukan aturan SFI untuk menghasilkan gambar bersangkutan. Transformasi fraktal memiliki dua tahapan berikut[13]:

1. Partisi gambar menjadi persegi-persegi kecil yang tidak saling bertumpukan (alias setiap persegi saling disjoin), yang disebut dengan blok hasil '*range block'*.
2. Untuk setiap blok hasil, temukan sebuah blok wilayah *'domain block'* sedemikian yang paling bersesuaian dengan blok hasil (untuk menemukan blok wilayah ini mungkin perlu dilakukan pengubahan skala, maupun reorientasi terhadap kedelapan simetri dari persegi/blok tersebut).

Dibawah ini adalah hasil perbandingan gambar Lena yang dikompresi dengan format JPG dan FIF (format fraktal):

Gambar 12 kompresi kualitas maximum format JPG (kiri,kompresi 5.75:1) dan kompresi kualitas maximum FIF (Fraktal Image Format) (kanan, kompresi 6.07:1)[13]

Kompresi dengan metode ini akan semakin baik jika objek-objek pada gambar bersangkutan banyak yang merupakan objek-objek alam (sehingga, seperti yang telah dijelaskan pada bagian pendahuluan, bahwa objek-objek ini memiliki sifat seperti fraktal). Bahkan gambar yang dikompresi dalam format fraktal pun juga akan memiliki sifat seperti fraktal, yaitu semakin diperbesar, justru akan semakin terlihat detail-detail lainnya. Hal ini ditunjukkan pada gambar di bawah ini:



Gambar 13 Kompresi dengan fraktal member detail lebih ketika diperbesar[13]

VI. KESIMPULAN

Dari ulasan yang telah penulis paparkan, disimpulkan bahwa fraktal yang rumit dan memiliki detail tidak terbatas dapat dibangkitkan dengan metode Sistem Fungsi Iterasi, dan metode tersebut juga dapat diaplikasikan untuk pemampatan citra digital. Fraktal pada dasarnya berusaha memodelkan proses yang kompleks dengan mencari proses sederhana dibaliknya. Hal ini bersesuaian dengan teori kekacauan[7] yang menyatakan bahwa jika sesuatu memiliki hasil yang kompleks, sesuatu itu tidak berarti memiliki masukkan yang rumit. Lebih lanjut, studi tentang fraktal akan memberi analisis yang presisi terhadap geometri benda-benda di alam, layaknya dengan geometri Euklidian yang digunakan untuk menganalisis benda-benda buatan manusia. Namun tentu saja, analisis-analisis tersebut hanya pendekatan, kenyataannya tidak ada suatu objek pun yang benar-benar berupa fraktal (begitu juga tidak ada suatu objek yang benar-benar berbentuk lingkaran atau garis lurus).

REFERENSI

[1] Mandelbrot, Benoît B.; *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Co., 1982.

[2] Barnsley, Michael F.; and Rising, Hawley; *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press Professional, 1993.

[3] http://classes.yale.edu/fractals/Panorama/ManuFractals/ImageCompression/ImageCompression.html, 15 Desember 2012.

[4] http://classes.yale.edu/fractals/IntroToFrac/InitGen/gasket.html, 15 Desember 2012.

[5] http://classes.yale.edu/fractals/IntroToFrac/InitGen/InitGen.html, 15 Desember 2012.

[6] http://classes.yale.edu/fractals/IntroToFrac/InitGen/InitGenTree.html, 15 Desember 2012.

[7] http://pages.cs.wisc.edu/~ergreen/honors_thesis/IFS.html, 16 Desember 2012.

[8] http://pages.cs.wisc.edu/~ergreen/honors_thesis/intro.html, 16 Desember 2012.

[9] http://pages.cs.wisc.edu/~ergreen/honors_thesis/similar.html, 16 Desember 2012.

[10] http://classes.yale.edu/fractals/IntroToFrac/IFS/GasketConstr.html, 16 Desember 2012.

[11] http://classes.yale.edu/fractals/IntroToFrac/TransfGeom/TransfGeom.html, .

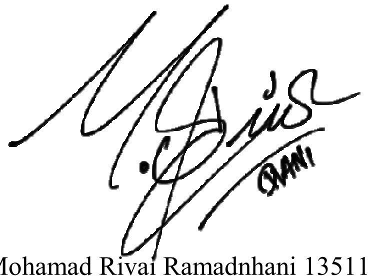
[12] http://classes.yale.edu/fractals/IntroToFrac/TransfGeom/Matrix/matrix.html, 16 Desember 2012.

[13] http://classes.yale.edu/fractals/Panorama/welcome.html, 18 Desember 2012.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 18 Desember 2012



Mohamad Rivai Ramadnhani 13511043