

Penerapan Graf Berarah Euler dan Aritmatika Modulo dalam Mengkonstruksi Barisan De Bruijn

Jais Anasrulloh Ja'fari(13511036)¹

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

¹13511036@std.stei.itb.ac.id

Barisan de Bruijn atau sering disebut dengan lingkaran lengkap banyak berkembang di bidang biologi molekuler. Barisan de Bruijn dibangun oleh kata dengan panjang n , dengan batasan alfabet atau karakter sebesar a , panjang lingkaran lengkap atau barisan de Bruijn ialah a^n , metode penyelesaian yang paling populer adalah metode dengan menggunakan graf Euler. Metode ini banyak digunakan oleh kalangan akademis, guna untuk menentukan karakteristik barisan lebih lanjut. Oleh sebab itu pada makalah ini, diberikan solusi alternatif untuk menentukan salah satu barisan de Bruijn dari banyak barisan yang dapat dibuat dengan n buah string. Dari banyak solusi alternatif yang ada seperti teorema Fredickson dan Maiorana, banyak ditemukan kesukaran karena proses pengerjaan dari algoritma ini membutuhkan keuletan dan ketelitian yang tinggi sehingga apabila terjadi kesalahan dalam salah satu langkah akan mengakibatkan barisan de Bruijn sepanjang 2^n dapat menampilkan untaian string dengan panjang n muncul dalam barisan tersebut lebih dari sekali. Oleh sebab itu akan lebih mudah dalam pengerjaan barisan de Bruijn ini dengan menggunakan pendekatan strategi Aritmatika Modulo, walaupun secara fisis, penyelesaian secara demikian tidak menggambarkan karakteristik barisan de Bruijn. Karakteristik barisan de Bruijn sedemikian hingga string pembentuk dengan panjang n muncul tepat sekali dalam barisan de Bruijn. Dengan Aritmatika Modulo, barisan de Bruijn yang dapat ditentukan hanya berjumlah satu buah, padahal apabila kita telusuri satu per satu banyak barisan de Bruijn yang lain.

Index Terms—Barisan de Bruijn, graf de Bruijn, graf Euler, Aritmatika Modulo.

I. PENDAHULUAN

Kombinasi “kata”(word) berkembang cukup pesat baik dalam bidang utama yang mempelajari pokok bahasan ini, maupun pada bidang penerapan. Dalam bidang biomolekuler yang berkolaborasi dengan bioinformatika, menyatakan bahwa penentuan barisan minimal dari DNA yang terdiri dari string dengan alfabet pembentuk yaitu A(Adenin), C(Sitosin), T(Timin), dan G(Guanin). Barisan minimal yang demikian identik dengan barisan de Bruijn (Matamala 2004).

Pada bidang kriptografi bentuk kombinasi “kata” dari alfabet biner 0 dan 1 banyak digunakan untuk menghasilkan suatu informasi yang memiliki kuantitas dan keamanan(Trappe & Washington 2006). Dalam buku

Introduction To Chryprografi with Coding Theory menjelaskan bahwa kriptografi sebagai salah satu cabang dalam matematika teknik yang berkaitan dengan keamanan informasi seperti: kerahasiaan, integritas data, identifikasi pesan, autentikasi pesan, penandaan serta validasi dan lain sebagainya. Pada mulanya kriptografi banyak digunakan pada bidang militer, pemerintahan, dan hubungan diplomatik. Salah satu kriptografy yang digunakan pada bidang tersebut yaitu *Public-Key-Chryptografy*(PKC).

Banyak metode yang dikembangkan dalam menentukan barisan de Bruijn yang dibentuk dari n string yang panjangnya yaitu 2^n , metode yang paling populer dan lebih banyak dikenal di kalangan akademik yaitu metode yang dikembangkan Drew, Drew menggunakan sirkuit euler untuk mendapatkan barisan de Bruijn dengan membuang dua digit yang overlapping(Drew, 2006). Sebelumnya, juga dikenalkan algoritma penyelesaian yang diajukan oleh Fredickson dan Maiorana(1978) dikembangkan oleh Eduardo(Moreno,2003) dengan menggunakan teorema Fredickson dan Maiorana, teorema ini menjamin keberadaan barisan de Bruijn yang dibentuk dari n string dengan merangkai Lyndon Word yang terurut secara Lexicographic. Namun metoda penyelesaian dengan algoritma ini membutuhkan ketelitian tinggi dan tidak ada toleransi error sehingga dapat dikatakan algoritma ini kurang mangkus. Penulis akan mengulas lebih dalam tentang pengembangan algoritma penyelesaian barisan de Bruijn dengan pendekatan aritmatika modulo. Algoritma ini dikembangkan oleh Chung(Chung,1992). Algoritma ini mempunyai kelemahan, yaitu banyak barisan yang dapat dihitung hanya satu buah, berbeda dengan algoritma-algoritma sebelumnya yang mampu mengenumerasi semua kemungkinan barisan yang mungkin. Pada bagian terakhir akan dibahas aplikasi barisan de Bruijn untuk menentukan untaian DNA dengan jumlah asam amino yang paling sedikit.

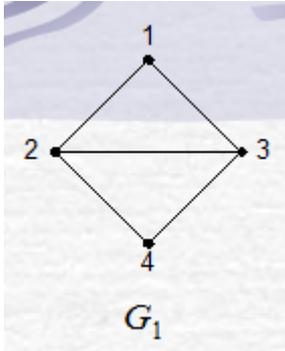
II. LANDASAN TEORI

Teori Graf

Graf(V,E) merupakan struktur diskrit yang terdiri dari simpul-simpul(vertices) dan sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard euler (1707-1783). Awal ide

dari teori ini, muncul dari permasalahan jembatan konisberg. Suatu graf terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan simpul(V) dan himpunan sisi(E). Macam-macam graf jika dibagi berdasarkan ada tidaknya gelang dan simpul ganda maka graf dapat dibagi menjadi 3 buah graf sebagai berikut:

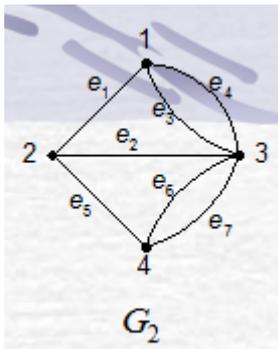
1. Graf Sederhana



Gambar 2.1

G_1 adalah graf sederhana dengan $V=\{1,2,3,4\}$ dan $E=\{(1,2);(1,3);(2,3);(2,4);(3,4)\}$, jadi graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung kalang(gelang) dan simpul ganda.

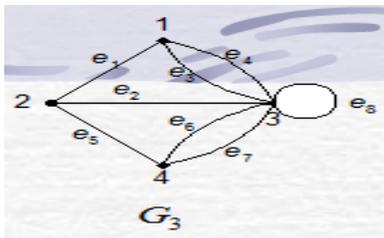
2. Graf Ganda



Gambar 2.2

G_2 adalah graf ganda dengan $V=\{1,2,3,4\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}=\{(1,2);(1,3);(1,3);(2,3);(2,4);(3,4);(3,4)\}$. Jadi graf ganda adalah graf yang mempunyai lebih dari satu buah sisi yang menghubungkan 2 simpul yang sama.

3. Graf Semu



Gambar 2.3

Graf semu dengan $V=\{1,2,3,4\}$ dan $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}=\{(1,2);(1,3);(1,3);(2,3);(2,4);(3,4);(3,4);(4,4)\}$ Berdasarkan orientasi graf dibagi menjadi dua macam yaitu graf berarah dan tak berarah, tiga graf yang telah dijelaskan sebelumnya merupakan graf tidak berarah sedangkan tabel berikut merupakan tabel yang berisi parameter-parameter pembeda dari graf:

Tabel 2.1[ROS99]

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

Jalan(walk) pada suatu graf berarah adalah barisan dari simpul dan busur berarah yang menyatakan lintasan yang berakhir dalam suatu simpul tertentu. Trail adalah suatu lintasan yang melewati suatu jalan yang berbeda, tidak ada jalan yang dilewati lebih dari satu kali. Lintasan atau path adalah jalan yang simpulnya berbeda. Jika simpul pangkal dari lintasan ini sama dengan simpul akhir dari lintasan maka disebut dengan trail tertutup, selanjutnya setiap trail yang tertutup disebut dengan sirkuit.

Sirkuit Euler pada suatu graf G adalah sirkuit dengan semua simpulnya yang terletak pada graf G, dan setiap busur berarahnya dilewati tepat satu kali. Untuk mengidentifikasi apakah suatu graf mempunyai sirkuit euler atau tidak dengan cara melihat derajat masuk harus sama dengan derajat keluar pada setiap simpulnya. Graf Euler adalah graf yang mengandung sirkuit euler.

Barisan dan Graf de Bruijn

Barisan de Bruijn merupakan barisan yang dibentuk dari string berhingga dengan sifat-sifat tertentu. String adalah barisan berhingga dari suatu symbol-simbol tertentu. Sebagai contoh jika a,b,c adalah tiga buah simbol maka abc merupakan string yang dibentuk dari tiga buah simbol tersebut. Substring w dapat dihasilkan dari string w dengan cara menghasilkan beberapa simbol dari string pembentuknya.

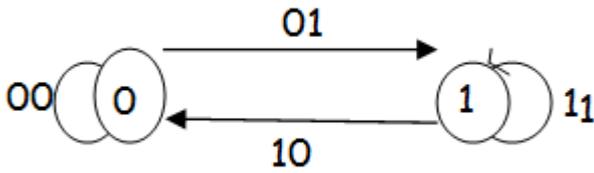
Suatu string dengan panjang 2^n merupakan barisan de Bruijn(2,n) jika setiap string dengan panjang n hadir tepat sekali sebagai substring dari string dengan panjang 2^n . contoh string yang dibentuk dari alfabet yang berukuran 2 yaitu {0,1} adalah barisan de Bruijn (2,n). Untuk kasus n =1,2,3,4 barisan de Bruijn secara berturut yaitu 01, 0110,01110100,0000100110101111 secara berturut-turut(Gross & Yellen,2006).

Selanjutnya pada makalah ini alfabet yang digunakan terbatas dibatasi pada 0 dan 1(alfabet biner). Kemudian barisan de Bruijn disimbolkan dengan $B(2,n)$, artinya barisan de Bruijn yang direntang oleh string n adalah string dengan panjang 2^n .

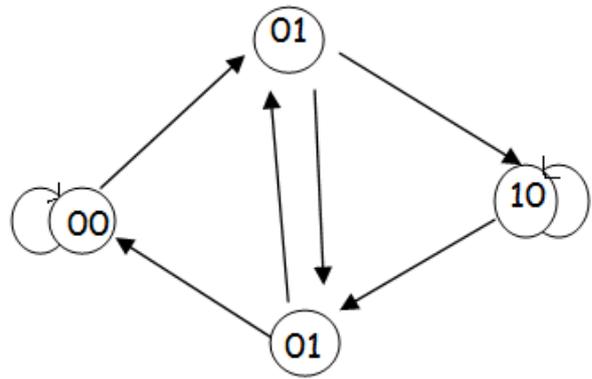
Graf de Bruijn adalah suatu graf berarah $G_{a,n}$ (dengan $a \geq 2, n \geq 1$). Yang dibentuk dari setiap bilangan bulat positif n dan a (a adalah alfabet biner) yang diberikan dan memiliki jumlah simpul sebanyak a^{n-1} , karena a alfabet biner maka a selalu bernilai 2, sehingga jumlah simpulnya yaitu a^{n-1} , setiap simpul dilabel dengan alfabet biner dengan panjang n-1, dan busur berarahnya sebanyak a^n , busurnya dilabel dengan kata dengan panjang n.

Sebagai contoh sebuah graf dibentuk dari alfabet biner dengan panjang string pembentuknya yaitu n =2, maka untuk untuk membuat graf de Bruijn dibutuhkan simpul sebanyak $2^{2-1}=2$,jumlah busur berarah sebanyak $2^2=4$, dengan label untuk setiap simpul merupakan kata dengan panjang 1 terdiri dari {0,1}, dan panjang kata untuk

member label pada busur berarah sepanjang 2 terdiri dari {00,01,10,11}. Berikut adalah cara intuisi untuk menggambarkan graf de Bruijn. Berikut adalah graf de Bruijn $B(2,n)$.



Gambar 3.1 Graf de Bruijn $G_{2,2}$
Jadi barisan de Bruijn yang dibentuk yaitu 0110.



Gambar 3.2 Graf de Bruijn $G_{2,3}$
Contoh matriks ketetanggaan dari $G_{2,3}$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh matriks laplace dari $G_{2,3}$ yaitu :

$$T(G_{2,3}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Setiap matriks $T(G)$ memiliki kofaktor yang sama pada suatu graf berarah $G_{2,3}$. Kofaktor ini sama dengan jumlah pohon yang merentang dari graf berarah euler G . oleh sebab itu dapat ditentukan hubungan jumlah pohon merentang dengan jumlah sirkuit euler dalam suatu graf berarah euler, berdasarkan teorema yang dibuat oleh Bruijn, Enrenfest, Smith, dan Tutte atau lebih dikenal dengan teorema 3.1 (juga sering disebut sebagai teorema BEST) (Rosenfeld, 2003) yang menyatakan bahwa *Banyaknya sirkuit eule $\mathcal{E}(G)$ dalam graf berarah G yaitu*

$$\mathcal{E}(G) = |c| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$$

dengan c adalah nilai kofaktor dari T_{ij} dalam $T(G)$ dan $d_i = d_i^+(i) = d_i^-(i)$.

Diberikan graf berarah G dengan himpunan simpul tak kosong $V_G = \{v_1, \dots, v_1\}$ dengan derajat masuk dan derajat keluar dari setiap simpulnya sama $d^+(v_i) = d^-(v_i) = d_i$. Karena pada setiap graf berarah akan mengandung sirkuit Euler jika dan hanya jika jumlah derajat yang masuk dan ke luar dari setiap simpul harus sama, maka hal ini menjamin minimal ada satu sirkuit Euler pada graf G . Misalkan S adalah jalur Euler pada G , secara umum banyaknya kemungkinan jalur Euler pada G setara dengan banyaknya pohon rentangan terhadap simpul v_1 . Oleh karena itu

$$\mathcal{E}(G) = d_1^+(v_1)! \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$$

III. KONTRUKSI BARISAN DE BRUIJN

A. Kontruksi Barisan de Bruijn dari Graf de Bruijn

Pada subbab ini akan dibahas terlebih dahulu jumlah sirkuit euler yang terdapat pada graf de bruijn, selanjutnya akan dibahas cara menentukan barisan de Bruijn dari representasi sirkuit euler yang terdapat pada graf de bruijn.

Menghitung Sirkuit Euler dari Graf Berarah

Suatu graf berarah G disebut dengan graf berarah euler apabila ada jalan tertutup W yang melewati setiap busur tepat satu kali dan jumlah busur yang masuk pada setiap simpul sama dengan jumlah busur yang keluar dari setiap simpul. Urutan penentuan simpul pangkal dan ujung menentukan pembentukan sirkuit euler, karena suatu graf berarah dapat memiliki lebih dari satu buah sirkuit euler. Setelah itu ditentukan sirkuit euler, hal pertama yang perlu dianalisis adalah matrix ketetanggaan yang didefinisikan sebagai berikut $C(G) = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$, yakni matriks yang entri-entrinya nol ataupun satu yang didefinisikan sebagai berikut :

$$c_{ij} = 1, \text{ jika } i \text{ dan } j \text{ adjacent}$$

$$0, \text{ untuk yang lainnya}$$

Matriks yang lain yang perlu didefinisikan sebagai peralatan tambahan untuk memudahkan perhitungan yaitu matriks laplacian yang dinotasikan dengan $T(G) = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^n$, entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut :

$$c_{ij}, \text{ jika } i \neq j,$$

$$\text{dan } c_{ii} = d^-(i), \text{ jika } i = j$$

apabila untuk simpul yang dilabel dengan 00 diletakkan sebagai simpul pertama, sedangkan simpul yang dilabel dengan 01 diletakkan sebagai simpul yang ke dua, simpul yang dilabel dengan 10 diletakkan sebagai simpul yang ke tiga sedangkan simpul yang dilabel dengan 11 diletakkan sebagai simpul yang keempat. Berikut adalah matriks ketetanggaan beserta dengan matriks laplacian dari suatu graf gambar 3.2:

Faktorial dari derajat keluar pada simpul v_1 ($d^+ v_1$!) menyatakan ada berapa cara yang dapat dilalui jalur Euler S , dan produk faktorial $\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$ menyatakan bahwa terdapat satu busur yang berkurang, dimana busur tersebut keluar dari simpul v_i pada saat jalur Euler S melaluinya. Oleh karena itu, karena banyaknya pohon rentangan terhadap simpul v_1 sama dengan ko-faktor matriks Laplace T_{11} , maka banyaknya sirkuit Euler adalah :

$$\epsilon(G) = |T_{11}| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$$

Dari (1) dan (2), dan karena nilai ko-faktor T_{ij} dari matriks Laplace secara umum sama ($T_{ij}=c$), maka bukti terpenuhi.

Contoh 3.1. Menentukan jumlah sirkuit Euler dari graf $G_{2,3}$ pada Gambar 3.1

Dengan persamaan $T_{ij} = -1^{i+j} M_{ij}$ dari matriks Laplace diperoleh nilai ko-faktor $c = T_{ij} = -2$. Selanjutnya dapat ditentukan banyaknya sirkuit Euler pada graf $G_{2,3}$ dengan menggunakan Teorema 3.1. Dalam hal ini $G_{2,3}$ memiliki empat simpul dengan derajat $d_i = d^+ i = d^- i = 2$, maka diperoleh $\epsilon(G)$ sebagai berikut :

$$\epsilon(G) = |T_{11}| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$$

Hasil sirkuit Euler $\epsilon(G) = 2$ ini menunjukkan bahwa $G_{2,3}$ terdapat dua buah sirkuit Euler dengan lintasan paling minimal. Secara umum dari Teorema 3.1 hasilnya dirangkum pada Teorema 3.2 sebagai berikut.

Teorema 3.2. (Rosenfeld, 2003). *Jumlah dari lingkaran lengkap dengan panjang a^n pada alfabet A ($A = a \geq 2; n \geq 1$) sama dengan jumlah sirkuit Euler $\epsilon(G)$ di dalam graf de Bruijn $G_{a,n}$.*

Bukti :

Dengan menggunakan definisi graf de Bruijn $G_{a,n}$ dapat dilihat bahwa setiap busur berarahnya memiliki label yang berbeda dengan panjang n atas alfabet A , dan dalam hal ini semua busur berarahnya terdiri dari semua kemungkinan a^n . Karena sirkuit Euler pada graf $G_{a,n}$ melalui busur berarahnya tepat satu kali, maka mengakibatkan ada korespondensi satu-satu dengan lingkaran lengkap yang memiliki panjang a^n .

Selanjutnya akan dilihat keterhubungan polinomial karakteristik dari masing-masing matriks adjacency dan juga matriks Laplace. Misalkan I menyatakan matriks identitas dengan entri diagonalnya 1 dan yang lainnya 0, polinomial karakteristik dari matriks adjacency $C(G)$ dinotasikan dengan $P(G;x)$. Artinya $P(G;x) = P(C(G);x) = \det(xI - C(G))$, karena matriks $C(G)$ diperoleh dari $G_{a,n}$ maka bentuk polinomial karakteristiknya dapat juga ditentukan dengan persamaan $P(G_{a,n};x) = x^{a^n-1} (x-a)$, $a \geq 2, n \geq 1$ (3.1)

Selanjutnya akan dilihat keterhubungan polinomial karakteristik dari masing-masing matriks adjacency dan juga matriks Laplace. Misalkan I menyatakan matriks identitas dengan entri diagonalnya 1 dan yang lainnya 0, polinomial karakteristik dari matriks adjacency $C(G)$ dinotasikan dengan $P(G;x)$. Artinya $P(G;x) = P(C(G);x) = \det(xI - C(G))$, karena matriks $C(G)$ diperoleh dari $G_{a,n}$ maka bentuk polinomial karakteristiknya dapat juga ditentukan dengan persamaan $P(G_{a,n};x) = x^{a^n-1} (x-a)$

), $a \geq 2, n \geq 1$ (3.1) dengan $L(G;x) = d/dx L(G;x)$ dan n menyatakan banyaknya simpul. Karena matriks Laplace diperoleh dari matriks adjacency dari graf $G_{a,n}$ maka ko-faktor dari matriks Laplace juga dapat ditentukan dengan

$$c(G_{a,n}) = a^{a^n-1} / a^n, a \geq 2, n \geq 1$$
(3.3)

Kemudian untuk setiap graf berarah yang reguler jumlah derajat masuk dan derajat keluar dari suatu simpul sama (terutama graf de Bruijn), maka po-linomial karakteristik $L(G;x) = P(G;x+d)$. Selanjutnya nilai ko-faktor secara umum dapat ditentukan dengan Teorema 3.3 sebagai berikut :

Teorema 3.3. (Rosenfeld, 2003). *Nilai c sebagai ko-faktor T_{ij} di dalam matriks $T(G)$ dapat dihitung dengan persamaan : $c = c(G) = 1/n P'(G;x)|_{x=d}$,*

dengan n menyatakan banyaknya simpul dan d jumlah derajat masuk atau keluar dari suatu simpul.

Bukti :

Untuk setiap graf berarah regular jumlah derajat masuk dan derajat ke-luar dari setiap simpulnya sama, sehingga polinomial karakteristik dari matriks Laplace dapat diperoleh dari polinomial karakteristik matriks adjacency dengan menambahkan nilai $d^+ v = d^- v = d$ pada variabel x . Lebih lanjut polinomial karakteristik $L(G;x) = P(G;x+d)$. Dengan menerapkan persamaan (3.2) maka diperoleh $c = c(G) = 1/n P'(G;x)|_{x=d}$.

Contoh 3.2. Penggunaan persamaan (3.2) dan Teorema 3.1.1 untuk menentu-kan ko-faktor secara umum

Dari Gambar 3.1. dapat diperoleh matrik Laplace sebagai berikut:

$T(G) =$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik dari matriks Laplacanya adalah :

$$L(G_{2,3};x) = P(T(G_{2,3});x) = [\det(xI - T(G_{2,3}))] = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

Dengan menerapkan persamaan (3.2) diperoleh nilai ko-faktornya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} C &= c(G_{2,3}) = \frac{1}{n} L'(G_{2,3};x)|_{x=0} \\ &= \frac{1}{4} (4x^3 + 18x^2 + 24x + 8)|_{x=0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dari Gambar 3.1 diperoleh matriks adjacency sebagai berikut :

$C(G_{2,3})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik dari matriks adjacencynya adalah :

$$\begin{aligned} P(G_{2,3}; x) &= P(C(G_{2,3}); x) \\ &= \det(xI - C(G_{2,3})) \\ &= x^4 - 2x^3 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan Teorema 3.3 nilai kofaktornya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C &= c(G_{2,3}) = \frac{1}{n} P'(G_{2,3}; x)|_{x=0} \\ &= \frac{1}{4} (4x^3 + 18x^2 + 24x + 8)|_{x=0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dari pembahasan ini dapat dilihat bahwa setiap graf Euler akan memuat sirkuit Euler, selanjutnya setiap graf de Bruijn merupakan graf Euler, oleh karena itu mengandung sirkuit Euler. Pada pembahasan berikutnya akan ditunjukkan bahwa sirkuit Euler yang ada pada graf de Bruijn merupakan representasi dari barisan de Bruijn.

Menentukan Barisan de Bruijn

Dalam menentukan barisan de Bruijn harus ditentukan terlebih dahulu graf de Bruijn berdasarkan berapa jumlah alfabet yang ingin dibuat dan berapa panjang kata yang dibutuhkan untuk membuat barisan. Dalam tulisan kali ini alfabet yang digunakan adalah alfabet biner dengan panjang 2, 3, 4 untuk n yang lebih besar akan diserahkan kepada pembaca.

Yang pertama yang akan dibahas adalah graf de Bruijn dengan string pembentuknya n=2, karena merupakan alfabet biner berarti a=2, sehingga notasi grafnya yaitu $G_{2,2}$ dengan label simpul besarnya 1 (didapat dari rumus label simpul = n-1), jumlah simpulnya 2, sedangkan jumlah busur berarahnya yaitu $2^2=4$. Kemungkinan untuk masing-masing busur kata biner ada 4, yaitu 00,01,10,dan 11. Karena alfabet yang digunakan merupakan alfabet biner maka jumlah derajat yang masuk sama dengan jumlah derajat yang keluar dengan besar sama dengan 2. Ini berlaku untuk berapapun nilai n. Jadi graf yang dibentuk seperti graf pada gambar 3.1 untuk menentukan untaian barisan de Bruijn /lingkaran lengkap(disebut juga dengan lingkaran lengkap karena lingkaran mengandung semua string pembentuknya) yaitu 0110, dengan cara menghilangkan bit atau alfabet overlapping yang diperoleh dari sirkuit euler yaitu 1 bit terakhir dari ke empat string.

Untuk n yang lebih besar cukup banyak permasalahan yang dihadapi karena kita harus menelusuri semua kata yang membentuk lingkaran lengkap atau barisan de Bruijn. Sekarang kita tinjau untuk n yang bernilai sama dengan 3, karena kita masih menggunakan alfabet biner maka nilai a=2 dan n=3 sehingga notasi graf berarah de bruijn yaitu $G_{2,3}$. Hal yang pertama yang perlu kita

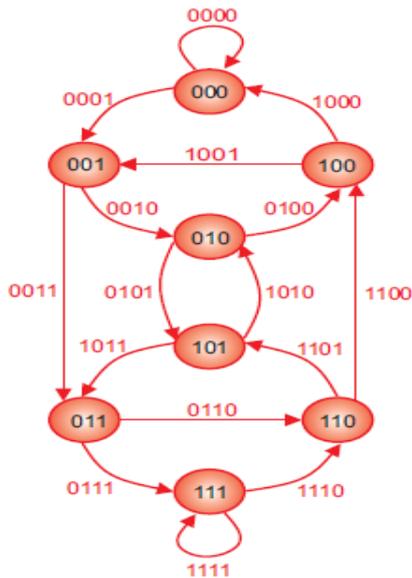
analisis dalam membuat graf ini yaitu menentukan jumlah simpul yang diperlukan untuk membuat graf ini yaitu sebanyak $2^{n-1}=2^{3-1}=4$, dengan panjang label dari masing-masing simpul yaitu n-1=2, yaitu 00,01,10,11 dengan aturan arah busur yang keluar yaitu menuju simpul dimana bit yang terakhir dari simpul yang pertama akan mencari bit yang sama dengan bit pertama dari simpul selanjutnya sehingga nilai yang sama ini akan ditindih untuk menghasilkan label pada busur, untuk 00 ->00 label busurnya 000, untuk 00 ke 01, label busurnya 001, untuk 11 ke 10 label busurnya 110, untuk 11 ke 11 label busurnya yaitu 111, sedangkan untuk arah sebaliknya juga dapat ditentukan label busurnya yaitu untuk 01 ke 10 maka label busurnya 010, begitu untuk kombinasi simpul yang lainnya sehingga jumlah kombinasi label busur dengan jumlah string masing-masing label yaitu 3 adalah 000,001,010,011,100,101,110,111. Graf yang dibentuk dari metoda yang telah digunakan Edward adalah graf pada gambar 3.2. Berdasarkan hasil perhitungan sebelumnya dapat ditentukan jumlah lingkaran lengkap yaitu berjumlah 2, kita dapat mengenumerasi 2 lingkaran lengkap itu dengan cara menelusuri sirkuit euler yang lainnya dengan simpul yang berlainan. Berikut adalah salah satu urutan label yang dilalui oleh sirkuit euler yaitu 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. Bit-bit yang mengalami overlapping yaitu dua bit yang terakhir sehingga bit-bit ini harus dihapus kemudian satu bit yang pertama digabungkan sehingga membentuk untaian lingkaran lengkap dengan untaianya yaitu 00011101. Untuk memeriksa apakah hasil yang diperoleh benar, dengan memeriksa apakah setiap kata pembentuknya dengan panjang n=3 apakah dapat tercover semua dalam untaian barisan de Bruijn ini. Jika tidak, anda harus memastikan sirkuit euler yang anda benar.

Untuk meyakinkan anda tentang kelemahan dari metode ini, juga dibahas barisan de Bruijn dengan n=4 dan a=2, sehingga notasi graf yang digunakan yaitu $G_{2,4}$. Hal pertama sebelum membuat graf de Bruijn, harus ditentukan terlebih dahulu jumlah simpul dan jumlah busur berarahnya beserta label-label untuk setiap simpul.

Jumlah simpul yang diperlukan yaitu $2^{n-1}=2^{4-1}=8$ buah simpul, dengan kombinasi label sepanjang n=3 yaitu 000,001,010,011,100,101,110,111. Sedangkan banyak kombinasi untuk busur berarahnya sebanyak $2^n=2^4=16$, dengan kombinasi label sepanjang 4 yaitu 0000,0001,0010,0011,0100,0101,0110,0111,1000,1001,1010,1011,1100,1101,1110,1111. Jumlah busur yang masuk sama dengan jumlah busur yang keluar di setiap simpul dengan jumlah sama dengan 2. Berikut adalah bentuk graf $G_{2,4}$ seperti dalam gambar 3.3

Untuk menentukan barisan de Bruijn yang mungkin dapat dilihat dalam graf tersebut seperti dalam gambar 3.3, sirkuit euler yang mungkin dapat dibentuk dari urutan label busur berarah(menyatakan kata pembentuk dengan panjang 4) 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 1110, 1100, 1001, 0010, 0101, 1011, 0110, 1101, 1010, 0100, 1000 dengan menghapus 3 bit yang terakhir(bit yang overlapping) sehingga didapat barisan de Bruijn

0000111100101101



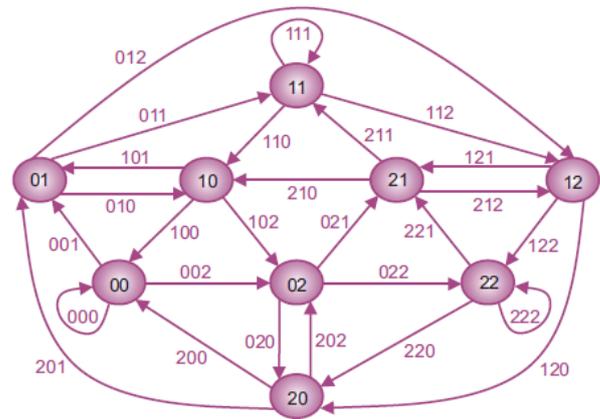
Gambar 3.3 Graf de Bruijn $G_{2,4}$

Untuk meyakinkan anda bahwa jumlah derajat masuk sama dengan jumlah derajat yang keluar dari setiap simpul sama dengan jumlah alfabet biner yang digunakan, maka penulis juga memberikan ilustrasi barisan de Bruijn dengan alfabet ternary dengan alfabet yang digunakan yaitu berjumlah $3\{0,1,2\}$.

Untuk membuat graf de Bruijn seperti biasa kita harus menentukan jumlah simpul dan jumlah busur berarah yang diperlukan untuk membangun graf ini beserta masing-masing kombinasi label yang dibutuhkan untuk masing-masing label dan masing-masing simpul. n kita batasi sebesar 3 dan $a=3$. Jumlah simpul yang diperlukan untuk membuat graf ini yaitu $3^{n-1}=3^{3-1}=9$ dengan label untuk masing-masing simpul yaitu 01,10,11,12,21,00,02,20,22. Sedangkan jumlah busur berarah yang diperlukan untuk membangun graf ini yaitu $3^3=27$ dengan panjang label untuk masing-masing busur berarah tiga. 27 kombinasi dari label setiap busur berarah dengan panjang 3 untuk masing-masing label yaitu 011, 111, 112, 121, 210, 101, 012, 120, 201, 010, 102, 021, 211,110, 100, 002, 022, 221, 212, 122, 222, 220, 202, 020, 200, 000, 001.

Selanjutnya tentukan simpul selanjutnya dengan metode bahwa 1 bit terakhir dari simpul pangkal harus sama dengan 1 bit pertama dari simpul selanjutnya itu. Bit yang sama 2 bit tadi di merge, misalkan simpul pangkal dari graf tersebut yaitu 01 sedangkan simpul selanjutnya yang mungkin yaitu 12, 11,10. Simpul dengan label 01 mempunyai tiga buah busur berarah yang arahnya keluar dari simpul ini dengan label yaitu 012,011,010, secara berturut-turut bersesuaian dengan 3 simpul selanjutnya. Graf yang dihasilkan seperti pada gambar 3.4. Anda dapat melihat bahwa tiap simpul, derajat masuk maupun keluar sama dengan alfabet biner yang digunakan yaitu 3. Salah satu sirkuit eulernya 011, 111, 112, 121, 210, 101, 012, 120, 201, 010, 102, 021, 211,110, 100, 002, 022, 221, 212, 122, 222, 220, 202, 020, 200, 000, 001 dengan menghilangkan 2 bit terakhir dan dengan hanya mengambil 1 bit pertamanya saja maka barisan de Bruijn

yang dapat dibentuk untuk graf $G_{3,3}$ yaitu
011121012010211002212220200



Gambar 3.4 Graf de Bruijn $G_{3,3}$

B. Kontruksi Barisan de Bruijn dengan Metode Aritmatika Modulo

Salah satu cara alternatif untuk menentukan barisan de Bruijn adalah dengan menggunakan aritmatika modulo. Hal pertama yang perlu diperhatikan dari metode ini yaitu menentukan a_1 yang diperoleh dari 2^n-1 , untuk a_i yang selanjutnya dapat ditentukan dari persamaan berikut :

$$a_{i+1} = 2a_i \pmod{2^n}$$

untuk kasus dimana $j \leq 2a_i$ maka berlaku

$$a_{i+1} = 2a_i + 1 \pmod{2^n}$$

contoh berikut akan diulas pembentukan barisan de Bruijn $G_{2,3}$ berarti barisan ini membutuhkan bentuk biner dari 2^n pertama yaitu $0,1,2,3,\dots,2^n-1$, alasan mengenai pembatasan jumlah bilangan ini akan dibahas pada sub-bab selanjutnya.

Menentukan $a_1=2^n-1$, karena $n =8$, maka $a_1=7$, atau dalam bentuk biner yaitu 111. Selanjutnya a_2 yaitu $2 \times 7 \pmod{8} = 6$ atau dalam bentuk biner yaitu 110, selanjutnya $a_3 = 2 \times 6 \pmod{8} = 4$ atau dalam bentuk biner yaitu 100 , $a_4=2 \times 4 \pmod{8} = 0$ atau dalam bentuk biner 000 , $a_5 = 2 \times 0 \pmod{8} = 0$, karena $a_5 = a_4$, maka untuk koreksi $a_5 = 2 \times 0 + 1 \pmod{8} = 1$ atau daalm bentuk biner, $a_6 = 2 \times 1 \pmod{8} = 2$ atau daalm bentuk biner sama dengan 010, $a_7 = 2 \times 2 \pmod{8} = 4$, karena $a_7=a_3$, maka $a_7 = 2 \times 2 + 1 \pmod{8} = 5$ atau dalam bentuk biner sama dengan 101 dan $a_8 = 2 \times 5 \pmod{8} = 2$ karena angka 2 sudah muncul maka $a_8 = 2 \times 5 + 1 \pmod{8} = 3$ atau dalam bentuk bilangan biner sebagai 011 . Apabila kita ringkas semua hasil yang diperoleh sebelumnya maka kita dapat menentukan barisan de Bruijn sebagai 76401253 atau dalam untaian biner sebagai 1111101000000101001001101, apabila kita amati maka 2 bit terakhir dari bilangan biner sebelumnya sama dengan 2 bit pertama dari bilangan biner selanjutnya, 2 bit yang sama ini merupakan bit-bit yang overlapping sehingga dapat ditindih, jadi bilangan biner yang diperoleh dari hasil aritmatika modulo ini adalah 11100010. untuk memeriksa apakah hasil yang diperoleh benar atau tidak, anda dapat mengujinya dengan memadankan untuk setiap string dengan 3 bit apakah

terkover semua di dalam barisan de Bruijn tersebut.

Mengapa metode ini bekerja?

Prinsip mendasar dari barisan de Bruijn adalah membuat lingkaran lengkap sehingga string dengan panjang n terkover semuanya dalam barisan de Bruijn dengan panjang 2^n . Apabila kita amati secara baik-baik inti pengerjaan dari metode ini adalah bagaimana menyusun 2^n bilangan yang pertama dalam decimal dimulai dari decimal 0, sedemikian hingga terdapat $n-1$ bit yang mengalami overlapping.

Kita tentukan terlebih dahulu a_1 , metode yang pertama menggunakan $a_1 = 2^n - 1$, sebenarnya kita tidak boleh terlalu kaku dalam menentukan dalam a_1 ini karena dalam graf de Bruijn kita dapat memulai dari simpul manapun asalkan dapat membentuk sirkuit euler, berdasarkan perhitungan barisan de Bruijn yang diperoleh dari graf de Bruijn $G_{2,3}$ berjumlah 2 buah, sehingga dengan cara yang sama kita seharusnya dapat menentukan barisan de Bruijn yang lain. Dalam metode ini kita memakai $2^n - 1$, berarti berdasarkan sifat overlapping terdapat $2^{n-1} - 1$ dan 2^{n-2} sebelumnya, cara memperoleh bilangan $2^n - 1$ dengan mengalikan 2 bilangan itu dengan angka 2, karena sifat yang diperoleh sama dengan 2 bilangan sebelumnya apabila di modulo dengan 8, sehingga perlu ditambahkan dengan 1, seperti pada kasus sebelumnya.

Alasan dengan dipilihnya pengali dengan angka 2, dianalogikan dengan pengali 10 pada bilangan basis 10, bilangan yang dikalikan dengan angka 10 pasti akan bergeser 1 posisi ke kiri, hal ini akan mengakibatkan bilangan yang sebelum dikalikan dengan bilangan yang setelah dikalikan mempunyai digit-digit yang saling overlapping. Dalam pembahasan di atas tulisan ini menggunakan bit sepanjang n , sehingga panjang bit yang mengalami yang akan mengalami overlapping sepanjang $n-1$. Apabila kita ulas ulang alinea sebelumnya mengenai penentuan a_1 , maka a_1 juga dapat diperoleh dari $a_1 = 2^n - 2$, karena bilangan sebelumnya yaitu $2^n - 1$ dan $2^{n-1} - 1$.

Untuk n sama dengan 4, penentuan barisan de Bruijn adalah sebagai berikut :

$$a_1 = 2^n - 1 = 1111$$

sekarang modulo hasil bagi sebesar $2^n = 2^4 = 16$, untuk menentukan $a_2 = 2 \times 15 \pmod{16} = 14$ atau dalam bilangan biner = 1110, $a_3 = 2 \times 14 \pmod{16} = 12$, atau dalam bentuk biner sama dengan 1100, $a_4 = 2 \times 12 \pmod{16} = 8$ atau dalam bentuk biner sama dengan 1000, $a_5 = 2 \times 8 \pmod{16} = 0$, atau dalam bentuk biner sama dengan 0000, $a_6 = 2 \times 0 \pmod{16} = 0$, karena a_6 sama dengan a_5 maka $a_6 = 2 \times 0 + 1 \pmod{16} = 1$, atau dalam bentuk biner 0001, $a_7 = 2 \times 1 \pmod{16} = 2$, atau dalam bentuk biner sama dengan 0010, $a_8 = 2 \times 2 \pmod{16} = 4$, atau dalam bentuk biner 0100, $a_9 = 2 \times 4 \pmod{16} = 8$, karena 8 sudah muncul sebelumnya, maka $a_9 = 2 \times 4 + 1 \pmod{16} = 9$, atau dalam bentuk biner 1001, $a_{10} = 2 \times 9 \pmod{16} = 3$, atau dalam bentuk biner 0011, $a_{11} = 2 \times 3 \pmod{16} = 6$, atau dalam bentuk biner 0110, $a_{12} = 2 \times 6 \pmod{16} = 12$, karena 12 sudah muncul sebelumnya maka $a_{12} = 2 \times 6 + 1 \pmod{16} = 13$ atau dalam bentuk biner 1011, $a_{13} = 2 \times 13 \pmod{16}$

=10, atau dalam bentuk biner sama dengan 1010, $a_{14} = 2 \times 10 \pmod{16} = 4$, karena angka 4 sudah muncul sebelumnya, maka $a_{14} = 2 \times 10 + 1 \pmod{16} = 5$, atau dalam bentuk biner sama dengan 0101, $a_{15} = 2 \times 5 \pmod{16} = 10$, karena angka 10 sudah muncul sebelumnya maka $a_{15} = 2 \times 5 + 1 \pmod{16} = 11$ atau dalam bentuk bilangan biner sama dengan 1001. Jadi apabila kita kokontenasi semua bilangan biner di atas dengan menghilangkan semua bilangan yang overlapping yaitu $n-1$ dari yang terakhir bilangan biner tersebut, atau dengan hanya bit biner yang pertama kita dapat tentukan untaian bilangan biner yaitu 1111000010011010.

Sekarang kita menguji apakah aritmatika modulo ini berlaku untuk representasi bilangan yang lebih besar, untuk itu uji coba dimulai dengan representasi ternary dengan kata pembentuknya sepanjang n bit, maka definisi ulang dari aritmatika modulo untuk jumlah alfabet yang digunakan sebanyak 3 buah yaitu:

$$a_1 = 3^n - 1$$

$$a_{i+1} = 3x a_i \pmod{3^n},$$

apabila a_{i+1} muncul pada bilangan-bilangan sebelumnya, maka $a_{i+1} = 3x a_i + 1 \pmod{3^n}$. Sebagai contoh kita akan menentukan barisan de Bruijn $B(3,2)$ maka $a_1 = 3^2 - 1 = 8$ atau dalam bentuk bilangan ternary sama dengan 22, $a_2 = 3 \times 8 \pmod{9} = 6$ atau dalam bentuk bilangan ternari sama dengan 20, $a_3 = 3 \times 6 \pmod{9} = 0$, atau dalam bilangan ternari sama dengan 00, $a_4 = 3 \times 0 \pmod{9} = 0$, karena angka 0 sudah muncul sebelumnya maka $a_4 = 3 \times 0 + 1 \pmod{9} = 1$, atau dalam bentuk ternary sama dengan 01, $a_5 = 3 \times 1 \pmod{9} = 3$ atau dalam bentuk ternary 10, $a_6 = 3 \times 3 \pmod{9} = 0$, karena angka 0 sudah muncul sebelumnya maka $a_6 = 3 \times 3 + 1 \pmod{9} = 1$, karena angka 1 sudah muncul sebelumnya maka $a_6 = 1 + 1 = 2$, atau dalam bentuk ternary sama dengan 02, $a_7 = 3 \times 2 \pmod{9} = 6$, karena angka 6 sudah muncul sebelumnya maka $a_7 = 3 \times 2 + 1 \pmod{9} = 7$, atau dalam bentuk ternary = 21, $a_8 = 3 \times 7 \pmod{9} = 3$, karena angka 3 sudah muncul maka $a_8 = 3 \times 7 + 1 \pmod{9} = 4$, atau dalam bentuk biner sama dengan 11, selanjutnya $a_9 = 3 \times 4 \pmod{9} = 3$, karena angka 3 sudah muncul sebelumnya maka $a_9 = 3 \times 4 + 1 \pmod{9} = 5$, atau dalam bentuk ternary 12. Jika kita ringkas semua hasil yang diperoleh dengan mengambil bit yang pertama saja maka akan kita dapatkan barisan de Bruijn $B(3,2) = 220010211$.

Jadi dengan metode ini, kita dapat menentukan barisan de Bruijn dengan lebih cepat dan lebih mudah dengan hanya menggunakan rumus umum yang telah digeneralisasi yaitu

$a_1 = a^n - 1$, dengan a menyatakan representasi kata yang digunakan apakah biner, ternary, atau quartener, sedangkan $a_{i+1} = a x a_i \pmod{a^n}$, akan tetapi jika a_{i+1} sudah muncul sebelumnya maka bentuk $a_{i+1} = a x a_i + 1 \pmod{a^n}$. dengan a sampai dengan n , tidak diijinkan untuk $i > n$, karena batas modular sama dengan n , sehingga apabila tester mencoba melakukan komputasi untuk $i > n$, nilai a_i akan berulang, meskipun sudah berkali-kali ditambahkan dengan 1. Keuntungan yang diperoleh dari metode ini apabila dituangkan dalam bentuk algoritma akan

mempunyai kompleksitas waktu yang lebih baik jika dibandingkan dengan algoritma penyelesaian dengan menggunakan graf de Bruijn.

Menentukan Barisan de Bruijn Lengkap

Suatu lingkaran adalah barisan $u_1 u_2 \dots u_r$ yang memuat lintasan melingkar yaitu u_1 mengikuti u_r . Kemudian $u_2 u_3 \dots u_r u_1, \dots, u_1 \dots u_{r-1}$ semuanya adalah lingkaran yang sama seperti $u_1 u_2 \dots u_r$. Bila diberikan bi-langan bulat positif $a \geq 1$ dan $n \geq 2$, maka suatu lingkaran dari string an dinamakan lingkaran lengkap atau barisan de Bruijn, jika sub-barisan $u_i u_{i+1} \dots u_{i+n-1}$ ($1 \leq i \leq an$) terdiri dari semua kemungkinan string a^n yaitu barisan terurut $w_1 w_2 \dots w_n$ atas alfabet A ($|A| = a$).

Teorema 3.4. (Rosenfeld, 2003). Untuk suatu bilangan asli positif $a \geq 2$ dan $n \geq 1$ terdapat tepat $(a!)^{a^n - 1 - n}$ lingkaran lengkap dengan panjang a^n .

Bukti :

Dengan menggunakan persamaan (3.3) diketahui bahwa $c = a^{(a^n - 1) / a^n}$, dan pada persamaan (3.1) diketahui polinomial karakteristik dari matriks adjacen-cy graf $G_{a,n}$ ditentukan oleh $P(G_{a,n}) = x^{a^n - 1} (x - a)$. Pada definisi graf de Bruijn dijelaskan bahwa jumlah busur yang masuk (in-degree) dan keluar (out-degree) di setiap simpul akan sama dengan nilai $a = d_i$ ($1 \leq i \leq n$). Sehingga dengan menerapkan Teorema 3.1.1 diperoleh hubungan,

$$\begin{aligned} \varepsilon(G) &= |c| \prod_{i=1}^n (d_i - 1)! \\ \varepsilon(G) &= \frac{a^{a^n - 1}}{a^n} \prod_{i=1}^n (d_i - 1)! \\ \varepsilon(G) &= \frac{a^{a^n - 1}}{a^n} \prod_{i=1}^n (d_i - 1)! = a^{(a^n - 1) - n} \end{aligned}$$

dengan menerapkan Teorema 3.2 terlihat bahwa banyaknya sirkuit Euler $\varepsilon(G)$ sama dengan jumlah lingkaran lengkap dengan panjang a^n , dan alfabet yang digunakan $\{0,1\}$ dengan demikian bukti selesai.

Sebagai contoh penggunaan Teorema 3.4 kembali dapat dilihat contoh graf de Bruijn $G_{2,3}$ pada Gambar 3.1, yakni graf de Bruijn yang dibentuk dari alfabet $A = \{0,1\}$ berukuran $a=2$ dan $n=3$. Dengan menggunakan Teorema 3.4 dapat ditentukan lingkaran lengkap yaitu $(a!)^{a^n - 1 - n} = 2$. Bentuk lingkaran lengkap dengan panjang $2^3 = 8$ adalah :

- 00010111
- 00011101

Dua buah lingkaran lengkap (sirkuit Euler) di atas disebut barisan de Bruijn dari graf de Bruijn $G_{2,3}$. Selanjutnya suatu "kata" dengan panjang $a^n + n - 1$ yang memuat himpunan yang sama dari a^n terdiri dari n bagian "kata" seperti lingkaran lengkap yang utuh dinamakan barisan de Bruijn linear. Sesungguhnya, barisan de bruijn linear dapat diperoleh dengan menambahkan $n - 1$ susunan huruf pertama dari setiap "kata" a^n . Lebih lanjut hasilnya dinyatakan pada Akibat

3.5 sebagai berikut

Akibat 3.1.5. (Rosenfeld, 2003). Untuk suatu bilangan asli positif $a \geq 2$ dan $n \geq 1$ terdapat tepat $a! a^{n-1}$ barisan de Bruijn linier dengan panjang $a^{n+1} - 1$.

Bukti :

Dari Teorema 3.1.2 terlihat bahwa banyaknya sirkuit Euler $\varepsilon(G)$ itu sama dengan jumlah lingkaran lengkap a^n , dan dengan definisi barisan de Bruijn linier, "kata" minimal dengan panjang $a^{n+1} - 1$ jumlahnya sama dengan lingkaran lengkap a^n . Oleh karena itu dari bukti Teorema 3.4 diperoleh kesimpulan pembuktian.

Dengan menggunakan Gambar 3.1 dapat ditentukan barisan de Bruijn linier $(a!)^{a^n - 1} = (2!)^{2^3 - 1} = 16$, dengan panjang $a^{n+1} - 1 = 2^4 - 1 = 15$. Barisan de Bruijn linier ini diawali dari setiap simpul yang ada pada $G_{2,3}$, barisannya sebagai berikut :

➤ 0001011100	➤ 0101110001
➤ 0001110100	➤ 0100011101
➤ 0010111000	➤ 0111010001
➤ 0011101000	➤ 0111000101
➤ 1110001011	➤ 1000111010
➤ 1110100011	➤ 1000101110
➤ 1100010111	➤ 1011100010
➤ 1101000111	➤ 1010001110

Gambar 3.5

Penerapan Graf de Bruijn dalam Encode Protein

Seperti yang telah kita ketahui bahwa protein tersusun atas beberapa triplet yang diencode sehingga protein hasil encode sulit diidentifikasi asam amino penyusunnya (Matmala, 2003). Selain tersusun atas triplet juga banyak senyawa organik baru yang tersusun atas duplet asam amino, dan senyawa organik yang lainnya yang terdiri dari beberapa multipler asam amino lainnya. Basa penyusun yang telah dikenal dalam penyusun DNA ada 4, yaitu adenin, guanine, timin, dan sitosin, atau disingkat AGTC. Dengan bantuan barisan de Bruijn kita dapat menekan untai kode DNA triplet 4 basa penyusun tersebut dengan bantuan Barisan de Bruijn. Hal ini akan lebih mudah jika 4 basa tersebut dianalogikan dengan representasi bilangan quaterner dengan $A=3, G=2, T=1, C=0$. Karena menggunakan representasi quaterner maka panjang untai kode DNA yang mungkin yaitu $4^3 = 64$ untai kode.

III. KESIMPULAN

1. Barisan de Bruijn merupakan lingkaran lengkap yang mencakup semua kata pembentuk lingkaran lengkap tersebut, panjang lingkaran lengkap yaitu 2^n , sedangkan panjang kata pembentuknya n .
2. Graf de Bruijn digunakan untuk menentukan barisan de Bruijn dengan menentukan sirkuit eulernya terlebih dahulu. Jadi graf de Bruijn merupakan graf Euler. Dalam menentukan barisan de Bruijn harus ditentukan terlebih dahulu jumlah simpul dan panjang label simpul, jumlah busur berarah dan panjang label untuk busur berarah.
3. Karena setiap simpul pada Graf de Bruijn mempunyai derajat masuk yang sama dengan jumlah derajat yang keluar simpul sama dengan jumlah alfabet yang digunakan, hal ini menjamin bahwa dalam graf de Bruijn minimal terdapat satu buah sirkuit euler.
4. Banyak metode yang digunakan untuk menentukan barisan de Bruijn, masing-masing metode mempunyai kelemahan dan kelebihan, tiga metode yang banyak dikenal dikalangan akademis yaitu metode penelusuran graf euler, aritmatika modulo, metode urutan lexicography. Untuk sementara metode yang paling banyak digunakan yaitu metode penelusuran graf euler, karena dengan metode ini banyak diperoleh informasi mengenai sifat-sifat barisan de Bruijn.
5. Metode untuk menentukan barisan de Bruijn masih terus berkembang untuk memperbaiki metode-metode sebelumnya. Mengingat Barisan de Bruijn banyak berkembang di bidang biomolekuler, sehingga dibutuhkan metode yang lebih efektif untuk menangani n dan a yang cukup besar.

REFERENSI

- [1] Chung, F., Diaconis, P dan Graham R. (1992). Universal cycle for combinatorial structure. *Discrete Mathematics* 110 : 43-59
- [2] Edgar, G dan Michael, M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. United State of America. Prentice Hall.
- [3] Drew, A. *De Bruijn Sequence*. Mei 5, 2010. pk. 14.05. <http://www.math.umn.edu/~armstron/5707/DeBruijn.pdf>
- Gross, J dan Yellen, J. (2006). *Graph Theory and its Applications*. United State of America. Chapman & Hall/CRC.
- [4] Martin, M dan Moreno, E. (2004). Minimal Eulerian Trail in a Labeled Digraph. *Elsevier Science*.

[4] Moreno, E. (2003). On the Theorem of Fredicksen and Maiorana about de Bruijn Sequence. *Advance in Applied Mathematics*. vol. 33: 413-415

[5] Rosen, K. (1995). *Discrete Mathematics and its Applications*. Singapore. Mac-Graw Hill.

[6] Rosenfeld, V.R . (2003). *Enumerating de Bruijn Sequence*. Mei 19, 2010. pk. 09.45. <http://www.stefangeens.com/br13.pdf>. http://www.liv.ac.uk/~pjgiblin/papers/Yu-She-project_spellchecked.pdf

SUMBER GAMBAR

- [1] <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2011-2012/Graf.ppt> [hal 5-6]
- [2] http://www.liv.ac.uk/~pjgiblin/papers/Yu-She-project_spellchecked.pdf

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 19 Desember 2011



Jais Anasrulloh Ja'fari(13511036)