

# Logika dan Induksi Matematika untuk Menentukan Nilai Kebenaran Paradoks Hukum Gantung Tak Terduga (Unexpected Hanging Paradox)

Evan Budianto/13511041  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
evan.budianto@students.itb.ac.id

**Abstrak**—Seorang terdakwa hukuman mati diberitahu oleh hakim bahwa ia akan akan segera menjalani hukumannya. Sang hakim berkata bahwa terdakwa tidak akan bisa menerka hari dimana dia akan dihukum, tetapi yang pasti terdakwa akan terkejut pada hari ketika algojo datang untuk mengeksekusinya.

Cerita tersebut akan menuntun kita ke dalam suatu pola pikir yang dapat mengacaukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan yang ada. Logika dan induksi matematika membantu dalam menyelesaikan masalah kerancuan nilai kebenaran yang muncul.

**Kata Kunci**—Logika matematika, nilai kebenaran, unexpected hanging paradoks.

## I. PENDAHULUAN

Paradoks adalah suatu pernyataan atau proposisi yang timbul dari sejumlah premis yang dapat diterima, yang merujuk kepada suatu kesimpulan yang secara logika dirasa tidak dapat diterima atau kontradiksi..

Dalam kamus besar bahasa Indonesia, kata paradoks didefinisikan sebagai suatu pernyataan yang seolah-olah bertentangan (berlawanan) dengan pendapat umum atau kebenaran, tetapi kenyataannya mengandung kebenaran.

Yang membedakan paradoks dengan pernyataan lainnya adalah nilai kebenarannya yang ambigu. Suatu pernyataan biasanya dapat langsung ditentukan nilai kebenarannya. Pada paradoks nilai kebenarannya akan bernilai benar jika hanya dilihat dari satu sisi. Namun ketika dipandang dari sisi yang berbeda, muncul kontradiksi yang mengakibatkan nilai kebenaran paradoks menjadi ambigu.

Kata paradoks seringkali digunakan dengan kontradiksi, tetapi sebuah kontradiksi oleh definisi tidak dapat benar, banyak paradoks dapat memiliki sebuah jawaban, meskipun banyak yang tetap tak terpecahkan, atau hanya terpecahkan dengan perdebatan (seperti paradoks Curry). Dan juga istilah ini digunakan untuk situasi yang mengejutkan seperti paradoks Ulang Tahun. Ini juga digunakan dalam ekonomi, di mana sebuah paradoks adalah sebuah hasil tidak intuitif dari teori

ekonomi.

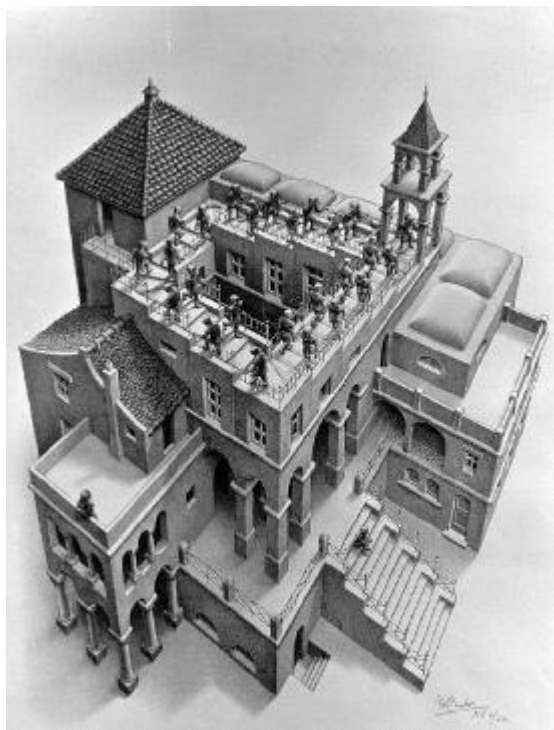
Etimologi paradoks dapat ditelusuri kembali ke Renaissance. Bentuk awal dari kata ini muncul dalam bahasa Latin paradoxum dan berhubungan dengan bahasa Yunani paradoxon. Kata ini terdiri dari preposisi para yang berarti "dengan cara", atau "menurut" digabungkan dengan nama benda doxa, yang berarti "apa yang diterima". Bandingkan dengan ortodoks (secara harafiah "pengajaran langsung") dan heterodoks (secara harafiah "ajaran berbeda"). Paradoks pembohong dan paradoks lainnya dipelajari dalam zaman pertengahan di bawah insolubilia.

Tema umum dalam paradoks termasuk referensi-sendiri yang langsung dan tak langsung, tak terhingga, definisi berputar, dan tingkatan alasan yang membingungkan. Paradoks yang tidak berdasarkan dalam sebuah "error" tersembunyi biasanya terjadi di pinggiran konteks atau bahasa, dan membutuhkan pengembangan konteks (atau bahasa) untuk menghilangkan kualitas paradoks mereka.

Dalam filosofi moral, paradoks memainkan peranan pusat dalam debat tentang etik. Misalnya, peringatan etis untuk "mencintai tetangga anda" adalah tidak hanya kontras dengan, tetapi berkontradiksi kepada tetangga bersenjata yang giat mencoba membunuh anda: bila dia berhasil, anda tidak akan berhasil untuk mencintainya. Tetapi untuk menyerang mereka terlebih dahulu atau menahan mereka biasanya tidak dimengerti sebagai tindakan cinta. Ini dapat disebut sebagai dilema etik. Contoh lainnya, adalah konflik antara perintah untuk tidak mencuri dan untuk memberi perhatian kepada keluarga yang anda tidak mampu memberi mereka makan tanpa mencuri uang.

Paradoks juga dinamakan antinomi karena melanggar hukum kontradiksi principium contradictionis (law of contradiction). Paradoks yang tertua dan sangat terkenal adalah paradox pembohong (liar paradox).

Berikut ini merupakan visualisasi dari paradox berjudul *Ascending and Descending* karya M C Escher.



## II. DASAR TEORI

### A. Logika

Logika adalah suatu cabang ilmu matematika yang membahas penalaran yang menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, merupakan cara berpikir dengan mengembahkan sesuatu berdasarkan akal budi dan bukan dengan perasaan atau pengalaman.

### B. Paradoks Hukum Gantung Tak Terduga

Paradoks hukum gantung tak terduga biasa dikenal dengan sebutan *unexpected hanging paradox*, *hangman paradox*, *unexpected exam paradox*, *surprise paradox*, atau *prediction paradox*. Paradoks ini merupakan paradoks mengenai ekspektasi seseorang tentang kejadian masa depan, seperti hari eksekusi hukuman atau ujian dadakan, yang diberitahukan akan terjadi pada waktu yang tidak dapat diperkirakan.

Berikut adalah paradoks hukum gantung tak terduga tersebut.

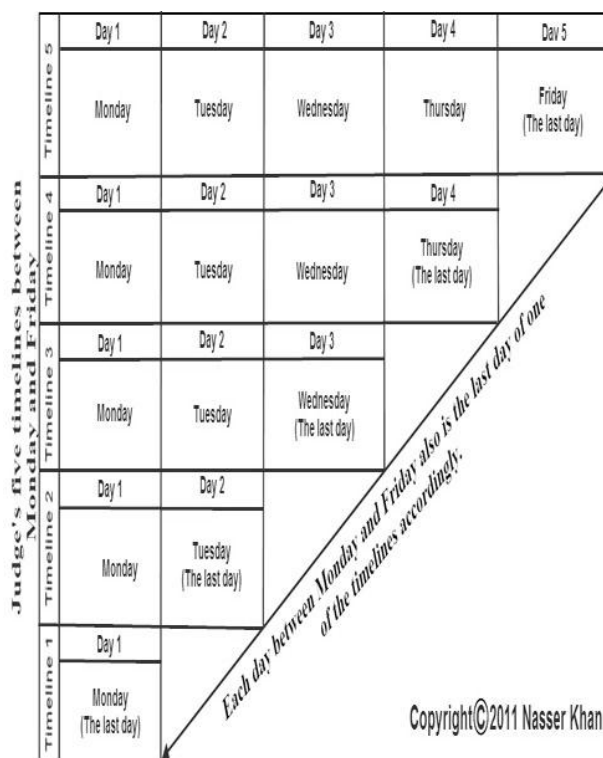
Seorang hakim memberitahu seorang tahanan yang telah didakwa bersalah bahwa ia akan dihukum gantung pada suatu siang antara hari Senin sampai Jumat pekan yang akan datang. Tahanan itu tidak akan tahu hari apa tepatnya eksekutor akan datang menjemputnya, tapi yang pasti hari eksekusi itu akan menjadi kejutan baginya.

Kemudian tahanan memikirkan kata-kata hakim itu. Dia mulai dengan memikirkan bahwa hari eksekusi akan "menjadi kejutan baginya". Kemudian dia menyimpulkan bahwa hari eksekusi bukanlah hari Jumat, karena apabila ia belum juga digantung pada hari Kamis, satu-satunya hari yang tersisa adalah hari Jumat, sehingga itu tidak akan menjadi kejutan baginya.

Ia kemudian membuat kesimpulan lagi bahwa hari eksekusi bukanlah hari Kamis, karena hari Jumat telah dieliminasi dan apabila sampai hari Rabu ia belum juga digantung, satu-satunya hari yang tersisa adalah hari Kamis, sehingga itu tidak akan menjadi kejutan baginya. Dengan alasan yang sama dia menyimpulkan bahwa hari eksekusi bukan juga hari Rabu, Selasa, ataupun Senin. Kemudian ia menjadi senang dan membuat kesimpulan akhir bahwa ia tidak akan digantung.

Pada pekan selanjutnya, eksekutor datang pada hari Rabu siang ke ruang tahanan dan membuat tahanan itu terkejut.

Proses pemikiran tahanan tersebut dipetakan dalam diagram berikut:



Versi lain paradoks ini bercerita mengenai ujian, kuis pop, atau tentang singa di belakang pintu.

Karena pengaruh budaya dan bahasa, muncul berbagai interpretasi yang berbeda mengenai paradoks ini. Pada kasus yang ekstrim, tahanan yang paranoid merasa bahwa eksekutor lebih pasti akan datang pada hari Senin daripada hari Selasa, sehingga membuatnya merasa bahwa setiap hari bukanlah hari yang mengejutkan baginya. Telah muncul banyak perdebatan antara orang-orang yang menggunakan pendekatan logika yaitu yang lebih menggunakan matematika dengan yang menggunakan pendekatan epistemologi yaitu yang lebih menggunakan konsep pengetahuan, kepercayaan, dan memori.

## III. ANALISIS LOGIKA DAN INDUKSI PARADOKS HUKUM GANTUNG TAK TERDUGA

Pernyataan utama yang diucapkan oleh hakim adalah

**“Tahanan akan dihukum gantung pada suatu siang antara hari Senin sampai Jumat pekan yang akan datang dan akan menjadi kejutan baginya.”**

Apabila pernyataan di atas dilambangkan dengan P dan ditulis secara matematis, menjadi:

$$P = A \wedge B$$

dengan A adalah pernyataan:

**“Tahanan akan dihukum gantung pada suatu siang antara hari Senin sampai Jumat pekan yang akan datang.”**

dan B adalah pernyataan:

**“Hari eksekusi akan menjadi kejutan baginya.”**

Sedangkan pemikiran dari tahanan yaitu apabila ia belum juga digantung pada hari Kamis, satu-satunya hari yang tersisa adalah hari Jumat, sehingga itu tidak akan menjadi kejutan baginya. Pemikiran ini dapat dituliskan menjadi pernyataan:

**“Jika hari eksekusi adalah hari Jumat, maka ia tidak akan terkejut.”**

Selanjutnya pernyataan ini dilambangkan dengan Q. Apabila pernyataan ini ditulis secara matematis akan menjadi:

$$Q = C \rightarrow \sim B$$

dengan C adalah pernyataan:

**“Hari eksekusi adalah hari Jumat.”**

dan B sesuai dengan di atas adalah pernyataan:

**“Hari eksekusi akan menjadi kejutan baginya.”**

Dari pernyataan-pernyataan di atas kita dapat membentuk suatu argumen sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} C \rightarrow \sim B \\ \underline{B} \\ \therefore \end{array}$$

Dengan menggunakan sifat modus Tollens yang berbunyi:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}$$

kita dapat menarik kesimpulan dari argumen di atas. Sehingga diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} C \rightarrow \sim B \\ \underline{B} \\ \therefore \sim C \end{array}$$

Apabila dijabarkan, argumen di atas akan berbunyi

**“Jika hari eksekusi adalah hari Jumat, maka ia tidak akan terkejut(Q). Hari eksekusi menjadi kejutan baginya. Karena itu hari eksekusi bukanlah hari Jumat.”**

Dari sini dapat kita ketahui bahwa pemikiran dari tahanan tersebut atau pernyataan Q bernilai benar.

Selanjutnya karena hari eksekusi bukanlah hari Jumat, hari Jumat dihapuskan dari daftar hari eksekusi, sehingga tinggal tersisa hari Senin, Selasa, Rabu, dan Kamis.

Kemudian tahanan membuat pemikiran baru. Karena hari Jumat telah dieliminasi dan apabila sampai hari Rabu ia belum juga digantung, satu-satunya hari yang tersisa adalah hari Kamis, sehingga itu tidak akan menjadi kejutan baginya. Pemikiran ini dapat dituliskan menjadi pernyataan:

**“Jika hari eksekusi adalah hari Kamis, maka ia tidak akan terkejut.”**

Selanjutnya pernyataan ini dilambangkan dengan R. Apabila pernyataan ini ditulis secara matematis akan menjadi:

$$R = D \rightarrow \sim B$$

dengan D adalah pernyataan:

**“Hari eksekusi adalah hari Kamis.”**

dan B sesuai dengan di atas adalah pernyataan:

**“Hari eksekusi akan menjadi kejutan baginya.”**

Sama seperti sebelumnya, kita dapat membentuk suatu argumen yang menggunakan sifat modus Tollens seperti di atas.

$$\begin{array}{l} D \rightarrow \sim B \\ \underline{B} \\ \therefore \sim D \end{array}$$

Apabila dijabarkan, argumen di atas akan berbunyi

**“Jika hari eksekusi adalah hari Kamis, maka ia tidak akan terkejut(R). Hari eksekusi menjadi kejutan baginya. Karena itu hari eksekusi bukanlah hari Kamis.”**

Dari sini dapat kita ketahui bahwa pemikiran dari tahanan tersebut atau pernyataan R juga bernilai benar.

Jika pernyataan

**“Hari eksekusi adalah hari Rabu.”**

dilambangkan dengan E,

**“Hari eksekusi adalah hari Selasa.”**

dilambangkan dengan F,

**“Hari eksekusi adalah hari Senin.”**

dilambangkan dengan G,

maka dapat dituliskan argumen seperti di atas yaitu

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow \sim B & F \rightarrow \sim B & G \rightarrow \sim B \\ \underline{B} & \underline{B} & \underline{B} \\ \therefore \sim E & \therefore \sim F & \therefore \sim G \end{array}$$

Kemudian dapat diambil kesimpulan

**“Hari eksekusi bukanlah hari Rabu.”,**

**“Hari eksekusi bukanlah hari Selasa.”,**

**“Hari eksekusi bukanlah hari Senin.”.**

Karena hari eksekusi bukanlah hari Senin, Selasa, Rabu, Kamis, maupun Jumat, maka dapat ditarik kesimpulan:

**“Tahanan tidak akan dihukum gantung.”**

Sehingga pemikiran dari tahanan tersebut bernilai benar. Selanjutnya pernyataan tersebut dilambangkan

dengan T.

Jika dilihat lebih lanjut, pernyataan T ini bernegasi dengan pernyataan A yang berbunyi:

**“Tahanan akan dihukum gantung pada suatu siang antara hari Senin sampai Jumat pekan yang akan datang.”**

Apabila konjungsi P dinyatakan dalam tabel kebenaran, dapat dituliskan sebagai berikut:

A	B	$P = A \wedge B$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Karena pernyataan T bernegasi dengan pernyataan A, maka implikasi P dapat dituliskan:

$$P = T \wedge B$$

atau

$$P = \sim A \wedge B$$

Jika dilihat dari tabel kebenaran:

A	B	$P = A \wedge B$
S	B	S

maka konjungsi P bernilai salah. Dengan kata lain pemikiran tahanan bertentangan dengan pernyataan awal hakim.

Selain itu masih ada pernyataan:

**“Pada pekan selanjutnya, eksekutor datang pada hari Rabu siang ke ruang tahanan dan membuat tahanan itu terkejut.”**

Pernyataan ini dapat dilambangkan dengan U dan kemudian dituliskan dengan konjungsi berikut:

$$U = H \wedge B$$

dengan H adalah pernyataan

**“Pada pekan selanjutnya, eksekutor datang pada hari Rabu siang ke ruang tahanan.”**

dan B adalah pernyataan

**“Hari eksekusi akan menjadi kejutan baginya.”**

Pernyataan H bernegasi dengan pernyataan T. Akibatnya konjungsi U menjadi bernilai salah apabila pernyataan H bernilai benar. Sehingga pemikiran tahanan bertentangan dengan kenyataan yang terjadi.

#### IV. ANALISIS LAIN MENGENAI PARADOKS HUKUM GANTUNG TAK TERDUGA

Analisis mengenai paradoks hukum gantung tak terduga ini telah dilakukan oleh beberapa orang. Salah satunya melalui pendekatan logika.

Formulasi kata-kata hakim dalam logika formal menjadi tidak jelas dengan adanya kata “terkejut”. Kata-kata hakim dapat dirangkum sebagai berikut:

“Tahanan akan digantung pada pekan depan dan hari pastinya tidak dapat diterka dengan tepat (A).”

Setelah diberikan pengumuman ini tawanan dapat menerka bahwa hari eksekusi tidak akan terjadi pada hari terakhir yaitu hari Jumat. Dalam urutan untuk melangkah ke tahap argumen selanjutnya, yang mengeliminasi hari Jumat, tawanan harus menerima bahwa hari eksekusi tidak akan terjadi pada hari Jumat akan mengimplikasi bahwa eksekusi hari Jumat tidak akan membuatnya terkejut. Tetapi semenjak arti dari “terkejut” telah dibatasi agar tidak menjadi terkaan dari asumsi bahwa hari eksekusi akan terjadi pada pekan itu dan bukan tidak dideduksi dari pernyataan (A), maka argumen akan diblokir.

Formulasi pengumuman hakim dapat dirumuskan lebih baik menjadi:

“Tawanan akan dihukum gantung pekan depan dan hari tepatnya tidak dapat diterka lebih dahulu dengan menggunakan pernyataan ini sebagai aksioma.”

Beberapa penulis telah mengklaim bahwa *self-referential nature* atau sifat pengulangan terhadap dirinya sendirilah yang merupakan sumber dari sifat paradoks pernyataan di atas. Matematikawan Fitch telah menunjukkan bahwa pernyataan ini masih dapat diekspresikan dalam bentuk logika formal. Dengan menggunakan kesamaan bentuk dari paradoks yang memperpendek panjang pekan menjadi dua hari, beliau membuktikan bahwa meskipun sifat *self-reference* tidak dapat diterima dalam semua keadaan, namun dalam kasus ini kalimat bersifat *self-contradictory*.

Paradoks hukum gantung tak terduga atau *unexpected hanging paradox* ini mirip dengan paradoks-paradoks lainnya. Seperti misalnya paradoks yang paling tua dan paling mendasar yaitu paradoks kebohongan.

Saul Kripke, seorang filsuf dan ahli logika, berpendapat bahwa paradoks kebohongan memiliki makna sebuah preposisi, namun kalimat tersebut tidak bernilai salah maupun benar, dalam kata lain tidak mempunyai nilai kebenaran.

Secara garis besar, solusi untuk paradoks adalah diperlukannya pembaharuan logika klasik, logika formal dimana sebuah preposisi hanyalah memiliki dua kemungkinan nilai, yaitu benar atau salah. Pernyataan Saul Kripke tentang terdapatnya tiga kemungkinan nilai kebenaran suatu kalimat, yaitu benar, salah, atau tidak keduanya.

#### V. KESIMPULAN

Paradoks hukum gantung tak terduga merupakan sebuah kontradiksi dimana sebuah pernyataan dapat memiliki nilai kebenaran ganda yaitu benar sekaligus salah atau dengan kata lain mengandung pernyataan yang menyatakan bahwa pernyataan ini memiliki nilai

kebenaran yang benar namun salah namun benar dan seterusnya. Tidak ada jawaban eksak yang menjadi kesimpulan akhir dalam menentukan nilai kebenaran dari paradoks hukum gantung tak terduga ini.

Berbagai pendekatan analitik telah dilakukan, baik melalui pendekatan logika yang menggunakan konsep matematika maupun melalui pendekatan epistemologi yang lebih menggunakan konsep pengetahuan, kepercayaan, dan memori. Namun pada akhirnya tidak ada satu nilai kebenaran yang disepakati benar atau salah untuk paradoks hukum gantung tak terduga ini.

## VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa, yang telah memberi kekuatan dan kesempatan sehingga makalah ini dapat penulis selesaikan. Juga kepada dosen pengajar yaitu Ibu Harlili serta Bapak Rinaldi Munir yang telah memberikan kuliah Struktur Diskrit selama satu semester ini, sehingga penulis memperoleh pengetahuan dan pengalaman untuk mengerjakan makalah ini.

## DAFTAR REFERENSI

- [1] <http://oxforddictionaries.com/definition/english/paradox> (18 Desember 2012, 10.00).
- [2] <http://kamusbahasaIndonesia.org/paradoks> (18 Desember 2012, 10.00).
- [3] T. Y. Chow, "The surprise examination or unexpected hanging paradox," *The American Mathematical Monthly* Jan 1998.
- [4] <http://brainden.com/paradoxes.htm> (18 Desember 2012, 12.15).
- [5] A. Baltag 2009 SURPRISE!?! An Answer to the Hangman, or How to Avoid Unexpected Exams!, Lecture presented at the Logic and Interactive Rationality Seminar in Groningen, 69 slides.
- [6] <http://plato.stanford.edu/entries/paradoxes-contemporary-logic/> (18 Desember 2012, 14.00).
- [7] <http://www.mathventures.com/mathematicool/paradoxes/SurpriseParadox.htm> (18 Desember 2012, 14.00).
- [8] Fitch, F., A Goedelized formulation of the prediction paradox, *Amer. Phil. Quart* 1 (1964), 161–164
- [9] Munir, Rinaldi. Diktat Kuliah IF2091 Struktur Diskrit. Edisi keempat. Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
- [10] <http://www.pkhope.com/wp-content/themes/mimbo2.2/images/nasserkhan1.jpg> (18 Desember 2012, 22.00).

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 18 Desember 2012



Evan Budianto - 13511041