Aplikasi Teori Graf Pada *Knight's Tour*

Adhika Aryantio - 13511061
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
adhika.aryantio@students.itb.ac.id

Knight's Tour adalah salah satu aplikasi dari teori graf yaitu sub toeri tentang siklus Hamilton. Kebanyakan orang tidak sadar akan adanya suatu yang menarik dibalik permainan catur, ini dikhususkan untuk bidak knight yang mempunyai jalan yang unik, tour knight yang melewati semua kotak papan hanya 1 kali setiap kotak disebut knght's tour. Hal ini menarik diangkat karena penulis ingin memberitahukan bahwa knight's tour dapat dilakukan di papan berukuran apa aja, dan terdapat pula jenis-jenis knight's tour yaitu open dan closed tour yang akan menjadi perbincangan menarik dalam makalah ini.

Keyword : knight's tour, Hamilton,open tour, closed tour

I. PENDAHULUAN

Banyak ilmu yang sudah ada di seluruh belahan dunia ini dan salah satu ibu dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah ilmu matematika. Ilmu matematika terdapat banyak cabang di dalamnya, dalam hal ini penulis mengambil salah satu cabang ilmu matematika yaitu Matematika Diskrit atau bisa disebut juga dengan Struktur Diskrit. Struktur Diskrit adalah cabang matematika yang menggali objek-objek diskrit. Di dalam ilmu Struktur Diskrit terdapat sub yaitu teori graf.

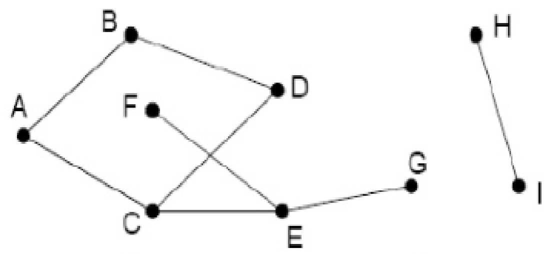
Teori graf adalah Teori yang digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Salah satu masalah yang menarik dalam graf terdapat dalam permainan catur adalah langkah *knight* yang mana *knight* tersebut dapat melewati seluruh kotak papan catur tepat satu kali. Persoalan yang diambil yaitu tentang *Knight's Tour*.

1.1. Pengenalan Graf

Secara sederhana graf didefinisikan sebagai kumpulan titik yang dihubungkan oleh garis secara matematis, graf adalah pasangan himpunan *(V,E)* dimana *V* adalah himpunan tak kosong yang memiliki elemen disebut simpul *(vertices)* dan *E* adalah kumpulan dari dua element subsets *V* yang disebut busur *(edges)* .

Simpul direpresentasikan dengan titik dan busur direpresentasikan dengan garis. Gambar 1.1 adalah contoh graph (V,E) dimana :

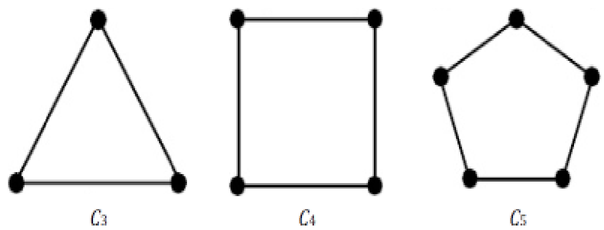
V = {A,B,C,D,E,F,G,H,I},dan
E = {{A,B},{A,C},{B,D},{C,D},{C,E},{E,F},{E,G},
{H,I}}.



Gambar 1.1. Contoh graf

Graf *Cycle* (C_n)

Graf *cycle* adalah graf C = (V,E) dengan bentuk
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, ... ,v_n\}$ dan
$E = \{\{v_1,v_2\}, \{v_2,v_3\}, \{v_3.v_4\}, ... ,\{v_n,v_1\}\}$,
Dimana n >= 3 dan $v_1,v_2,v_3,v_4,...$,v_n adalah simpul yang berbeda. Graf *cycle* disimbolkan dengan C_n dimana n adalah banyak simpul. Gambar 1.2 menunjukkan graf *cycle* C_n untuk n =3, 4, dan 5



Gambar 1.2. Graf *cycle* Cn untuk n=3,4,5

Graf Berarah dan Graf Tak-Berarah

Graf berarah *(directed graph/ digraph)* adalah graf yang memiliki orientasi arah pada setiap busur yang dimiliki. Sehingga, penulisan busur *e = (u,v)* untuk buser *e* yang menghubungkan simpul *u* dan *v* berbeda maknanya dengan penulisan busur *e = (v,u)* yang menghubungkan simpul *v* dan *u*. Setiap busur pada digraph biasa juga disebut *arc.*

Graf Tak-Berarah *(undirected graph)* adalah graf yang tidak memiliki orientasi arah pada setiap busur yang dimiliki. Penulisan busur tidak memperhatikan urutan.. Penulisan busur *e = (u,v)* dimana busur *e* adalah busur yang menghubungkan simpul *u* dan *v* sama saja dengan penulisan busur *e = (v,u).* Graf pada **Gambar 1.1** dan **Gambar** 1.2 merupakan graf tak-berarah.

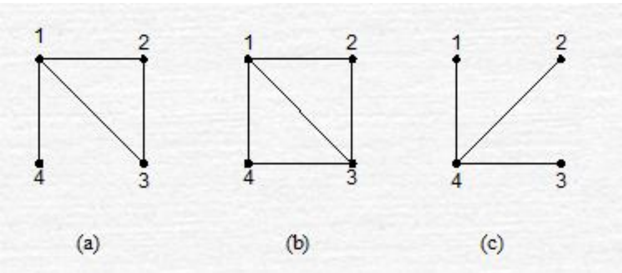
1.2. Lintasan Hamilton

Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap verteks di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan itu kembali ke verteks asal membentuk lintasan tertutup (Hamilton *cycle*) dan bila lintasan tersebut melalui tiap verteks di dalam graf tepat satu kali tetapi tidak kembali ke verteks awal disebut lintasan terbuka (Hamilton path). Graf yang merupakan lintasan tertutup dinamakan graf Hamilton, sedangkan lintasan terbuka disebut graf semi-Hamilton.

Teorema

1. Syarat cukup supaya graf sederhana G dengan n(>=3) buah simpul adalah graf Hamilton ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit n/2.
2. Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.
3. Didalam graf lengkap G dengan n buah simpul (n>=3), terdapat (n-1)!/2 buah sirkuit Hamilton.
4. Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul (n>=3 dan n ganjil), terdapat (n-1)/2 buah sirkuit Hamilton yang saling lepas. Jika n genap dan n>= 4, maka di dalam G terdapat (n-2)/2 buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

Contoh Gambar



Gambar 1.3.

(a) Graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal : 3,2,1,4)
(b) Graf yang memiliki lintasan Hamilton (misal : 1,2,3,4,1)
(c) Graf yang tidak memiliki lintasan maupun sirkuit Hamilton

II. *KNIGHT'S TOUR*

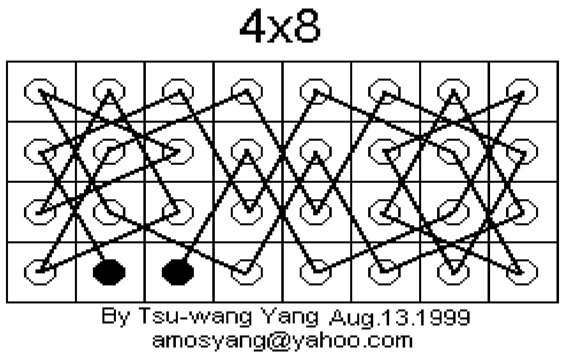
Permasalahan menarik tentang siklus Hamilton adalah *Knight's Tour* adalah langkah *knight* pada papan catur sehingga seluruh kotak terlewati tepat satu kali.Aturan langkah *knight* dalam permainan catur adalah sebagai berikut :

- Melangkah dua persegi ke arah horizontal kemudian satu persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah dua persegi ke arah vertikal kemudian satu persegi ke arah horizontal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah horizontal kemudian dua persegi ke arah vertikal, atau
- Melangkah satu persegi ke arah vertikal kemudian dua persegi ke arah horizontal.

Knight's Tour sama aplikasinya dengan aplikasi Siklus Hamilton. Di dalam *Knight's Tour* kita mengenal 2 hal yang mirip sekali dengan Sikuls Hamilton .

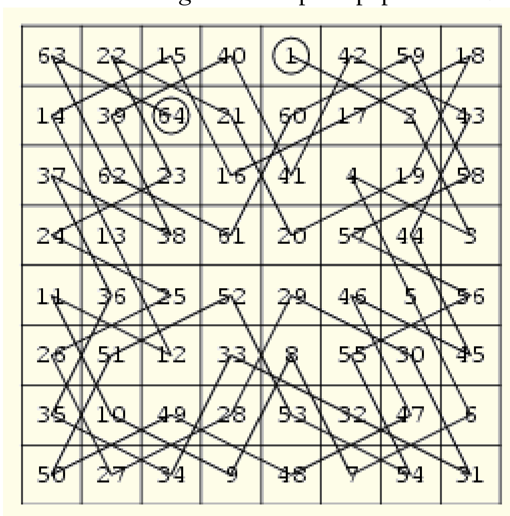
1. *Open Tour*
   Adalah *knight tour* yang melewati semua kotak di papan catur tepat 1 kali tetapi tidak kembali ke posisi awal *knight* start. Hal ini bisa direpresentasikan sebagai Hamilton path atau Lintasan Hamilton.
2. *Closed Tour*
   Adalah *knigh tourt* melewati semua kotak di papan catur tepat 1 kali dan tempat awal *knight* sama dengan tempat berakhirnya *knight*. Hal ini bisa direpresentasikan sebagai Hamilton *cycle* atau Siklus Hamilton.

Salah satu *Open Knight's Tour* pada papan catur :



Gambar 2.1. *Open Tour* pada papan 4x8

Salah satu *Closed Knight's Tour* pada papan catur :



Gambar 2.2. *Closed Tour* pada papan 8x8

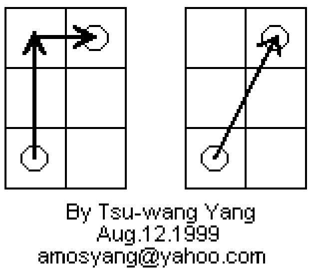
Diatas merupakan contoh dari *Open* dan *Closed Tour* pada papan 4x8 dan papan 8x8. Terlihat titik awal dan titik akhir pada kedua gambar sangatlah berbeda. Tentunya akan ada banyak pertanyaan lagi yaitu Bagaimana dengan *knight's tour* pada papan-papan yang berukuran lain ?

Apakah terdapat *knight's tour* atau tidak ?

2.1. *Knight's Tour* pada papan m x n
Pada penjelasan di atas telah di terangkan apa itu *closed* dan *open tour*.
Dalam beberapa pembuktian di dapatkan bahwa data sebagai berikut :

1. Terdapat *Open Tour* pada :
   3 x 4
   3 x n untuk n >= 7
   m x n untuk m >=4, n>=5
2. Tidak terdapat *Open tour* pada :
   1 x n untuk semua n
   2 x n untuk semua n
   3 x 3
   3 x 5
   3 x 6
   4 x 4
3. Terdapat *Closed Tour* pada :
   3 x n untuk n >= 10, genap
   m x n untuk m >= 5; n>= 6, genap
4. Tidak terdapat *Closed Tour* pada :
   1 x n untuk setiap n
   2 x n untuk setiap n
   3 x 6
   3 x 8
   4 x n untuk semua n
   m x n untuk m,n keduanya ganjil

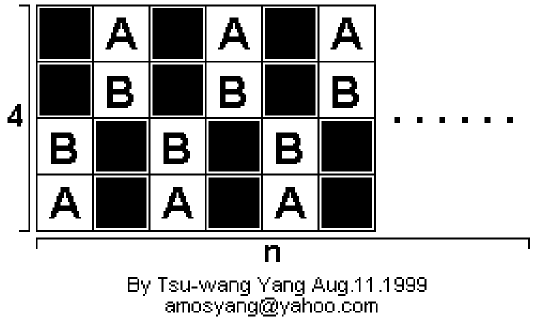
2.1.1. Pembuktian dengan pendekatan graf dan induksi matematik
Pertama : pada kasus 1 x n dan 2 x n sudah di pastikan tidak dapat membentuk *closed tour* dikarenakan jalan *knight* itu sendiri tidak bisa bervariasi di papan tersebut



Gambar 2.3. Papan 2 x 3 no *closed tour*

Kedua : m x n yang keduanya adalah angka ganjil
Lihat warna kotak dari sebuah papan. Setiap *knight* jalan, *knight* berjalan ke kotak yang memiliki warna yang berbeda. Dalam *closed tour*, jalan terakhir adalah kembali ke posisis kotak pertama. Karena warna dari kotak yang *knight* pijak berubah setiap *knight* jalan. Itu pasti berjalan pada angka genap berkali-kali. Tetapi karena m dan n keduanya ganjil, total kotak ,mn, adalah ganjil sehingga *knight* harus jalan pada angka ganjil berkali-kali. Itu tidak memungkinkan untuk *knight* berjalan pada angka genap dan angka ganjil terus menerus

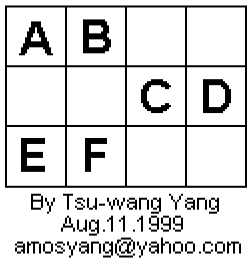
Ketiga : papan 4 x n
Lihat gambar berikut :



Gambar 2.4. Papan 4 x n

Pada papan diatas dapat dilihat bahwa bila kita start dari posisi manapun dan berjalan ke arah posisi yang berbeda tanda suatu saat pasti akan menginjak kotak yang telah dilewati dengan begitu maka tidak mungkin terjadi siklus Hamilton disana.

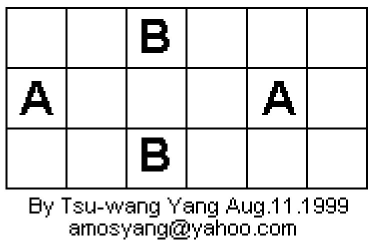
Keempat : Papan 3 x 4
Lihat gambar berikut :



Gambar 2.5. Papan 3 x 4

Pada papan diatas jalur yang bisa dilewati adalah jalur yang mempunyai label huruf saja sehingga tidak mungkin ada lintasan Hamilton di dalamnya.

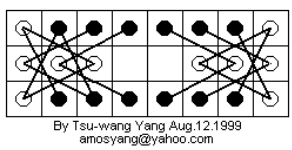
Kelima : Papan 3 x 6
Lihat gambar berikut :

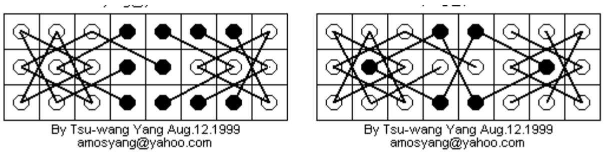


Gambar 2.6. Papan 3 x 6

Pada gambar diatas tidak mungkin terdapat lintasan Hamilton yang terdapat hanya *loop* dari A ke B saja .

Keenam : Papan 3 x 8
Lihat gambar berikut :

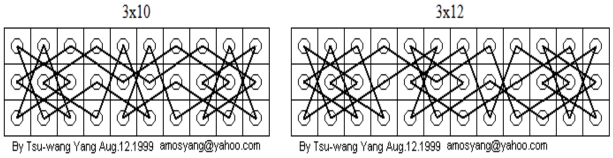




Gambar 2.7. Papan 3 x 8

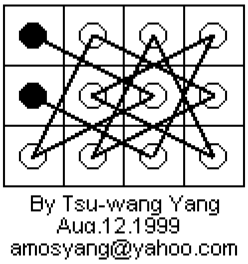
Kita lihat dari gambar diatas adalah segala posibility *knight tour* yang dapat dilakukana di papan 3 x 8 akan demikian masih terdapat kotak yang dilalui 2 x yaitu yang titik lebih tebal oleh karena itu siklus Hamilton tidak bisa dilakuka disini.

Sekarang kita lihat semua kemungkinan untuk *closed tour* pada m x n
Lihat gambar berikut :



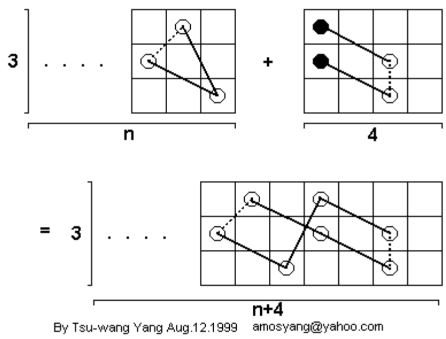
Gambar 2.8. papan 3 x 10 dan 3 x 12

Dan lihat gambar ini :

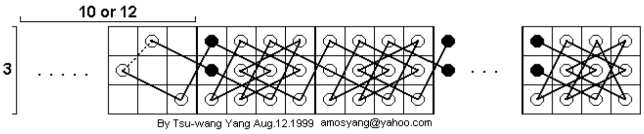


Gambar 2.9. papan 3 x 4 *open tour*

Papan ini dapat "ditempelkan" ke 3 x n *closed tour* untuk membuat 3 x (n+4) *closed tour*. Cara ini benar-benar menghasilkan *closed tour*. Sekarang mari kita buktikan :
Pertimbangkan langkah dimana *knight* melangkah ke pojok dari 3 x n selama *closed tour*nya. Jika *knight* tersebut sebagai gantinya meloncat ke papan 3 x 4, melompat sekitar. Sebentar dan kembali lagi ke 3 x n board dan melanjutkan jalannya.Akan menghasilkan siklus Hamilton jadi disimpulkan ada sebuah 3 x (n + 4) *closed tour*.
Seperti ini gambarnya :

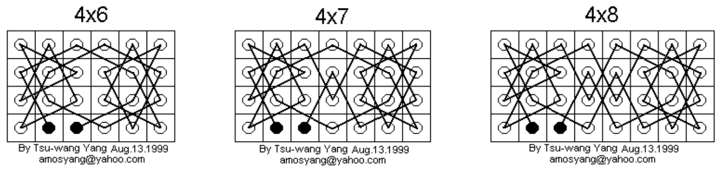


Gambar 2.10. Cara pembuktian 3 x (n+4) *closed tour*
Sekarang asumsikan 3 x n terdapat *closed tour* dan 3 x (n+4) juga *closed tour* dan dapat dibuat seperti diatas bahwa 3 x 10 dan 3 x 12 *closed tour* ada. Seperti yang diberitahu ada *closed tour* 3 x n untuk n >= 10 dan genap. *Tour* tersebut dapat di buat dengan menempelkan 3 x 4 *open tour* dengan 3 x 10 atau 3 x 12 *closed tour* . Lihat gambar :



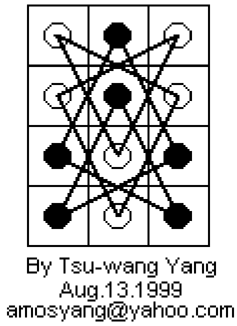
Gambar 2.11. Pembuktian teori di atas

Lihat *open tour*s berikut :



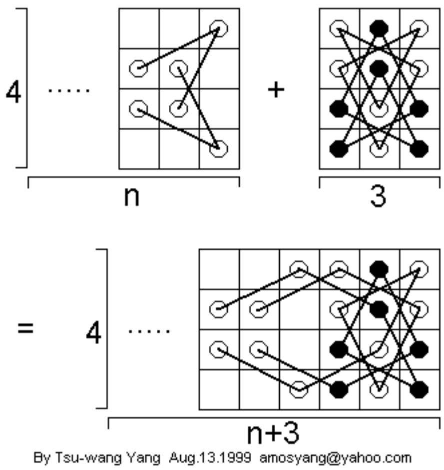
Gambar 2.12. *open tour* 4 x 6, 4 x 7, 4 x8

Sekarang lihat gambar berikut :



Gambar 2.13. 2 *closed tour* papan 3 x 4

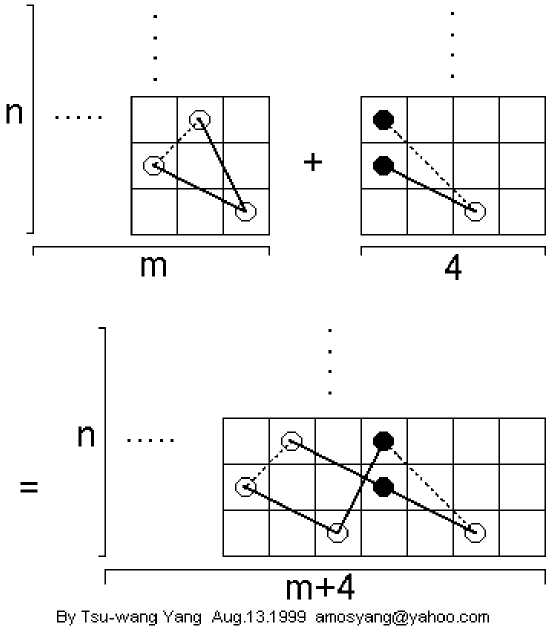
Papan ini dapat ditambahkan ke apapun 4 x n *open tour* untuk membuat 4 x (n+3) *open tour*, dan 2 kotak terkahir menghasilkan *tour* yang sama dengan 4 x n *tour*. Seperti ini gambarnya :



Gambar 2.14. papan 4 x n + papan 4 x (n+3)

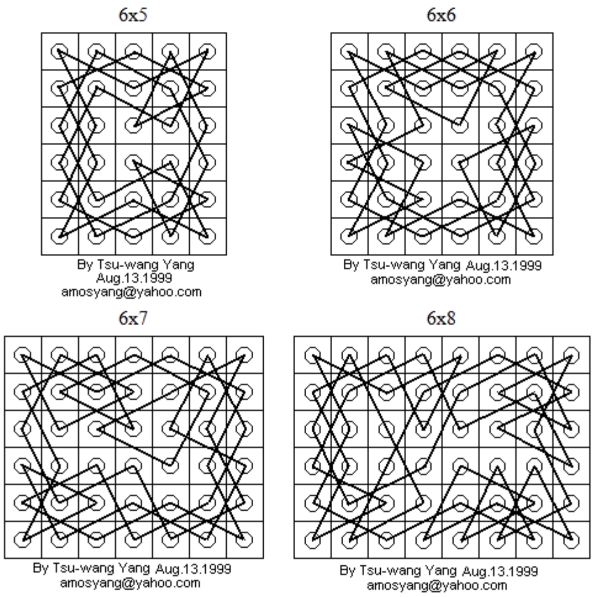
Di diagram diatas diasumsikan bahwa 2 kotak terakhir dari 4 x n *open tour* tidak berada di 3 kolom terkanan. Bagaimanapun juga 4 x 6, 4 x 7 dan 4 x 8 *open tour* yang terdapat pada Gambar 2.12 dilakukan dengan cara ini. Dengan menginduksi *open tour* 4 x n yang ada, n >= 6, dengan 2 kotak terakhir dekat kiri bawah seperti contoh do Gambar 2.14.

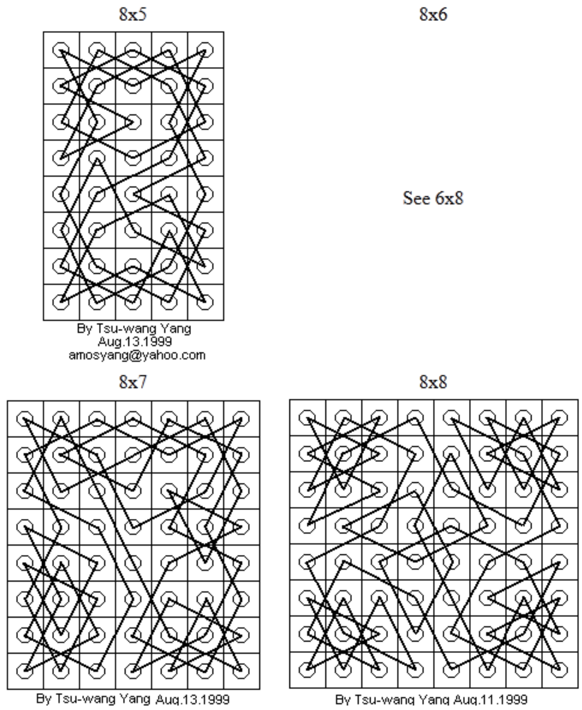
4 x n *open tour* dapat di tambahkan ke m x n *closed tour* untuk memdapatkan sebuah (4+m) x n *closed tour* seperti ini :



Gambar 2.15. papan 4 x n + m x n *closed tour*

Sekarang menuju kesimpulan akhir.
Lihat gambar berikut:





Gambar 2.16. Berbagai *closed tour*

Sekarang dapat mendapatkan argumen baru yaitu :

1. Sebuah 6 x n *closed tour* ada untuk n >= 5
2. Sebuah m x n *closed tour* ada untuk m = 6 + 4k , k =0,1,2,...; n >= 5
3. Sebuah 8 x 5 *closed tour* ada untuk n >=5
4. Ada m x n *closed tour* untuk m >= 6,genap ; n>=5.

III. KESIMPULAN

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika dikrit atau struktur diskrit yang mempunya banyak persoalan yang cukup menarik didalamnya. Salah satu yang menarik adalah tentang *knight's tour* ini dengan melambangkan kotak sebagai titik-titik yang terdapat di siklus Hamilton dan jalan *knight* adalah sebuag garis yang menghubungkan antar titik maka akan dapat disimpulkan apakah jalan *knight* itu merupakan siklus Hamilton atau lintasan Hamilton. Dengan menggunakan induksi matematika sedikit juga dapat menentukan teori-teori yang dapat digunakan mendapatkan siklus Hamilton atau dengan kata lain *closed tour* yang baru di setiap ukuran papan .

IV. ACKNOWLEDGMENT

Ucapan terima kasih saya ucapkan kepada Pak Rinaldi Munir atas segala bimbingannya dalam diktat untuk mengerjakan makalah ini. Terima kasih turut diberikan pula untuk referansi-referensi yang saya dapat sehingga saya dapat menyelesaikan makalah ini. Serta untuk teman-teman yang selalu mendukung dan memberi pencerahan pada tema yang diangkat.

REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF 2091 Matematika Diskrit*, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2008
Tanggal Akses : 17 Desember 2012

[2] Wijaya, Arya Yudhi ,Pengertian-Graf
www.scribd.com/doc/79785736/Pengertian-graf
Tanggal Akses : 17 Desember 2012

[3] Gaebler, Rob , *Knight's Tour*s
http://gaebler.us/share/*Knight_tour*.html
Tanggal Akses : 18 Desember 2012

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 18 Desember 2012

Adhika Aryantio - 13511061