

# Pembuktian Strategi Game *Dots and Boxes* dengan Teori Graf

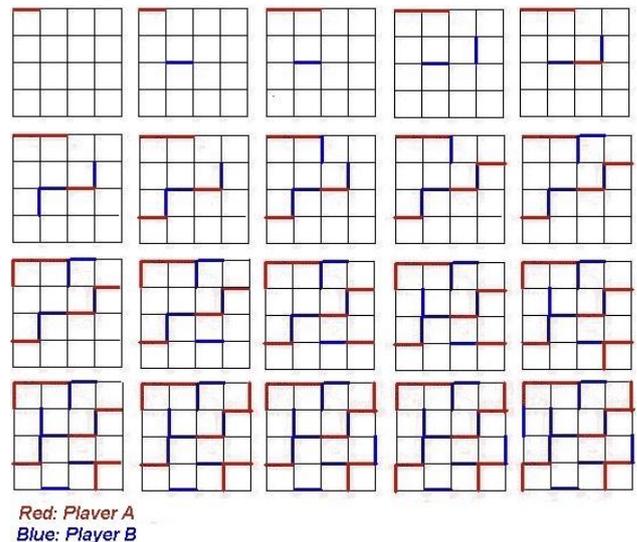
Dinah Kamilah Ulfa (13511087)  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
dinulfa@itb.ac.id

**Abstract**—Game *Dots and Boxes* adalah game yang dimainkan oleh dua pemain atau lebih, dimana para pemain menarik garis antara titik secara bergiliran dan mendapat poin jika garis yang ditarik membentuk satu persegi. Makalah ini akan membahas tentang salah satu strategi matematika dibalik game ini yang bernama *Long Chain Rule* serta pembuktiannya dengan teori graf.

**Index Terms**— *Dots and Boxes*, *Long Chain Rule*, pembuktian, teori graf, strategi.

## I. PENDAHULUAN

Permainan *Dots and Boxes* adalah game kombinatorial yang populer di kalangan anak-anak dan orang dewasa di seluruh dunia. Permainan ini pertama kali dipublikasikan oleh Édouard Lucas, seorang matematikawan Prancis, pada tahun 1889. Awalnya permainan ini dimainkan menggunakan pensil dan kertas (walaupun sekarang juga bisa dimainkan lewat media lain seperti komputer). Permainan ini mudah dimainkan karena memiliki aturan yang sangat sederhana. Dalam permainan *Dots and Boxes*, para pemain menggambar persegi dari titik dan bergiliran menggambar garis horizontal atau vertikal antara pasangan titik yang berdekatan membentuk kotak. Bila garis yang ditarik melengkapi garis lain sehingga membentuk kotak, maka pemain tersebut mendapat poin dan dapat melakukan satu langkah lagi. Permainan terus berlanjut sampai semua titik terhubung. Setelah semua baris telah diisi, pemain yang meraih poin tertinggi, yaitu pemain yang paling banyak membentuk kotak adalah pemenangnya. Pemain tidak diwajibkan untuk melengkapi kotak walaupun mereka memiliki kesempatan.



Gambar 1: Ilustrasi permainan *Dots and Boxes* yang dimainkan oleh dua pemain.

*Dots and Boxes* kaya akan teori matematika dalam strategi permainannya. Strategi berdasar teori matematika dalam permainan ini diantaranya adalah aturan rantai panjang, atau biasa juga disebut *long chain rules*, yang sangat berguna untuk memenangkan permainan. Makalah ini akan membahas teori matematika tersebut serta pembuktiannya dengan teori graf.

## II. DASAR TEORI

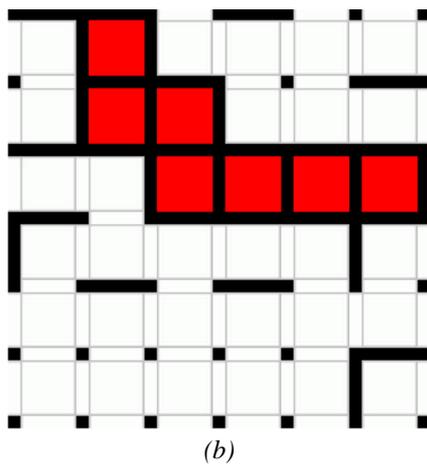
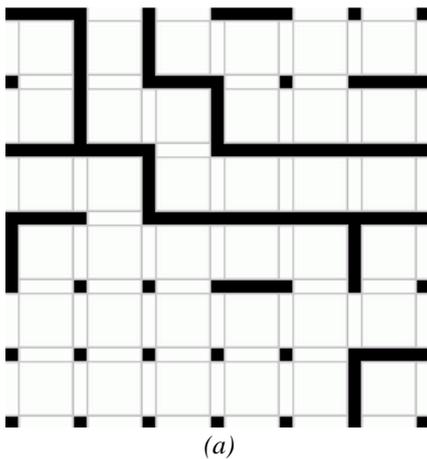
### A. Istilah

Terdapat beberapa istilah untuk menggambarkan kondisi dalam permainan *Dots and Boxes*. Istilah tersebut antara lain adalah *chain*, *cycle*, *doublecross*, *normal game*, *control*, *chain fight*, dan *turn*.

#### 1. Chain

Rangkaian dari tiga kotak atau lebih yang terhubung disebut rantai. Jika hanya salah satu ujung rantai awalnya yang tertutup, atau tidak sama sekali, rantai tersebut setengah terbuka. Jika kedua ujungnya tertutup, maka itu adalah sebuah rantai tertutup. Langkah salah satu pemain dalam rantai

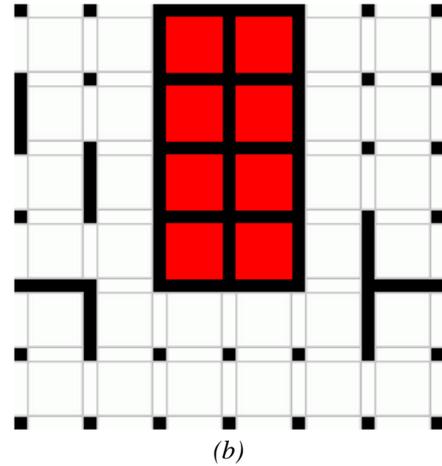
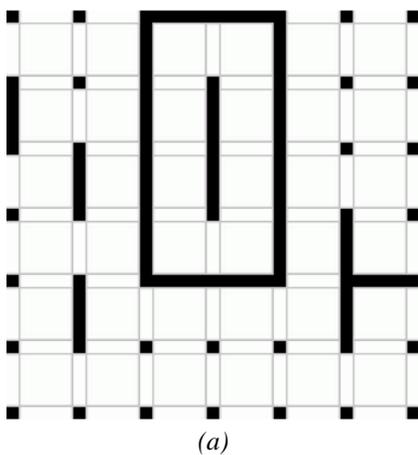
akan memungkinkan lawannya untuk mengambil semua kotak dalam rantai tersebut.



Gambar 2: (a) Chain yang masih terbuka  
(b) Chain yang sudah tertutup

## 2. Cycle

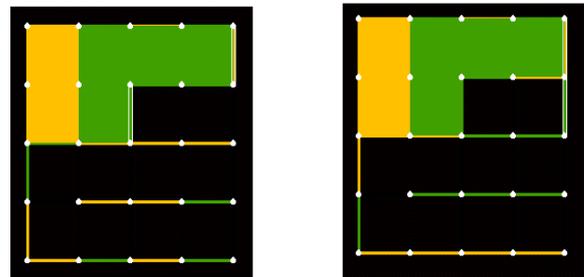
*Cycle* adalah lingkaran tertutup tertutup yang terdiri dari empat kotak atau lebih. *Cycle* tidak sama dengan *chain* karena walaupun ujung-ujung *cycle* tertutup, *cycle* belum tentu dapat diambil kotaknya oleh pemain, berbeda dengan rantai.



Gambar 3: Cycle yang (a) terbuka  
(b) terisi

## 3. Doublecross

*Doublecross* adalah teknik dimana pemain meninggalkan dua kotak terakhir dalam rantai untuk diisi lawan. Teknik ini biasanya digunakan untuk memaksa lawan membuka rantai yang lebih panjang



Gambar 3: Pemain mengambil kotak di rantai dan menyisakan dua kotak terakhir

## 4. Normal Game

*Normal game* adalah keadaan dimana para pemain mendapat giliran tanpa berpindah ke dalam *chain* atau *cycle* sampai yang tersisa tinggal *chain* atau *cycle*. Tahap ini disebut *final phase*. *Normal game* berakhir saat pemain yang memegang kontrol mengambil semua kotak di rantai terakhir.

## 5. Control

*Control* berarti menjaga inisiatif dalam *final phase* *Dots and Boxes*. Pemain yang memegang kontrol dapat memaksa lawan terus membuka rantai dan *cycle* dengan cara meninggalkan satu *doublecross* di tiap rantai atau dua *doublecross* di tiap *cycle*.

## 6. Turn

*Turn* atau giliran adalah satu set lengkap langkah yang dilakukan satu pemain secara berturut-turut.

## 7. Chain Fight

*Chain fight* adalah pertarungan antara pemain untuk membuat jumlah rantai sesuai dengan *long chain rule* yang menguntungkan mereka.

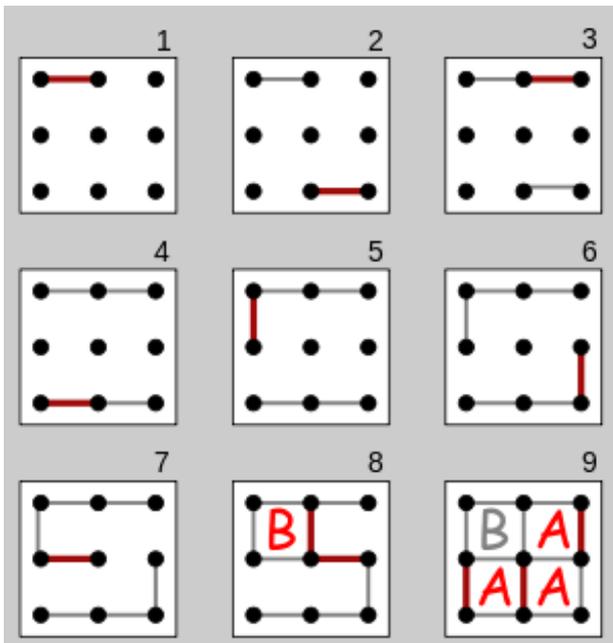
### B. Strategi

#### 1. Long Chain Rule

*Long chain rule* atau aturan rantai panjang pertama kali ditemukan oleh Elwyn Berlekamp, seorang matematikawan Amerika. Aturan ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

Misalkan media yang digunakan untuk permainan memiliki  $m$  kolom dan  $n$  baris sehingga memiliki  $mn$  persegi. Aturan ini menyatakan bahwa bila  $m$  atau  $n$  bernilai ganjil, maka pemain pertama harus berusaha membuat rantai panjang berjumlah genap untuk memenangkan permainan, sedangkan bila  $m$  dan  $n$  keduanya bernilai genap, maka pemain pertama harus berusaha membuat rantai panjang berjumlah ganjil.

Aturan sebaliknya berlaku untuk pemain kedua, bila  $m$  atau  $n$  bernilai ganjil, maka pemain kedua harus berusaha membuat rantai panjang berjumlah ganjil untuk memenangkan permainan, sedangkan bila  $m$  dan  $n$  bernilai genap, maka pemain kedua harus berusaha membuat rantai panjang berjumlah genap.[2]



Gambar 4

Gambar 4 memberi gambaran saat aturan ini dipakai. Pada gambar di atas, kita melihat pemain pertama A dan pemain kedua B secara bergiliran menarik garis dalam kotak  $2 \times 2$ . Di tahap ketujuh, A mengorbankan satu kotak untuk B sehingga terbentuk satu buah rantai. Dengan begitu, saat B mengambil kotak tersebut, dia harus menambahkan satu garis lagi dalam rantai, sehingga A

bisa mengambil semua kotak dalam rantai tersebut dan memenangkan permainan.

### III. PEMBUKTIAN

Dalam permainan *Dots and Boxes*, pemain yang menang biasanya adalah pemain yang berhasil memaksa lawannya masuk ke dalam rantai lebih dulu. Pemain yang menang juga yang biasanya mendapat giliran terakhir, karena dia yang mengambil semua kotak dan mengakhiri permainan. Karena itu, dapat disimpulkan bahwa pemain yang mendapat giliran terakhir adalah pemain yang berhasil memaksa lawannya masuk ke dalam rantai lebih dulu.

Pemain yang mendapat giliran pertama dalam permainan ini akan selalu mendapat giliran ganjil, sedangkan pemain yang mendapat giliran kedua akan selalu mendapat giliran genap. Karena itu, dapat disimpulkan pula bahwa dalam *game* dimana pemain pertama yang berhasil memaksa lawannya masuk ke dalam rantai lebih dulu, jumlah total giliran pemain adalah ganjil, sedangkan bila pemain kedua yang berhasil memaksa lawannya masuk ke dalam rantai lebih dulu, jumlah total giliran pemain adalah genap.

Dalam *dots board*, selalu berlaku formula:

$$n + C = T$$

Dengan  $n$  adalah jumlah titik,  $C$  adalah jumlah *doublecross*, dan  $T$  adalah jumlah *turn*.

Pertama-tama, asumsikan bahwa titik berjumlah ganjil. Dengan begitu, dari rumus di atas kita dapat menarik kesimpulan bahwa jumlah *turn* hanya akan ganjil jika jumlah *doublecross* genap, karena ganjil + genap = ganjil, dan ganjil + ganjil = genap.

Pada fase final di *normal game*, pemain yang memegang kontrol selalu meninggalkan satu *doublecross* di setiap rantai, kecuali rantai terakhir, dan dua *doublecross* di setiap *cycle*. Karena itu, jumlah *doublecross* dapat dirumuskan sebagai

$$C = H - 1 + (2 * Y)$$

Dengan  $H$  adalah jumlah rantai dan  $Y$  adalah jumlah *cycle*.

Karena bilangan yang dikali 2 selalu menghasilkan bilangan genap, maka dapat disimpulkan bahwa jumlah *doublecross* hanya akan genap jika jumlah  $H - 1$  genap, atau jumlah  $H$  ganjil.

Bila digabungkan dengan rumus sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa bila jumlah titik ganjil, maka jumlah *turn* hanya akan ganjil bila jumlah rantai ganjil.

Dengan teknik yang sama, dapat disimpulkan pula bahwa bila jumlah titik ganjil, maka jumlah *turn* hanya akan genap jika jumlah rantai genap.

Formula *dots board* yang mendasari *long chain rule* dapat dibuktikan dengan Teori Graf. Dalam Teori Graf, kita mengenal rumus Euler untuk graf planar, yaitu:

$$n - e + f = 2$$

atau

$$f = e - n + 2$$

dengan  $n$  adalah jumlah titik,  $e$  adalah jumlah garis, dan  $f$  adalah jumlah daerah. Karena jumlah  $f$  juga mencakup daerah di luar graf, maka bila kita hanya ingin menghitung daerah di dalam graf ( $f - 1$ ), rumusnya menjadi

$$F = e - n + 2 - 1$$

atau

$$F = e - n + 1$$

$F$  melambangkan  $f - 1$  sebagai jumlah kotak.

Jika tidak ada *doublecross*, penarikan garis hanya akan membentuk kotak atau memberikan giliran ke pemain lainnya. Dari hal ini dapat dihasilkan rumus:

$$e = F + T - 1$$

Penambahan  $-1$  dilakukan karena penempatan garis pertama tidak dihitung.

Dari Teori Graf kita juga memiliki rumus:

$$e = F + n - 1$$

sehingga dari sini dapat disimpulkan bahwa  $n = T$ . Persamaan ini benar jika tidak ada *doublecross* dalam permainan.

Bila *doublecross* dimasukkan dalam rumus, maka garis yang mengisi *doublecross* tidak dihitung, sehingga dua kotak yang terdapat dalam *doublecross* juga tidak dihitung. Hal ini membuat rumusnya menjadi:

$$e - C = F - 2C + T - 1$$

disederhanakan menjadi:

$$e = F - C + T - 1$$

Dari rumus ini kita dapat melihat bahwa  $-C + T = n$  atau  $n + C = T$ , yang merupakan formula pada *dots board*. Hal ini membuktikan kebenaran formula tersebut serta kebenaran *long chain rule* yang didasarkan pada formula itu.

## V. KESIMPULAN

*Long chain rule* yang menyatakan jumlah rantai yang harus dibuat pemain untuk memenangkan permainan *Dots and Boxes* didasarkan pada formula *dots board* yang menyatakan bahwa jumlah *turn* adalah total dari jumlah titik dan jumlah *doublecross*. Formula ini dapat dibuktikan kebenarannya dengan membandingkan rumus jumlah penarikan garis dengan rumus graf planar Euler.

## REFERENSI

- [1] Ilan Vardi. "Dots and Boxes Glossary." Senin, 17 Desember 2012. <<http://www.oocities.org/cf/ilanpi/glossary.html>>
- [2] Ilan Vardi. "Mathematic Theory of Dots." Senin, 17 Desember 2012. <<http://www.oocities.org/cf/ilanpi/math.html>>
- [3] "Game dots & boxes" Senin, 17 Desember 2012. <<http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/dots&boxes.html>>
- [4] Rinaldi Munir. Diktat Kuliah IF2091 – Struktur Diskrit. Bandung: Program Studi Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung. 2008. h. VIII-31.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2012

ttd



Dinah Kamilah Ulfa  
13511087