Partisi Maksimum pada Poligon

Muhammad Nassirudin - 13511044
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
m.nassirudin@students.itb.ac.id

Abstrak*—Poligon (segibanyak) merupakan sebuah bangun datar yang dibentuk dari sejumlah titik. Titik-titik tersebut kemudian dihubungkan satu dengan yang lain sehingga terbentuklah suatu daerah/lintasan tertutup. Poligon tersebut juga dapat dibagi-bagi lagi menjadi daerah-daerah yang lebih kecil dengan menghubungkan setiap dua titik pada poligon dengan sebuah garis lurus. Pembuatan makalah ini didasarkan pada kasus tersebut. Penelitian akan dilakukan untuk menjawab pertanyaan berapa paling banyak pembagian daerah/partisi yang dapat diperoleh dengan cara membagi-bagi poligon seperti cara yang telah disebutkan di atas. Dalam penelitian ini, poligon dengan n buah titik akan dilambangkan dengan P_n sementara banyak pembagian daerah maksimumnya dilambangkan dengan notasi M_n. Banyaknya partisi/pembagian daerah maksimum akan disajikan sebagai suatu fungsi dari banyaknya titik, n, dari poligon. Metode dasar yang digunakan adalah mencacah (counting), pembuktian dengan induksi matematika, dan perhitungan kombinasi. Pada akhir dari penelitian ini, didapatkan hasil bahwa banyaknya daerah maksimum dapat diperoleh hanya dengan mengetahui banyaknya titik pada poligon. Selain itu, didapatkan juga suatu rumus dalam bentuk yang eksplisit yang dapat digunakan untuk menghitungnya.

***Kata Kunci*—Garis, Partisi Maksimum, Poligon, Rumus Eksplisit, Titik.**

I. PENDAHULUAN

Suatu hari, Pak Zeta membuat sebuah papan dengan 7 buah paku yang ditancapkan. Pak Zeta memberikan papan tersebut kepada adik dan adik melingkarkan karet pada setiap 3 paku pada papan tersebut sehingga papan tersebut terbagi-bagi menjadi daerah-daerah yang lebih kecil. Dari semua kemungkinan peletakan paku-paku, berapakah paling banyak daerah yang dapat diperoleh adik? Apakah syarat cukup dan syarat perlu untuk peletakan paku sehingga pembagian daerah maksimum didapat?

Sekiranya itulah gambaran persoalan yang dapat dijawab dengan hasil yang diperoleh dari penelitian ini. Paku-paku pada papan tersebut dapat dianggap sebagai titik-titik dari poligon P_7. Karet-karet yang dilingkarkan pada setiap 3 paku membuat setiap paku/titik pada papan terhubung oleh sebuah garis lurus. Segmen-segmen karet yang menumpuk pada sepasang paku/titik dianggap sebagai satu garis. Dengan demikian, persoalan menjadi mencari banyaknya partisi maksimum yang dapat diperoleh dari poligon P_7.

Pada makalah ini, penelitian tidak hanya dilakukan ketika banyaknya titik $n = 7$, tetapi juga untuk sebarang bilangan bulat positif n. Dengan demikian, permasalahan yang dapat diselesaikan dengan hasil dari penelitian ini lebih luas. Banyaknya partisi/pembagian daerah maksimum, M_n, dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi dari banyaknya titik, n, pada poligon. Selain itu, fungsi ini pada akhirnya dapat dinyatakan sebagai suatu rumus dalam bentuk eksplisit, yaitu hanya melibatkan variabel n. Hal ini sangat memudahkan perhitungan M_n—perhitungan cukup dilakukan sekali dan langsung didapatkan hasilnya.

Penentuan rumus M_n dilakukan dalam beberapa tahap. Pertama, akan diteliti untuk kasus-kasus trivia-mudah, yaitu ketika nilai $n = 3, 4$, dengan cara mencacah satu per satu. Tahap kedua adalah melihat apakah ada pola dalam perhitungannya yang mungkin akan memberikan petunjuk menuju hasil akhir. Dalam tahap ini, akan diambil $n = 5$ sebagai langkah awal. Tahap yang terakhir adalah melakukan perhitungan yang analog dengan kasus $n = 5$ namun kasus yang dibahas lebih umum, yaitu untuk sebarang nilai n. Selain itu, langkah-langkah induksi dan perhitungan kombinatorik juga akan dilakukan dalam beberapa identitas yang digunakan dalam perhitungan.

II. DASAR TEORI

A. Poligon

Poligon (dapat juga disebut sebagai segibanyak) merupakan suatu bangun datar (2D) yang memiliki banyak sisi. Yang manjadi ciri khas dari poligon adalah semua sisinya terhubung membentuk suatu lintasan tertutup. Dalam makalah ini, digunakan notasi P_n untuk menyatakan poligon P dengan n titik. Poligon yang sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari, misalnya, adalah segitiga (trigon/P_3), segiempat (tetragon/P_4), segilima (pentagon/P_5), dan segidelapan (oktagon/P_8). Perhatikan bahwa poligon hanya kita definisikan untuk $n \geq 3$.

Beberapa istilah dan sifat dari poligon yang akan sering digunakan dalam makalah ini adalah sebagai berikut.

1. *Poligon sederhana*, yaitu poligon yang tidak memiliki sisi-sisi yang bersilangan.
2. *Poligon kompleks*, yaitu poligon yang memiliki sisi-sisi yang bersilangan.
3. *Konveks*, yaitu poligon yang semua sudut dalamnya

kurang dari 180°.

4. *Konkaf*, yaitu poligon yang memiliki sudut dalam lebih dari 180°.

Sebagai kesepakatan, akan digunakan kaidah-kaidah berikut dalam meneliti poligon P_n pada makalah ini.

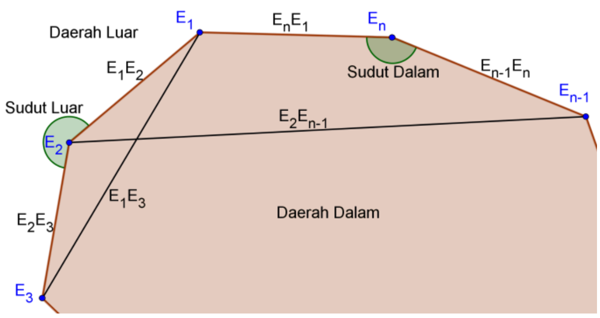
i. Pemberian nama setiap titik dilakukan dengan memilih satu titik sebagai titik awal dan diberi nama E_1. Dari E_1 dipilih titik yang terhubung dengannya dengan arah yang berlawanan dengan arah gerak jarum jam. Titik tersebut kemudian dinamakan E_2. Proses ini terus dilakukan hingga mencapai E_n. Didefinisikan $E_{n+1} = E_1$.

ii. Jika titik E_a dan E_{a+1} terhubung, sisi yang dibentuk dari kedua titik itu dilambangkan dengan E_aE_{a+1}. Hal yang sama juga berlaku untuk setiap garis (partisi) yang menghubungkan titik E_a dan E_b. Garis tersebut akan dilambangkan dengan E_aE_b. Dalam makalah ini, $E_aE_b = E_bE_a$.

iii. Tidak ada sudut dalam dari P_n yang bernilai 180°. Dengan kata lain, tidak ada 3 titik pada P_n yang terletak pada satu garis lurus (kolinear).

iv. Partisi/pembagian daerah yang dioperasikan terhadap poligon P_n dilakukan dengan cara menghubungkan setiap 2 titik pada P_n dengan sebuah garis lurus. Daerah yang dihitung hanya daerah dalam dari P_n.

Untuk mempermudah dalam memahami kesepakatan ini, pada gambar 2-1 diberikan parameter-parameter pada poligon P_n. Batas-batas/lintasan poligon diberikan oleh garis merah sementara garis-garis partisi diberikan oleh warna hitam.



Gambar 2-1 Parameter-parameter pada poligon P_n

B. Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam membuktikan suatu pernyataan. Biasanya pernyataan yang dibuktikan berhubungan dengan bilangan bulat positif. Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang baku dan berterima di kalangan penelitian ilmiah. Secara singkat, proses pembuktiannya dilakukan dalam beberapa langkah seperti berikut.

Misalkan $P(n)$ merupakan pernyataan yang ingin dibuktikan dengan n adalah suatu bilangan bulat. Jika ingin dibuktikan bahwa $P(n)$ juga berlaku/benar untuk semua bilangan bulat $n > n_0$,

- langkah 1, membuktikan bahwa $P(n_0)$ benar,
- langkah 2, dengan asumsi $P(k)$ benar akan dibuktikan bahwa $P(k+1)$ juga benar dengan $k \geq n_0$.

C. Kombinatorik

Kombinatorik merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika yang mempelajari struktur benda yang berhingga atau diskrit. Beberapa aturan dasar dalam kombinatorik adalah aturan penjumlahan (*rule of sum*) dan aturan perkalian (*rule of product*). Salah satu alat dari cabang ilmu ini yang digunakan dalam penelitian ini adalah perhitungan kombinasi. Kombinasi biasa dilambangkan dengan $C(n,r)$ atau $\binom{n}{r}$ dengan $r \leq n$ bilangan bulat nonnegatif. Per definisi, kombinasi $C(n,r)$ berarti banyak cara mengambil r objek dari n buah objek tanpa memerhatikan urutannya. Secara matematis, kombinasi dapat ditulis sebagai

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

dengan $n!$ menyatakan bilangan faktorial dari n dan kasus khusus $0! = 1$. Salah satu identitas pada operasi kombinasi yang digunakan dalam penelitian adalah

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

D. Deret Aritmatika

Deret Aritmatika merupakan suatu deret $\{a_k\}, k = 1,2, \ldots$ yang selisih dari dua suku yang berurutannya selalu konstan. Perhitungan suku ke-n dapat dilakukan dengan rumus

$$U_n = a + (n-1)b$$

sementara jumlah dari n suku pertamanya diberikan oleh

$$S_n = \frac{n \times (2a + (n-1)b)}{2}$$

dengan a merupakan bilangan *real* yang menjadi suku pertamanya dan b adalah konstanta yang merupakan selisih dari dua suku yang berurutan (beda).

III. PEMBUKTIAN BEBERAPA IDENTITAS

Pada pengerjaan makalah ini, dipakai setidaknya tiga identitas matematika dasar dalam perhitungannya. Pembuktian yang dilakukan pada identitas pertama akan memanfaatkan prinsip induksi matematika. Tentu saja dengan mencari terlebih dahulu rumusan hipotesisnya. Cara ini memang tidak alami, namun ini merupakan cara yang baku dan valid. Selain itu, agar tidak monoton, pada pembuktian identitas kedua dan ketiga akan dipakai pendekatan yang berbeda namun tetap sah. Metode yang dipakai sengaja dibedakan satu dengan yang lainnya agar terlihat perbedaan, kelebihan, kekurangan dan ciri khas dari masing-masing metode. Pada setiap pembuktian identitas, kita gunakan n dan k sebagai bilangan bulat positif.

A. Identitas Pertama

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

Untuk $n = 1,2,3$, pembuktiannya diberikan pada tabel 3-1 dengan cara mencacah biasa. Sekarang, akan dibuktikan dengan induksi pada n bahwa identitas tersebut benar untuk sebarang bilangan bulat positif n. Misalkan untuk $n = k$ benar bahwa $A_k = \frac{k(k+1)}{2}$, akan dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k + 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, bukti selesai dan pernyataan benar untuk semua bilangan bulat positif n. Sekilas memang cara ini sangat mudah, namun letak kesulitan sebetulnya terletak dari mana didapatkan rumusan hipotesis $\frac{n \times (n+1)}{2}$. Kadang seseorang dapat langsung menemukannya, kadang butuh usaha dan coba-coba. Sebagai perbandingan, metode yang dipakai pada pembuktian identitas kedua jauh lebih alami namun agak *tricky*.

Tabel 3-1 Pembuktian $n = 1,2,3$

n	A_n	$\frac{n \times (n+1)}{2}$
1	1	1
2	3	3
3	6	6

B. Identitas Kedua

$$B_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pada pembuktian identitas kedua ini akan digunakan pendekatan yang berbeda. Kita akan menggunakan pendekatan kombinatorik. Untuk itu, akan dibuktikan dua buah lemma berikut ini terlebih dahulu.

Lemma 1.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Bukti. Kita tahu bahwa $\binom{n}{k}$ dapat diinterpretasikan sebagai banyaknya cara mengambil k buah objek dari n buah objek. Selain itu, pengambilan k buah objek itu dapat juga dilakukan seperti berikut. Kita pisahkan satu buah objek sehingga sekarang tersisa $n-1$ objek. Jika kita inginkan objek yang dipisahkan tadi tidak termasuk objek yang dipilih, kita harus memilih k buah objek dari $n-1$ objek yang ada. Banyaknya cara untuk itu adalah $\binom{n-1}{k}$. Jika kita ingin objek yang dipisahkan itu harus menjadi objek yang terpilih, kita tinggal memilih $k-1$ objek lagi dari $n-1$ objek yang ada. Banyaknya cara untuk melakukannya adalah $\binom{n-1}{k-1}$. Dengan demikian, banyaknya cara memilih k buah objek adalah $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Dengan demikian, lemma kita telah terbukti.

Lemma 2.

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}.$$

Bukti. Kita akan memulai dengan memanfaatkan fakta bahwa $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$. Untuk $k = 0$, kita dapatkan

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$$

benar. Asumsikan pernyataan benar untuk $k = t$, maka untuk $k = t + 1$

$$\begin{aligned} &\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+t}{t} + \binom{n+t+1}{t+1} \\ &= \binom{n+t+1}{t} + \binom{n+t+1}{t+1} \\ &= \binom{n+t+2}{t+1} \end{aligned}$$

dengan memanfaatkan lemma 1. Berdasarkan prinsip induksi matematika, lemma 2 telah terbukti dengan sah.

Sekarang, kita siap membuktikan identitas kedua ini. Pertama kita akan nyatakan k^2 sebagai suatu hasil operasi dari kombinasi. Perhatikan bahwa $\binom{k}{3}$ memiliki koefisien k^3 pada penjabarannya (dan seperti itu pula untuk bilangan lebih dari 3), sehingga pastilah k^2 hanya dipengaruhi oleh $\binom{k}{2}$, $\binom{k}{1}$, dan sebuah konstanta. Kita tulis

$$k^2 = a\binom{k}{2} + b\binom{k}{1} + c.$$

Dengan menjabarkan kombinasi dan mengelompokkan suku-suku sejenis, dengan mudah kita dapatkan $a = 2$, $b = 1$, dan $c = 0$. Jadi,

$$k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}.$$

Dari sini, kita dapatkan

$$\begin{aligned} B_n &= 2\binom{1}{2} + \binom{1}{1} + 2\binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \cdots + 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1} \\ &= 2\left(\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\right) \\ &\qquad + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1}\right) \\ &= 2\left(0 + \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \cdots + \binom{n}{n-2}\right) \\ &\qquad + \left(\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right) \\ &= 2\binom{n+1}{n-2} + \binom{n+1}{n-1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= 2\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)(n)}{2!} \\ &= \frac{2(n+1)(n)(n-1) + 3(n+1)(n)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n)(2(n-1)+3)}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(n)(2n+1)}{6}.$$

Dengan demikian, identitas kedua telah kita buktikan. Meskipun cara yang dipakai tidak semudah cara yang dipakai pada pembuktian identitas pertama, cara kedua ini jauh lebih alami dan ilmiah—tidak perlu coba-coba. Perhatikan juga bahwa pada perhitungan ini kita mengambil $\binom{n}{k} = 0$ ketika $k > n$.

C. Identitas Ketiga

$$C_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Dengan cara ketiga ini, kita akan memanfaatkan hasil yang telah didapatkan sebelumnya, yaitu identitas pertama dan kedua. Kita mulai dari penjabaran polinomial berpangkat 4 berikut.

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$
$$\Leftrightarrow \ (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

Andaikan kita punya $T_n = (n+1)^4 - n^4$, maka

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + \cdots + (n^4 - (n-1)^4) + ((n+1)^4 - n^4)$$
$$= (n+1)^4 - 1.$$

Di sisi lain, kita juga punya

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} T_k &= \sum_{k=1}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} 4k^3 + \sum_{k=1}^{n} 6k^2 + \sum_{k=1}^{n} 4k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= 4\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \\ &= 4\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 2n^3 + 5n^2 + 4n.\end{aligned}$$

Dengan menggabungkan hasil di atas dengan hasil yang sebelumnya, didapatkan

$$(n+1)^4 - 1 = 4\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + 2n^3 + 5n^2 + 4n$$
$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 4\sum_{k=1}^{n} k^3 &= (n+1)^4 - 1 - 2n^3 - 5n^2 - 4n \\ &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\ &= (n^2)(n^2 + 2n + 1) \\ &= (n^2)(n+1)^2.\end{aligned}$$

Jadi,

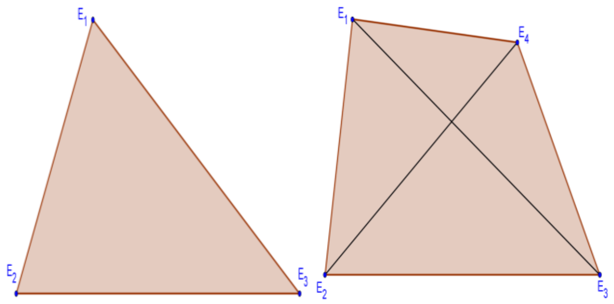
$$C_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Dengan demikian, semua identitas yang diperlukan telah dibuktikan.

IV. PEMBAHASAN

Untuk sekarang dan seterusnya, kita akan gunakan n sebagai sebuah bilangan bulat positif yang menunjukkan banyaknya titik pada poligon dan k adalah bilangan bulat positif dengan $k \le n$. Selain itu, kita ambil batas bawah $n > 2$ karena poligon hanya terdefinisi dalam daerah tersebut. Sebagai permulaan, kita akan ambil P_3 dan P_4 sebagai kasus pembuka. Perlu diingat kembali bahwa banyaknya pembagian daerah/partisi maksimum pada poligon P_n dinotasikan dengan M_n.

Dengan mudah dapat kita lihat pada gambar 4-1 (a) dan (b) bahwa $M_3 = 1$ dan $M_4 = 4$. Untuk kasus P_4, pada gambar hanya diberikan kasus ketika P_4 sederhana dan konveks, sementara kasus ketika P_4 kompleks atau konkaf belum ditangani. Alih-alih kita membahas hanya untuk $n = 4$, kita akan tunjukkan secara umum bahwa partisi maksimum akan didapatkan hanya jika P_n sederhana dan konveks.



$(a)\ M_3 = 1$ (b) $M_4 = 4$

Gambar 4-1 Partisi pada Poligon ketika $n = 3{,}4$

Andaikan kita punya P_n kompleks serta E_aE_{a+1} dan E_bE_{b+1} adalah sisi-sisi yang bersilangan dengan $a \ne b$. Misalkan juga kedua sisi tersebut berpotongan pada titik T, maka kita dapatkan daerah (segitiga) E_aTE_b dan $E_{a+1}TE_{b+1}$ bukan merupakan daerah dalam dari poligon. Padahal jika sisi-sisi yang bersilangan ini kita hilangkan dengan mengambil E_aE_b dan $E_{a+1}E_{b+1}$ sebagai sisi alih-alih E_aE_{a+1} dan E_bE_{b+1}, kita dapatkan daerah E_aTE_b dan $E_{a+1}TE_{b+1}$ sebagai daerah dalam poligon. Tentu saja dengan demikian daerah partisi poligon menjadi lebih banyak. Proses pengalihan sisi ini membuat poligon P_n tidak memiliki sisi-sisi yang bersilangan. Dengan kata lain, P_n haruslah merupakan poligon sederhana. Misalkan Q menyatakan bahwa P_n dapat dipartisi maksimum, maka secara matematis dapat ditulis

$$P_n\ kompleks \Rightarrow \sim Q$$

yang ekivalen dengan kontraposisinya

$$Q \Rightarrow P_n\ tidak\ kompleks$$

yaitu P_n harus sederhana (karena lawannya poligon kompleks adalah poligon sederhana).

Selanjutnya, andaikan sekarang P_n konkaf dan misalkan E_a adalah titik pada poligon dengan sudut dalam lebih dari 180°. Kita punya daerah $E_{a-1}E_aE_{a+1}$ berada di luar poligon P_n. Padahal dengan menggeser titik E_a sedemikian sehingga sudut dalam E_a kurang dari 180°, kita dapatkan daerah $E_{a-1}E_aE_{a+1}$ berada di dalam poligon P_n. Tentu saja hal ini menambah daerah partisi P_n sehingga partisi maksimum dapat dicapai. Namun, konsekuensi dari proses ini adalah membuat P_n tidak memiliki sudut dalam yang lebih dari 180°. Dengan kata lain, P_n haruslah konveks. Secara matematis, dapat ditulis

$$P_n\ konkaf \Rightarrow \sim Q$$

yang ekivalen dengan

$$Q \Rightarrow P_n\ tidak\ konkaf$$

yaitu, P_n konveks (lawannya konkaf). Dari dua pembahasan di atas kita dapatkan bahwa P_n sederhana dan konveks adalah **syarat perlu** partisi maksimum tercapai.

Dari sini, poligon P_n yang akan kita bahas seterusnya pasti sederhana dan konveks. Satu garis yang melintasi suatu daerah pasti akan membagi dua daerah tersebut. Dengan fakta/aksioma ini, kita akan mencari nilai M_n. Sebelumnya, perhatikan bahwa tiga buah garis yang saling tidak sejajar dapat berpotongan pada satu titik. Keadaan ini disebut dengan konkuren. Begitu juga tiga buah titik yang saling berbeda bisa saja berada pada satu garis lurus. Keadaan ini disebut sebagai kolinear.

Berdasarkan kesepakatan yang telah dibahas sebelumnya, kondisi kolinear tidak mungkin terjadi. Misalkan kita punya poligon P_n yang memiliki 3 garis yang konkuren dengan banyaknya pembagian daerah adalah m. Kita dapat menggeser salah satu titik sedemikian sehingga ketiga garis tidak konkuren lagi. Ketika hal tersebut dilakukan, kita dapatkan sebuah daerah baru (berupa segitiga) yang dibatasi oleh ketiga garis tersebut. Perhatikan bahwa daerah ini sebelumnya merupakan sebuah titik dan belum dihitung. Jadi, konfigurasi yang baru ini memiliki $m+1$ buah partisi daerah—lebih banyak dari yang sebelumnya.

Perlu ditinjau juga bahwa dalam kasus poligon kita ini, dua buah garis yang berpotongan di dalam poligon tidak dapat kita buat menjadi tidak berpotongan. Begitu juga sebaliknya. Sebagai contoh, jika kita ambil E_1E_k sebagai salah satu garis, setiap garis E_aE_b dengan $1 < a < k$ dan $k < b \leq n$ pasti akan berpotongan dengan E_1E_k. Sebaliknya, jika $1 < a, b < k$ atau $k < a, b \leq n$, kedua garis tersebut tidak akan berpotongan. Dengan begitu, selain kekonkurenan, tidak ada lagi kondisi yang dapat kita kendalikan di dalam poligon. Jadi, dapat kita simpulkan bahwa partisi maksimum akan diperoleh *ketika* tidak ada 3 garis yang konkuren di dalam P_n.

Misalkan R menyatakan terdapat tiga garis pada poligon yang konkuren di dalam poligon, maka secara matematis kondisi di atas dapat ditulis

$$\sim R \Rightarrow Q.$$

Selain itu, dari pembahasan di atas juga dapat ditarik kesimpulan jika terdapat 3 garis yang konkuren di dalam P_n, partisi maksimum tidak akan diperoleh. Secara matematis, ditulis

$$R \Rightarrow \sim Q$$

yang ekivalen dengan

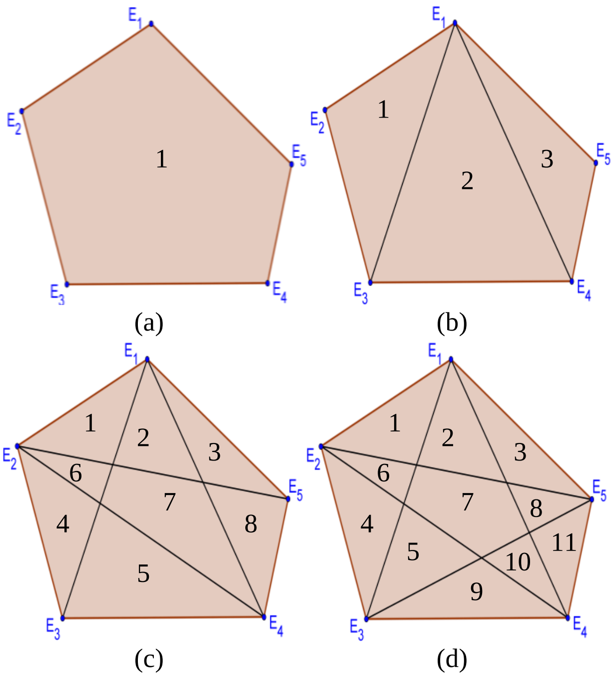
$$Q \Rightarrow \sim R.$$

Dari dua hasil terakhir yang kita dapat ini, dapat ditarik kesimpulan

$$\sim R \Leftrightarrow Q.$$

Dengan kata lain, tidak terjadinya konkuren (di dalam P_n) merupakan **syarat cukup** sekaligus **syarat perlu** agar partisi maksimum tercapai.

Sekarang, kita akan coba melihat pola perhitungan M_5 pada P_5. Pertama, kita hubungkan sisi-sisinya hingga menjadi sebuah poligon konveks sederhana. Kemudian, dari titik E_1 kita tarik garis partisi menuju E_3 dan E_4. Sekarang, terdapat 3 daerah partisi pada P_5. Setelah itu, kita pindah ke titik E_2 dan tarik garis menuju E_4 (menambah 2 daerah) dan E_5 (menambah 3 daerah). Sekarang, kita dapatkan tambahan daerah sebanyak $2+3$ daerah. Terakhir, dari E_3 kita tarik garis menuju E_5. Proses ini menambah daerah partisi sebanyak 3 daerah. Jadi, $M_5 = 3 + (2+3) + 3 = (1) + (1+2+3) + (1+3) = 11$. Proses ini dapat dilihat pada gambar 4-2 (a)-(d).

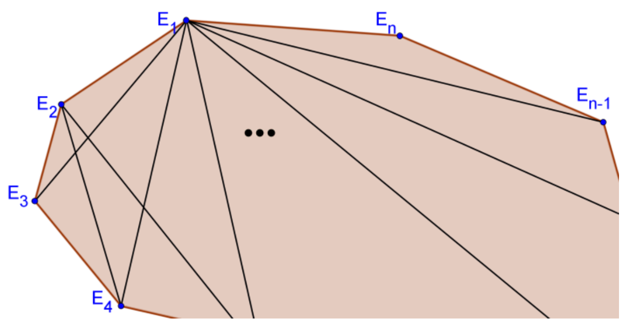


Gambar 4-2 Partisi Maksimum pada P_5

Dalam perhitungan di atas, ada dua kaidah penting yang digunakan. Pertama, penarikan garis E_aE_b dilakukan dengan a terurut dari 1 sampai $n-2$ dan, untuk setiap nilai a, nilai b terurut dari $a+2$ sampai n. Kedua, jika suatu daerah dibagi dua oleh sebuah garis, daerah yang lama kita ambil sebagai daerah yang lebih kiri-atas; daerah baru adalah daerah yang lebih kanan-bawah. Pada gambar 4-2 setiap daerah telah dinomori sesuai dengan kedua kaidah ini.

Sekarang, kita akan beranjak ke kasus yang lebih umum. Misalkan P_n adalah poligon sederhana dan konveks. Dari E_1, kita tarik garis ke titik E_3 hingga E_{n-1} sehingga poligon P_n terbagi menjadi $n-2$ daerah. Ketika kita tarik sebuah garis melewati sebuah daerah akan terbentuk sebuah daerah baru. Jadi, jika terdapat k buah daerah yang dilintasi, akan terbentuk k buah daerah baru. Dengan aksioma tersebut, jika kita tarik garis dari E_2 menuju E_4, akan terbentuk 2 daerah baru disebabkan garis E_2E_4 memotong dua buah daerah. Hal yang sama juga berlaku jika kita buat garis E_2E_5, akan terbentuk 3 daerah baru. Sekilas bisa kita terka bahwa angka-angka ini akan membentuk sebuah deret aritmatika dengan beda 1. Jadi, ketika titik E_2 dan E_n dihubungkan, akan terbentuk $2+\big((n-4+1)-1\big)\times 1 = n-2$ daerah baru. Perhatikan bahwa E_n adalah suku ke-$(n-4+1)$ karena suku pertamanya adalah E_4.

Bagaimanapun, hal tersebut belum valid karena belum ada bukti kecuali terkaan. Sekarang, kita akan menyelidiki dari mana angka-angka tersebut berasal. Suatu daerah pasti dibatasi oleh sebuah garis. Ketika ada garis yang memotong daerah tersebut, garis tersebut pasti akan memotong garis pembatas daerah itu sehingga terjadi perpotongan. Selain itu, sebuah daerah baru pasti akan terbentuk ketika sebuah perpotongan terjadi. Misalnya, jika kita tarik garis dari E_2 menuju E_6 pada contoh sebelumnya, pasti garis tersebut akan memotong garis E_1E_3, E_1E_4, dan E_1E_5 sehingga akan terbentuk 3 buah daerah baru. Namun, daerah baru juga akan terbentuk ketika garis tersebut mencapai titik E_6 yang menyebabkan kita harus menambahkan hasilnya dengan 1.



Gambar 4-3 Proses Partisi pada Poligon P_n

Lebih jauh lagi, mencari banyaknya penambahan daerah baru kemudian berubah menjadi mencari banyaknya perpotongan garis yang terjadi ketika garis E_2E_k dibentuk. Pada kasus penarikan garis dari E_2, dengan jelas kita lihat bahwa setiap titik hanya terhubung dengan E_1 sehingga pastilah garis yang terhubung dari setiap titik hanya 1. Konsekuensinya, banyaknya perpotongan yang terjadi akan sama dengan banyaknya titik pada lintasan antara E_2 dengan E_k. Dengan demikian pada penarikan garis E_2E_k, akan terbentuk $(k-2-1)+1 = k-2$ daerah. Hal ini sesuai dengan terkaan kita sebelumnya sehingga terkaan kita terbukti benar. Dari sini, kita dapatkan jika semua garis E_2E_k telah terhubung akan terdapat

$$\sum_{k=4}^{n} k-2 = A_n - A_3 - 2(n-4+1)$$

daerah baru.

Selanjutnya, kita akan membahas kasus yang lebih umum lagi. Pandang garis E_aE_b adalah garis yang ingin kita buat. Disebabkan setiap titik E_k, $1 \le k \le a-1$, telah dihubungkan ke setiap titik E_b, $a+2 \le b \le n$, ketika kita ingin menghubungkan garis dari titik E_a, telah terdapat tepat $a-1$ garis yang terhubung ke setiap titik E_b. Karena terdapat $b-a-1$ buah titik pada lintasan antara E_a dengan E_b, kita dapatkan banyaknya perpotongan yang terjadi adalah $(a-1)(b-a-1)$ perpotongan. Hal ini berlaku untuk kasus $a > 1$. Dengan demikian, banyakya daerah baru yang terbentuk adalah $(a-1)(b-a-1)+1$ daerah dan jika semua nilai b telah dimasukkan, akan terbentuk

$$\sum_{b=a+2}^{n} (a-1)(b-a-1)+1$$

daerah baru.

Lebih jauh lagi, karena nilai a berjalan dari 2 sampai $n-2$, kita dapatkan daerah yang terbentuk sebanyak

$$\sum_{a=2}^{n-2}\left(\sum_{b=a+2}^{n} (a-1)(b-a-1)+1\right)$$

buah. Ditambah dengan kasus ketika $a=1$, hasilnya adalah total partisi maksimum dari P_n, yaitu

$$M_n = (n-2) + \sum_{a=2}^{n-2}\left(\sum_{b=a+2}^{n} (a-1)(b-a-1)+1\right)$$

$$= (n-2) + \sum_{a=2}^{n-2}\left(\sum_{b=a+2}^{n} (a-1)(b-a-1) + \sum_{b=a+2}^{n} 1\right)$$

$$= (n-2) + \sum_{a=2}^{n-2}\left(\left((a-1)\sum_{b=a+2}^{n} (b-a-1)\right) + (n-a-1)\right)$$

$$= (n-2) + \sum_{a=2}^{n-2}\Big(\big((a-1)(A_n - A_{a+1} - (n-a-1)(a+1)\big)\big) + (n-a-1)\Big)$$

$$= (n-2) + \sum_{a=2}^{n-2}\left((a-1)\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(a+1)(a+2)}{2}\right) - (a^2-1)(n-a-1) + (n-a-1)\right)$$

$$= (n-2) + \sum_{a=2}^{n-2} \left(\frac{(a-1)(n^2+n-a^2-3a-2)}{2} - (a^2-2)(n-a-1) \right)$$

$$= (n-2) + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=2}^{n-2} (a^3 - 2na^2 + (n^2+n-3)a - n^2 + 3n - 2) \right)$$

$$= (n-2) + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=2}^{n-2} (a^3 - 2na^2 + (n^2+n-3)a - n^2 + 3n) \right) - \frac{1}{2}\sum_{a=2}^{n-2} 2$$

$$= (n-2) + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=2}^{n-2} (a^3 - 2na^2 + (n^2+n-3)a - n^2 + 3n) \right) - \frac{1}{2}\big((n-2)-2+1\big)(2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=2}^{n-2} (a^3 - 2na^2 + (n^2+n-3)a - n^2 + 3n) \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=2}^{n-2} a^3 - \sum_{a=2}^{n-2} 2na^2 + \sum_{a=2}^{n-2} (n^2+n-3)a - \sum_{a=2}^{n-2} (n^2-3n) \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{a=2}^{n-2} a^3 - 2n\sum_{a=2}^{n-2} a^2 + (n^2+n-3)\sum_{a=2}^{n-2} a - (n^2-3n)\sum_{a=2}^{n-2} 1 \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\Big((C_{n-2} - C_1) - 2n(B_{n-2} - B_1) + (n^2+n-3)(A_{n-2} - A_1) - (n^2-3n)\big((n-2)-2+1\big) \Big)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\Big((C_{n-2} - 1) - 2n(B_{n-2} - 1) + (n^2+n-3)(A_{n-2} - 1) - (n^2-3n)(n-3) \Big)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\Big((n^2+n-3)A_{n-2} - 2nB_{n-2} + C_{n-2} - n^3 + 5n^2 - 8n + 2 \Big).$$

Dengan memasukkan rumus eksplisit untuk A_{n-2}, B_{n-2}, dan C_{n-2}, kita dapatkan

$$M_n = 1 + \frac{1}{2}\left((n^2+n-3)\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right) - 2n\left(\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}\right) + \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)^2 - (n^3 - 5n^2 + 8n - 2) \right)$$

$$= \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24).$$

Beberapa perhitungan dengan rumus yang kita dapat ini untuk kasus $n = 3$ s.d. $n = 9$ diberikan oleh tabel 4-1.

Tabel 4-1 Nilai M_n dengan Rumus yang Didapat

n	3	4	5	6	7	8	9
M_n	1	4	11	25	50	91	154

V. Lebih Jauh Tentang Partisi Maksimum

Dari pembahasan yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, kita akan meninjau ulang cara yang dipakai untuk mencari M_n dan menggunakan pendekatan lain yang lebih elegan. Coba diingat kembali bahwa pada penarikan garis E_aE_b, $2 \le a \le n-2$, $a+2 \le b \le n$, banyaknya daerah baru yang terbentuk sama dengan banyaknya perpotongan garis ditambah 1. Jika semua garis telah dibuat, total perpotongan-perpotongan garis ini akan sama dengan total perpotongan garis yang ada di dalam poligon P_n. Selain itu, angka 1 akan dijumlah terus-menerus sebanyak $\sum_{a=2}^{n-2}(n-(a+2)+1) = \big((n-2)-2+1\big)(n-1) - A_{n-2} + A_1 = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6$ kali. Namun, kita belum menangani kasus ketika $a=1$, jadi hasilnya harus ditambah dengan $n-2$. Sekarang, kita tinggal mencari banyaknya perpotongan garis di dalam poligon P_n.

Sebuah perpotongan garis (dalam kasus kita ini) hanya akan terjadi jika dua buah garis saling berpotongan. Jadi, untuk sebarang dua garis berbeda yang kita ambil, pasti terjadi tepat sebuah perpotongan. Namun, kita tidak tahu apakah perpotongan terjadi di dalam atau di luar poligon. Untuk menangani masalah ini, kita ingat kembali bahwa keadaan yang kita punya adalah P_n konveks. Jika kita mengambil sebuah bangun datar, alih-alih garis, perpotongan diagonalnya pasti terjadi di dalam bangun tersebut. Kedua diagonal ini menyatakan dua garis yang kita tinjau. Karena bangun datar ini memiliki tepat dua buah diagonal, pastilah bangun datar yang cocok adalah segiempat (tetragon/P_4).

Sebuah segiempat dibentuk dari tepat 4 buah titik yang berbeda, sehingga pada P_n akan ada $\binom{n}{4}$ buah segiempat yang berbeda. Perlu diperhatikan bahwa pada sebuah segiempat titik perpotongan diagonalnya unik. Sebuah titik pada poligon juga pasti adalah perpotongan sepasang garis yang unik. Sepasang garis yang unik akan berujung, masing-masing, pada 2 titik yang unik sehingga terdapat 4 buah titik yang unik yang akan membentuk sebuah segiempat yang unik. Dengan demikian, banyaknya perpotongan garis di dalam poligon akan sama dengan banyaknya segiempat yang dapat dibentuk dari poligon, yaitu $\binom{n}{4}$ perpotongan.

Jadi, dengan menggabungkan hasil yang baru kita dapat ini dengan hasil yang sebelumnya, kita dapatkan

$$\begin{aligned} M_n &= \binom{n}{4} + \frac{n^2 - 5n + 6}{2} + n - 2 \\ &= \binom{n}{4} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \binom{n-2}{1} \\ &= \binom{n}{4} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{1} \\ &= \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2} \end{aligned}$$

dengan bantuan lemma 1 pada bab III. Jika dihitung untuk $n = 3$ s.d. $n = 9$, hasil yang diperoleh sama seperti data pada tabel 4-1. Memang, dengan sedikit usaha, namun tidak sulit, didapatkan

$$\binom{n}{4} + \binom{n-1}{2} = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24).$$

Jika diperhatikan dengan seksama, sebetulnya kemunculan bentuk $\binom{n-1}{2}$ dapat diinterpretasikan dengan maksud mengambil 2 buah titik dari $n-1$ titik untuk membentuk sebuah garis. Keterkaitannya dengan kasus kita adalah pada penambahan 1 pada setiap perhitungan partisi daerah yang disebabkan oleh dibuatnya garis E_aE_b. Dengan alasan ini, dapat kita katakan setiap pembuatan sebuah garis menyebabkan bertambahnya satu buah daerah baru (yang belum diwakilkan oleh perpotongan garis), namun hal ini tidak berlaku untuk setiap garis yang terhubung ke titik E_1 (karena $a > 1$). Sehingga, sisa titik yang perlu kita tinjau tinggal $n-1$ dan banyaknya garis yang dapat dibuat adalah $\binom{n-1}{2}$.

Pencarian rumus M_n dengan pendekatan ini memang jauh lebih elegan dan tidak rumit jika dibandingkan dengan pendekatan yang dipakai sebelumnya. Selain itu, metode ini tidak melibatkan perhitungan panjang yang rentan dengan ketidaktelitian dan kesalahan hitung, sehingga kemungkinannya kecil untuk terjadi kesalahan perhitungan. Meskipun begitu, cara ini dapat dibilang agak *tricky* karena membutuhkan pemahaman konsep yang baik tentang kombinatorik, sementara cara sebelumnya lebih *straight forward* 'langsung' dan hanya membutuhkan kemampuan menghitung yang baik.

Setelah mendapatkan hasil ini, sekarang dapat kita jawab persoalan dari studi kasus yang dipaparkan pada Bab Pendahuluan, yaitu $M_7 = 50$.

VI. KESIMPULAN

Misalkan P_n adalah suatu poligon dengan n titik, maka

$$M_n = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24)$$

atau

$$M_n = \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$$

dengan M_n menyatakan pembagian daerah/partisi maksimum yang dapat diperoleh pada P_n.

Tidak adanya 3 (atau lebih) garis yang konkuren di dalam poligon merupakan **syarat cukup** dan **syarat perlu** agar partisi maksimum tercapai.

Poligon P_n berupa poligon sederhana dan konveks merupakan **syarat perlu** agar partisi maksimum tercapai.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF2091 – Struktur Diskrit*. Bandung: Program Studi Informatika Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung, 2008.

[2] Larson, Loren C., *Problem-Solving Through Problems*. New York: Springer-Verlag, 1983.

[3] http://www.mathsisfun.com/geometry/polygons.html, 6 Desember 2012, 12:40:59 GMT.

[4] http://mathworld.wolfram.com/ArithmeticSeries.html, 4 Desember 2012 13:51:32 GMT.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2012

Muhammad Nassirudin
NIM. 13511044