

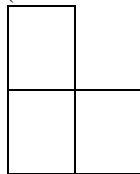
Solusi Kuis ke-2 IF2091 Struktur Diskrit (3 SKS) – Induksi Matematika, Teori Bilangan
Dosen: Rinaldi Munir, Harlili
Rabu, 10 Oktober 2012
Sifat: Take Home Quiz

Dikerjakan sendiri di rumah tanpa kerjasama dengan teman yang lain. Boleh buka buku. Dikumpulkan hari Kamis 11 Oktober 2012 antara pukul 8.30 – 9.00 di Lab IRK langsung ke tangan asisten Struktur Diskrit. Lewat jam tersebut berkas kuis tidak diterima.

Tanda tangani pernyataan ini: Saya menyatakan bahwa soal kuis ini saya kerjakan sendiri tanpa bantuan dari siapapun dan tanpa kerjasama dengan siapapun.

(.....)

1. Buktikan dengan induksi matematik bahwa setiap lantai berukuran $2^n \times 2^n$ (n bilangan asli) dapat ditutupi dengan satu ubin berukuran 1×1 dan beberapa ubin berbentuk L-tromino. (Gambar L-tromino yang dimaksud diberikan dibawah) (nilai: 15)



Jawaban:

Basis: Untuk $n=1$, tutup salah satu pojok dengan ubin 1×1 dan jelas petak yang tersisa merupakan L-tromino

Induksi: Misalkan benar bahwa lantai berukuran $2^n \times 2^n$ dapat ditutupi dengan satu ubin berukuran 1×1 dan sejumlah ubin berbentuk L-tromino. Untuk $n=k+1$, maka lantai berukuran $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ akan tersusun oleh 4 bagian lantai berukuran $2^k \times 2^k$. Jika ubin 1×1 ditutup di salah satu bagian lantai, bagian tersebut dapat ditutup sejumlah L-tromino. Lalu, terhadap ketiga bagian lainnya, buang pojok bagian yang terdapat di tengah lantai besar. Kini, ketiga bagian tersebut dapat ditutupi sejumlah L-tromino dan ketiga pojok yang dibuang pun sebenarnya membentuk L-tromino. Karena lantai berukuran $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ juga ternyata bisa ditutupi sejumlah L-tromino dan satu ubin 1×1 maka pernyataan pada soal benar dan terbukti oleh induksi matematika.

2. Dengan menggunakan induksi matematik, buktikan bahwa nilai $7^n - 2^n$ selalu habis dibagi 5, untuk setiap n yang merupakan bilangan asli. Pembuktian dilakukan dengan sebelumnya menentukan dulu apa basis induksi, hipotesis induksi, dan langkah induksinya.

Jawaban:

Basis induksi :

Untuk $n = 1$, maka didapatkan $7 - 2 = 5$

Hipotesa induksi :

Berdasarkan basis yang didapat, maka nilai $7^n - 2^n$ adalah kelipatan 5, bisa dilambangkan dengan $5m$ (karena n bilangan asli, maka m pasti merupakan bilangan asli)

Langkah Induksi :

Untuk nilai $k = n+1$, maka didapatkan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} 7^k - 2^k &= 7^{n+1} - 2^{n+1} \\ &= 7^n \cdot 7 + (-7 \cdot 2^n + 7 \cdot 2^n) - 2^n \cdot 2 \\ &= 7^n \cdot 7 - 7 \cdot 2^n + 7 \cdot 2^n - 2^n \cdot 2 \\ &= 7(7^n - 2^n) + 2^n(7-2) \\ &= 7(7^n - 2^n) + (5)2^n \quad , \text{berdasarkan hipotesa, maka substitusi } 7^n - 2^n \text{ dgn } 5m \\ &= 7(5m) + (5)2^n \\ &= 5(7m + 2^n) \end{aligned}$$

Sebelumnya dapat diketahui bahwa m dan n masing2 adalah bilangan asli, sehingga nilai $(7m + 2^n)$ merupakan bilangan asli pula. Lalu, dapat dilihat bahwa persamaan di atas merupakan kelipatan dari 5, sehingga pernyataan pada soal dapat dibuktikan benar.

3. Tentukan bilangan terkecil yang memenuhi nilai x pada persamaan berikut dengan menggunakan *Chinese Remainder Theorem*

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 3 \pmod{6}$$

Jawaban:

Dengan menggunakan teorema tersebut, maka bentuk ketiga pernyataan dapat diubah menjadi

$$x = 1 + 4a$$

$$x = 4 + 5b$$

$$x = 3 + 6c$$

dengan menggunakan substitusi pernyataan pertama yang telah diubah ke pernyataan kedua, didapat :

$$x = x$$

$1 + 4a = 4 + 5b$ (mod 5), maka akan didapatkan $a \equiv 2 \pmod{5}$, atau $a = 2 + 5b$

Substitusikan hasil di atas ke dalam pernyataan pertama yg telah diubah, menjadi

$$x = 1 + 4a = 1 + 4(2 + 5b) = 1 + 8 + 20b = 9 + 20b$$

lalu substitusikan hasil yang telah didapat kepada pernyataan ke-3, sehingga

$$x = x$$

$$9 + 20b = 3 \pmod{6}, \text{ maka akan didapatkan } b \equiv 3 \pmod{6}, \text{ atau } b = 3 + 6c$$

Substitusikan hasil di atas ke dalam pernyataan kedua yg telah diubah, menjadi

$$x = 9 + 20b = 9 + 20(3 + 6c) = 9 + 60 + 120c = 69 + 120c, \text{ atau } x \equiv 69 \pmod{60}$$

berdasarkan persamaan di atas, maka dapat dilihat angka terkecil yang memenuhi ketiga persamaan di atas adalah 69

4. Misalkan m adalah bulat bilangan positif lebih dari sama dengan 2. Jika $a \pmod{m} = b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, buktikan bahwa:

a. $a \equiv c \pmod{m}$

b. $ab \equiv c^2 \pmod{m}$

Jawaban:

a. $a \pmod{m} = b \pmod{m}$

$$a + k_1 \cdot m = b + k_2 \cdot m$$

$$b = a + (k_1 - k_2)m$$

$$b \equiv a \pmod{m}$$

$$b = c + k_3 \cdot m$$

$$a + (k_1 - k_2)m = c + k_3 \cdot m$$

$$a = c + (k_3 - k_1 + k_2)m$$

$$a \equiv c \pmod{m}$$

$$a \equiv c \pmod{m} \text{ (terbukti)}$$

b. $a \equiv c \pmod{m}$

$$b \equiv c \pmod{m}$$

$$a = c + k_1 \cdot m$$

$$b = c + k_2 \cdot m$$

$$ab = c^2 + c \cdot k_1 \cdot m + c \cdot k_2 \cdot m + k_1 \cdot k_2 \cdot m^2$$

$$ab = c^2 + (c \cdot k_1 + c \cdot k_2 + k_1 \cdot k_2 \cdot m)m$$

$$ab = c^2 + Km$$

$$ab \equiv c^2 \pmod{m} \text{ (terbukti)}$$

5. Tentukan 2 bilangan asli terkecil yang bersifat: bersisa 3 saat dibagi 4, bersisa 2 saat dibagi 5, bersisa 6 saat dibagi 7.

Jawaban:

Misalkan bilangan asli yang memenuhi itu adalah n maka $n = 4k_1 + 3 \equiv 2 \pmod{5}$ berdasarkan dua sifat awal. Maka $4k_1 \equiv 4 \pmod{5}$ yang berikutnya akan menghasilkan $k_1 \equiv 1 \pmod{5}$ atau $k_1 = 5k_2 + 1$ (1).

Substitusi (1) ke persamaan $n = 4k_1 + 3$ didapat $n = 20k_2 + 7$ (2). Substitusi n ke persamaan untuk sifat ketiga didapat

$$20k_2 + 7 \equiv 6 \pmod{7} \text{ atau } 20k_2 \equiv 6 \pmod{7}. \text{ Dengan menggunakan inversi modulo, didapat } k_2 \equiv 1 \pmod{7} \text{ atau}$$

$$k_2 = 7k_3 + 1. \text{ Substitusi persamaan terakhir ke (2) didapat } n = 20(7k_3 + 1) + 7 = 140k_3 + 27 \text{ atau } n \equiv 27 \pmod{140}.$$

Jadi, dua nilai n terkecil yang memenuhi sifat diatas adalah 27 dan 167.

6. Diketahui ISBN suatu buku adalah : 0-17-21191X-7, berapa nilai X?

Jawaban:

$$1*0 + 2*1 + 3*7 + 4*2 + 5*1 + 6*1 + 7*9 + 8*1 + 9*X = 113 + 9X$$

$$(113 + 9X) \bmod 11 = 7$$

Pernyataan terakhir ekuivalen dengan $9X \bmod 11 = 4$. Akan didapat $X = 9$

Jawaban setiap soal ditulis di bawah ini. Gunakan halaman dibalik atau kertas tambahan jika diperlukan.