

Teori Peluang dalam Sistem Turnamen Eliminasi Ganda

Rubiano Adityas – 13510041

*Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
rubiano.adityas@students.itb.ac.id*

Artikel ini membahas tentang kajian teori probabilitas dalam sistem turnamen eliminasi ganda. Turnamen eliminasi ganda merupakan sebuah sistem turnamen, dimana terdapat dua bracket, dan partisipan yang kalah di pertandingan bracket atas akan berpindah ke bracket bawah, sementara partisipan yang kalah di bracket bawah akan tereliminasi dari turnamen (akan dijelaskan lebih lanjut di upabab-upabab berikutnya). Sistem turnamen tersebut biasa digunakan di turnamen baseball, professional wrestling dan berberapa cabang olimpiik seperti judo.

Seperti yang diketahui, teori kombinatorial banyak dipakai dalam penyelesaian masalah dan analisis kasus, salah satunya adalah untuk menghitung peluang.

Teori kombinatorial dapat digunakan untuk mengestimasi peluang menang/kalah partisipan dalam turnamen eliminasi ganda. Turnamen tersebut memiliki keunikan tersendiri dari sisi probabilitas kemenangannya, dikarenakan kekalahan partisipan tidak langsung membuat partisipan tersebut tersingkir dari turnamen. Untuk menghitung peluang kemenangan/kekalahan partisipan, dapat digunakan teori peluang bebas.

Kata Kunci : sistem turnamen, eliminasi ganda, aplikasi teori peluang bebas.

I. PENDAHULUAN

Manusia berlomba sepanjang hidupnya. Seorang pedagang akan berlomba-lomba menarik minat konsumen, memperebutkan keuntungan dengan pedagang lainnya. Ketika era kolonialisasi, negara-negara barat berlomba-lomba mencari tempat lain untuk dieksplorasi, dan dieksploitasi demi meningkatkan kesejahteraan warganya dan memperluas wilayah kekuasaan. Kemampuan manusia untuk berlomba dan berkompetisi sangat esensial bagi keberlangsungan hidupnya. Barangsiapa yang tidak mampu berlomba, maka ia akan tertinggal.

Seiring dengan waktu, mulai disadari bahwa berkompetisi tidak hanya penting untuk memenuhi kebutuhan primer kita, namun juga ego kita. Manusia

suka berkompetisi, dan juga melihat manusia lain berkompetisi. Oleh karena hal tersebut, manusia mulai menjadikan lomba atau kompetisi, yang sebelumnya untuk penghidupan, sebagai suatu bentuk hiburan. Para sejarawan bisa menunjukkan bahwa sejak era pasca prasejarah, atau bahkan era prasejarah, manusia menjadikan kompetisi sebagai satu bentuk hiburan. Bentuk perlombaan pada masa lampau pada umumnya barbarik, apabila dibandingkan dengan saat ini. Perlombaan dimana nyawa seseorang dipertaruhkan, seperti arena gladiator Roma dan permainan bola Aztec, umum dijumpai.

Seiring dengan perkembangan jaman, permainan yang barbarik mulai ditinggalkan, dan bermunculan permainan modern saat ini seperti sepak bola, bola basket, catur, dan video game. Walau zaman sudah berubah, namun manusia tetap menikmati adanya perlombaan, adanya sebuah kompetisi. Oleh karena itu, seringkali diselenggarakan perlombaan untuk menguji kebolehan partisipannya, dan sebagai bahan hiburan bagi penontonnya.

Dalam perkembangannya, muncul berbagai macam sistem perlombaan dengan berbagai macam tujuan, seperti membuat perlombaan menjadi lebih menarik dan kompetitif. Salah satu contoh sistem perlombaan yang populer adalah klasemen, yang sering digunakan pada liga sepak bola. Klasemen, mirip seperti turnamen round robin, akan mempertandingkan partisipan dengan semua partisipan yang lain, dan kemudian pemenangnya ditentukan dengan akumulasi skor.

Tiap-tiap sistem memberikan peluang kemenangan yang berbeda, dan peluang tersebut dapat dihitung dan dianalisis dengan menggunakan teori kombinasional, lebih spesifiknya lagi teori peluang bebas. Artikel ini akan membahas mengenai salah satu dari sistem perlombaan di atas: turnamen eliminasi ganda. Dengan menggunakan teori peluang bebas, kita bisa menghitung kemungkinan partisipan untuk menang pada turnamen eliminasi ganda, dan akan diperlihatkan perbedaan peluang kemenangannya dengan turnamen biasa (eliminasi tunggal).

II. TEORI PELUANG

Sebelum masuk ke pembahasan peluang, terlebih dahulu dibahas mengenai permutasi dan kombinasi. Keduanya digunakan untuk menghitung jumlah susunan yang memungkinkan apabila diketahui jumlah barang yang disusun dan jumlah tempat penyusunan. Permutasi dan kombinasi memiliki perbedaan dalam cara menghitung jumlah susunannya, dan keduanya memiliki aplikasi yang berbeda. Permutasi dan kombinasi menggunakan suatu notasi matematik yang sama dalam rumusnya, yaitu faktorial.

A. Faktorial

Faktorial dinyatakan dengan lambang tanda seru “!”, diletakkan setelah integer positif (misal n , maka faktorial $n = n!$). Suatu integer yang difaktorialkan akan dikalikan dengan semua integer predesessornya (hingga integer 1).

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 1$$

Sebagai contoh, nilai dari $4!$ adalah:

$$4! = (4)(3)(2)(1) = 24$$

B. Permutasi

Permutasi adalah jumlah penyusunan yang berbeda dari sekumpulan objek di dalam kumpulannya yang dapat diambil sebagian atau seluruhnya. Berbeda dengan kombinasi, urutan yang berbeda dianggap sebagai susunan yang berbeda (dibahas juga di upabab Kombinasi). Secara umum, rumusan permutasi adalah sebagai berikut:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Bentuk $P(n, r)$ identik dengan nPr .

C. Kombinasi

Kombinasi mirip dengan permutasi, hanya saja, di dalam kombinasi tidak dibedakan suatu susunan yang memiliki objek yang sama namun urutannya berbeda, kejadian tersebut dianggap sama. Secara formal, kombinasi menunjukkan banyaknya himpunan bagian, yang terdiri atas r elemen, dari himpunan berjumlah elemen n . Secara umum, rumusan kombinasi adalah sebagai berikut

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Bentuk $C(n, r)$ identik dengan nCr dan $\binom{n}{r}$.

D. Peluang

Ada dua komponen penting dalam menghitung suatu peluang, yaitu jumlah kejadian dan ruang sampel. Jumlah kejadian adalah banyaknya kejadian yang dihitung peluangnya. Ruang sampel adalah semua kejadian yang

mungkin, baik yang akan dihitung, maupun yang tidak. Sebagai contoh, untuk menghitung peluang munculnya bilangan ganjil pada pelemparan sebuah dadu, maka terlebih dahulu hitung jumlah kejadian dan ruang sampelnya. Jumlah kejadian ada 3, yaitu munculnya bilangan 1, 3, dan 5. Sementara untuk ruang sampelnya ada 6, yaitu munculnya bilangan dari 1 sampai 6. Setelah didapat keduanya, peluang didapat dari hasil perbandingan antara jumlah kejadian dan ruang sampel:

$$P(\text{ganjil}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Berdasarkan contoh perhitungan tersebut, bisa disimpulkan rumusan umum untuk menghitung peluang suatu kejadian, yaitu sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{S}$$

P menyatakan peluang, sementara $P(A)$ menyatakan peluang dari kejadian A . $n(A)$ adalah jumlah kejadian A , dan S menyatakan ruang sampel.

E. Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat adalah peluang terjadinya suatu kejadian bilamana diketahui adanya kejadian lain. Sebagai contoh, B sudah diketahui telah terjadi, dan dari informasi tersebut kita ingin mengetahui berapa peluang A . Kalimat lain dari contoh tersebut adalah berapa peluang terjadinya A apabila diketahui B terjadi. Peluang bersyarat tersebut dinotasikan dengan $P(A|B)$.

Rumusan umum untuk menghitung peluang bersyarat adalah sebagai berikut:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Apabila didapati $P(A|B) = P(A)$, maka artinya peluang dari kejadian B sama sekali tidak mempengaruhi peluang A . Hal yang sama juga berlaku ketika $P(B|A) = P(B)$, peluang dari kejadian A sama sekali tidak mempengaruhi peluang B . Kejadian khusus seperti ini menandakan bahwa A dan B adalah dua kejadian yang saling bebas.

Untuk mendapat rumusan yang lebih baku dari kejadian saling bebas, kita dapat memanfaatkan rumusan yang sebelumnya sudah didefinisikan. Misal sebagai prekondisi, A dan B saling bebas, maka:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Dengan mensubstitusikan $P(A|B) = P(A)$, didapat:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Rumusan diatas menyatakan, kejadian A dan B saling bebas bilamana memenuhi persamaan diatas.

III. TURNAMEN ELIMINASI GANDA

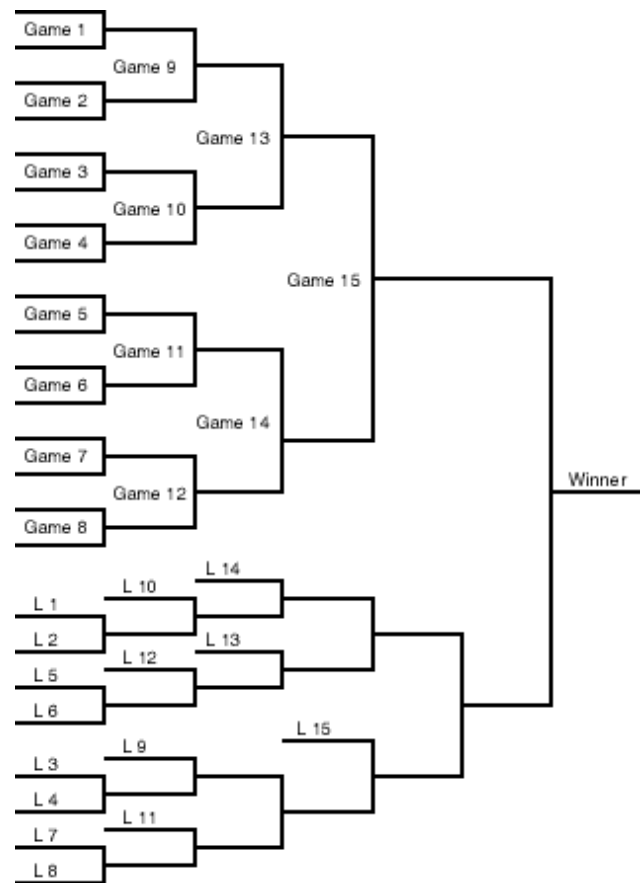
Turnamen eliminasi ganda merupakan salah satu macam dari turnamen eliminasi dimana partisipan akan gugur dari kompetisi untuk memenangkan turnamen, ketika sudah kalah di dalam pertandingan sebanyak dua kali. Berbeda dengan turnamen eliminasi tunggal, dimana satu kekalahan langsung mengugurkan partisipan dari turnamen.

Sebuah turnamen eliminasi ganda dibagi menjadi dua bracket, Winners Bracket dan Losers Bracket (untuk mempersingkat, biasanya disebut W dan L). Seusai pertandingan ronde pertama, para pemenang lanjut ke ronde berikutnya di W Bracket, sementara yang kalah berpindah ke L Bracket. Ronde-ronde W Bracket dilaksanakan sama seperti turnamen eliminasi tunggal, namun apabila di turnamen eliminasi tunggal kekalahan menyebabkan keguguran dari turnamen, kekalahan di W Bracket akan menyebabkan partisipat turun tingkat ke L Bracket.

Sama seperti turnamen eliminasi tunggal, jumlah partisipan adalah hasil dari pemangkatan integer 2 (8, 16, 32, 64, dst) agar jumlah partisipan di tiap ronde selalu sama. Hal tersebut dilakukan agar semua partisipan bertanding di ronde tersebut, tidak ada yang langsung ke ronde berikutnya karena tidak ada lawannya.

Ronde pertama dari L Bracket adalah partisipan yang kalah di ronde pertama W Bracket yang kemudian saling dihadapkan. Ronde kedua dari L Bracket adalah para pemenang dari ronde pertama L Bracket melawan partisipan yang kalah dari ronde 2 W Bracket. Polanya seperti itu terus berulang-ulang, hingga pemenang dari L bracket melawan pemenang dari W Bracket.

Untuk memahami sistem turnamen eliminasi ganda dengan visualisasi, bisa dilihat pada gambar 3.1. Pemenang dari ronde W Bracket (Game 1-8) maju ke ronde berikutnya, sementara yang kalah turun ke L Bracket (L 1-8). Pemenang dari ronde 1 L Bracket akan melawan partisipan yang kalah pada ronde 2 W Bracket (Game 9-12). Begitu seterusnya hingga pemenang terakhir dari L Bracket akan melawan pemenang sementara dari W Bracket, yang secara perhitungan belum pernah kalah.

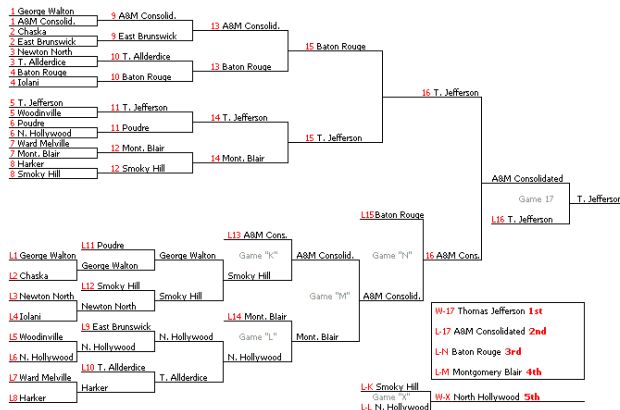


Gambar 3.1 Turnamen Eliminasi Ganda dengan 16 partisipan

Championship Finals (Pemenang W Bracket vs Pemenang L Bracket) pada umumnya diadakan dalam format best-of-3 (harus menang 2 kali untuk juara). Dalam format tersebut, “pertandingan” pertama tidak dilaksanakan, dan kemenangan langsung diberikan kepada pemenang W Bracket. Hal ini dilakukan untuk menghormati pemenang W Bracket yang belum pernah kalah, dan juga demi konsistensi, bahwa untuk seorang partisipan gugur dari turnamen, harus kalah dua kali terlebih dahulu. Pemenang dari L Bracket sudah kalah sekali sebelumnya, sementara pemenang dari W Bracket belum pernah kalah. Maka dari itu, pemenang W Bracket hanya membutuhkan 1 kali kemenangan untuk memenangkan turnamen, sementara pemenang L Bracket membutuhkan 2 kali kemenangan.

Sistem turnamen eliminasi ganda memiliki beberapa keunggulan dibanding sistem turnamen eliminasi tunggal, salah satunya adalah posisi ketiga dan keempat dalam turnamen bisa ditentukan tanpa harus melaksanakan pertandingan tambahan antara partisipan yang secara teknis sudah gugur dari turnamen (lihat gambar 3.2). Selain itu, dalam sistem turnamen eliminasi ganda, partisipan yang lebih berkualitas memiliki peluang yang lebih untuk maju ke ronde-ronde berikutnya. Misal di dalam sebuah turnamen eliminasi tunggal, partisipan terbaik bertanding melawan partisipan kedua terbaik di

ronde kedua, maka partisipan kedua terbaik akan langsung tersingkir, walau hanya bermain satu pertandingan. Berlaku juga hal yang sebaliknya, partisipan yang kurang baik dibanding partisipan kedua terbaik, terus melaju ke ronde-ronde berikutnya akibat penempatan lawan yang tidak seimbang, kemudian melawan partisipan terbaik di final, kalah dan mendapat posisi kedua. Turnamen eliminasi ganda memungkinkan partisipan terbaik kedua untuk terus melaju ke ronde-ronde berikutnya (di L Bracket) hingga saatnya di final bertemu dengan partisipan terbaik, kalah dan mendapat posisi kedua yang sesuai merepresentasikan kapabilitas mereka.

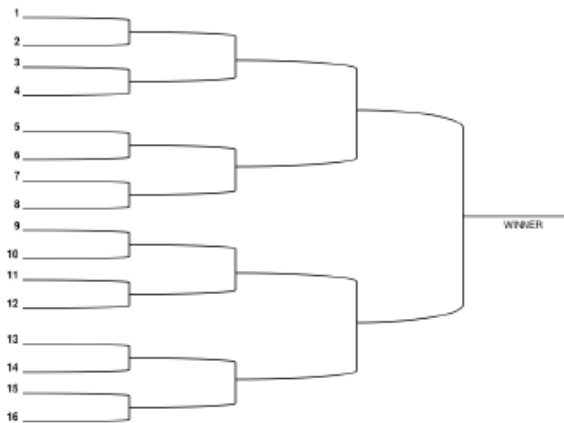


Gambar 3.2 Turnamen Eliminasi Ganda Menentukan Posisi 1, 2, 3, dan 4 tanpa pertandingan tambahan

Kekurangan dari sistem turnamen eliminasi ganda dibanding eliminasi tunggal adalah jumlah pertandingan yang harus dilaksanakan lebih banyak, karena tiap partisipan harus kalah dua kali terlebih dahulu sebelum gugur. Pada turnamen dengan n partisipan dan format championship finals adalah best-of-3 dengan pertandingan pertama diberikan kepada pemenang W Bracket, akan ada maksimal $2n - 1$ pertandingan (apabila pemenang L Bracket setidaknya menang sekali ketika championship finals), atau minimal $2n-2$ pertandingan (apabila pemenang W Bracket tidak pernah kalah).

IV. KAJIAN PROBABILITAS DALAM TURNAMEN ELIMINASI GANDA

Dengan menggunakan teori peluang, kita bisa menghitung seberapa besar kemungkinan partisipan untuk memenangkan sebuah turnamen jika diketahui total jumlah partisipannya (sejumlah hasil pemangkatan integer 2: 8, 16, dst). Sebelum menganalisis turnamen eliminasi ganda, terlebih dahulu dihitung peluang dalam eliminasi tunggal, untuk kemudian dibandingkan hasilnya.



Gambar 4.1 Turnamen Eliminasi Tunggal dengan 16 partisipan

Dengan asumsi peluang untuk menang dan kalah dalam suatu pertandingan adalah sama, maka peluang partisipan untuk menjuarai turnamen pada gambar 4.1 adalah:

$$P = (0.5)^4 = 0.0625$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan rumusan peluang untuk memenangkan turnamen eliminasi tunggal dengan n partisipan:

$$P(\text{juara turnamen}) = (0.5)^{\log_2 n}$$

Sekarang dihitung peluang untuk menjuarai turnamen eliminasi ganda dengan 16 partisipan dan format championship finals adalah best-of-3 (untuk referensi lihat gambar 3.2). Dalam sistem turnamen ini, cara untuk menang tidak hanya satu, namun ada beberapa, dan peluang dari semua cara itu akan diakumulasikan untuk menentukan peluang total.

- Kasus 1, kalah pada ronde pertama:
 $(0.5)^9 = 0.001953125$
- Kasus 2, kalah pada ronde kedua:
 $(0.5)^9 = 0.001953125$
- Kasus 3, kalah pada ronde ketiga:
 $(0.5)^8 = 0.00390625$
- Kasus 4, kalah pada ronde keempat:
 $(0.5)^7 = 0.0078125$
- Kasus 5, kalah satu kali pada final:
 $(0.5)^6 = 0.015625$
- Kasus 6, tidak pernah kalah:
 $(0.5)^5 = 0.03125$

Setelah dihitung semua kemungkinan, diakumulasikan hasilnya sebagai berikut:

$$P = (0.5)^9 + (0.5)^9 + (0.5)^8 + (0.5)^7 + (0.5)^6 + (0.5)^5 = 0.0625$$

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil perhitungan, dengan asumsi peluang menang dan kalah sama, didapat bahwa peluang untuk menjuarai suatu turnamen eliminasi tunggal maupun ganda, dengan jumlah n partisipan, adalah sama. Peluang menjuarai turnamen eliminasi secara umum mengikuti rumus berikut:

$$P(\text{juara turnamen}) = (0.5)^{\log_2 n}$$

Perbedaan antara eliminasi tunggal dan ganda akan lebih terasa apabila peluang menang dan kalah tidak sama (lebih merepresentasikan kondisi nyata), seperti pembahasan pada upabab III. Partisipan kedua terbaik yang berhadapan dengan partisipan terbaik pada ronde pertama dalam sebuah turnamen eliminasi ganda akan memiliki peluang menang yang lebih besar ketimbang dalam turnamen eliminasi tunggal.

REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF2091 Struktur Diskrit*, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2008.
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Double-elimination_tournament
Tanggal Akses: 11 Desember 2011
Pukul: 18.07 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 11 Desember 2011



Rubiano Adityas
13510041